Enseignant·es: Dubuis
Analyse 1 - Contrôle 3 - CMS
15 avril 2024
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y)=\sin x\,\cos y+\cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y)=\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2})=\frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2})=\frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2})=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x=\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x+\cos y=2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x-\cos y=-2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x+\sin y=2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x-\sin y=2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y)=\sinh x\,\cosh y+\cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y)=\cosh x\,\cosh y+\sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2})=\frac{\cosh x-1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2})=\frac{\cosh x+1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2})=\frac{\cosh x-1}{\sinh x}=\frac{\sinh x}{\cosh x+1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

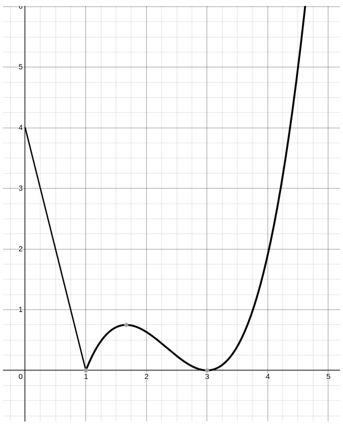
Première partie, questions à choix unique

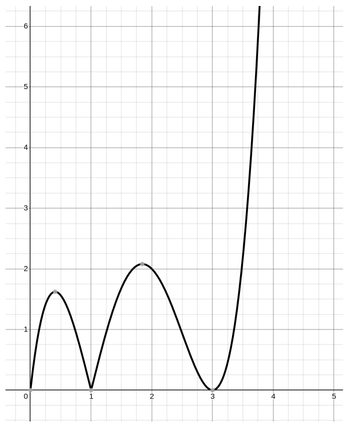
Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

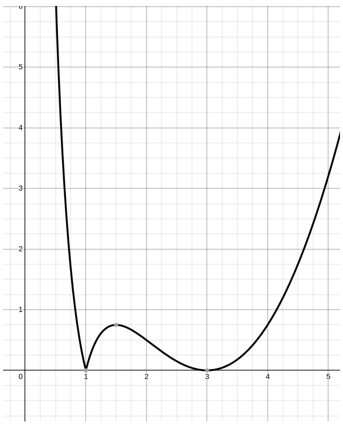
Question 1 (2 points)
On considère une fonction f dont le tableau de variation après son étude complète est le suivant :

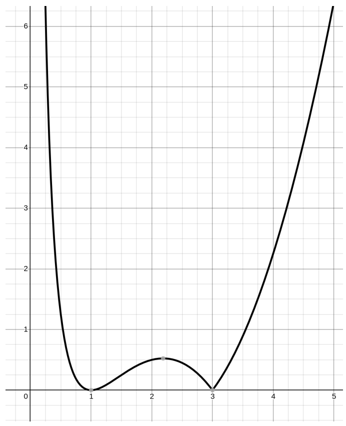
x	0		1		1.5		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-\infty$	$-$	-4 ‖ 4	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\mathbf{0}$	↗	$\mathbf{0.75}$	↘	$\mathbf{0}$	↗	$+\infty$

Parmi les graphes ci-dessous, choisir celui qui esquisse le graphe de f.

☐ 

☐ 

■ 

☐ 

Question 2 (2 points) Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos^3(2\pi t)\sin(t), \\ y(t) = \sin^2(t)\cos(\pi - t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alors :

☐ Γ a une symétrie d'axe Ox.

☐ Γ a une symétrie centrale par rapport à l'origine O.

☐ Aucune de ces possibilités n'est correcte.

■ Γ a une symétrie d'axe Oy.

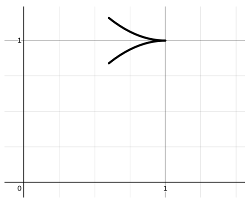
Correction : On vérifie que $x(t)$ est impaire et $y(t)$ est paire.

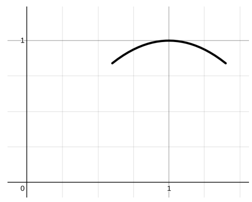
Question 3 (2 points)

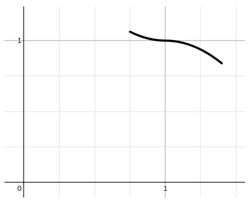
Dans un repère Oxy, on considère la trajectoire Γ d'un arc paramétré $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ dont le signe des dérivées des fonctions coordonnées au voisinage de $t = 0$ est donné dans le tableau ci-dessous. On suppose de plus que $\vec{r}(0) = (1, 1)$.

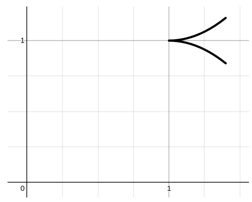
t		0	
$x'(t)$	$+$	0	$-$
$y'(t)$	$+$	0	$+$

Parmi les propositions ci-desous, choisir celle qui représente l'esquisse de la courbe Γ au voisinage de $t = 0$.

■ 

☐ 

☐ 

☐ 

Correction : Comme x' doit changer de signe, seules les deux esquisses avec le point de rebroussement sont possibles. Comme l'ordonnée doit croire (on doit parcourir le chemin de bas en haut), et l'abscisse croitre puis décroitre (on doit parcourir le chemin de gauche à droite, puis de droite à gauche), seule la figure avec "le bec" ouvert vers la gauche est possible.

Question 4 (2 points)
Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^4 - t^2, \\ \\ y(t) = 3t^3 + t^2, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alors Γ possède :

- ☐ un point stationnaire à tangente verticale, un point non stationnaire à tangente horizontale et deux points non stationnaires à tangente verticale.
- ☐ un point stationnaire à tangente oblique, deux points non stationnaires à tangente horizontale et un point non stationnaire à tangente verticale.
- ☐ un point stationnaire à tangente oblique, un point non stationnaire à tangente horizontale et un point non stationnaire à tangente verticale.
- ☐ deux points stationnaires à tangente verticale, deux points non stationnaires à tangente verticale et un point non stationnaires à tangente horizontale.
- ☐ un point stationnaire à tangente horizontale, un point non stationnaire à tangente horizontale et deux points non stationnaires à tangente verticale.
- ■ un point stationnaire à tangente oblique, un point non stationnaire à tangente horizontale et deux points non stationnaires à tangente verticale.
- ☐ un point stationnaire à tangente horizontale, deux points non stationnaires à tangente horizontale et deux points non stationnaire à tangente verticale.
- ☐ un point stationnaire à tangente horizontale, deux points non stationnaires à tangente horizontale et un point non stationnaire à tangente verticale.

Correction : $\dot{x}(t) = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1)$ *et s'annule en* $t = 0, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$. $\dot{y}(t) = 9t^2 + 2t = t(9t + 2)$ *et s'annule en* $t = 0, t = -\frac{2}{9}$.

Question 5 (2 points)
Calculer la valeur de l'intégrale définie suivante :

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} dx.$$

- [ ] $-\pi$
- [ ] -1
- [ ] 1
- [ ] $\frac{\pi}{4}$
- [ ] $-\frac{\pi}{4}$
- [ ] $-\frac{\pi}{2}$
- [ ] $\frac{\pi}{2}$
- [ ] 0
- [x] π

Correction : $\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} dx = [2\arctan(\frac{x}{2})]_{-2}^{2} = 2\frac{\pi}{4} - 2\frac{-\pi}{4} = \pi$.

Question 6 (2 points)
Donner la pente de la tangente au graphe de F au point $(0, F(0))$ où $F(x)$ est définie par

$$F(x) = \int_{x^2+x+1}^{\cos(x)} e^{-2t} dt.$$

- [ ] $-e^2$
- [ ] $2e^2$
- [x] $-e^{-2}$
- [ ] $-1-e^{-2}$
- [ ] 0
- [ ] $-2e^{-2}$
- [ ] e^{-2}
- [ ] $2e^{-2}$
- [ ] $1-e^{-2}$

Correction : $F'(x) = -\sin(x)e^{-2\cos(x)} - (2x+1)e^{-2(x^2+x+1)}$.

Question 7 (2 points)
Calculer la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{2k}{n}}}.$$

- [x] $2-\sqrt{2}$.
- [ ] $-\sqrt{2}$.
- [ ] $1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- [ ] $\sqrt{3}-1$.
- [ ] $\sqrt{3}+1$.
- [ ] 2.
- [ ] $1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- [ ] $\sqrt{2}$.
- [ ] $2+\sqrt{2}$.

Correction : Ce sont des sommes de Riemann associées à l'intégrale définie $\int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x}]_2^4 = 2-\sqrt{2}$. *Alternatives : voir ceci comme les sommes de Riemann associées à* $\int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{2+x}} dx$ *ou* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+2x}} dx$.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 8: *Cette question est notée sur 3 points.*

.5 .5 .5
0 1 2 3

En justifiant rigoureusement vos calculs, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]^{1-\tanh(x)}.$$

Solution
On écrit l'expression sous forme exponentielle :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]^{1-\tanh(x)}=\lim_{x\to+\infty}e^{(1-\tanh(x))\ln(\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}e^{(1-\tanh(x))\frac{1}{2}\ln(x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}(1-\tanh(x))\frac{1}{2}\ln(x)}.$$

L'exposant est une indétermination du type "$0\times+\infty$". On la transforme pour pouvoir utiliser BH :

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\tanh(x))\frac{1}{2}\ln(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{1-\tanh(x)}}=\frac{\infty}{\infty}\underbrace{=}_{BH}\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-\tanh^2(x)}{(1-\tanh(x))^2}}.$$

La limite du dénominateur doit être étudiée :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\tanh^2(x)}{(1-\tanh(x))^2}=\frac{0}{0}\underbrace{=}_{BH}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\tanh(x)(1-\tanh^2(x))}{-2(1-\tanh(x))(1-\tanh^2(x))}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\tanh(x)}{(1-\tanh(x))}=\infty.$$

Par conséquent on a,

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\tanh(x))\frac{1}{2}\ln(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-\tanh^2(x)}{(1-\tanh(x))^2}}=\frac{0}{+\infty}=0$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]^{1-\tanh(x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}(1-\tanh(x))\frac{1}{2}\ln(x)}=1.$$

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

.5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5

Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t+1}{1-e^t}, \\ y(t) = \dfrac{-2t^2-1}{1-e^t}. \end{cases} , t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Etudier les branches infinies de Γ.

Solution

Le domaine de définition et de continuité de Γ est $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On étudie les limites des fonctions coordonnées aux frontières du domaine :

- $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Il n'y a pas de branches infinies à $+\infty$.
- $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$.
- $\lim_{t\to 0^-} x(t) = +\infty, \lim_{t\to 0^-} y(t) = -\infty$
- $\lim_{t\to 0^+} x(t) = -\infty, \lim_{t\to 0^+} y(t) = +\infty$

On cherche une éventuelle asymptote oblique en $t \to -\infty$:

- $\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-2t^2-1}{2t+1} = +\infty$: il y a une branche parabolique verticale quand $t \to -\infty$.

On cherche une éventuelle asymptote oblique en $0^{\pm}$:

- $\lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{-2t^2-1}{2t+1} = -1$
- $\lim_{t\to 0^{\pm}} y(t) + x(t) = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{-2t^2-1+2t+1}{1-e^t} \underbrace{=}_{BH} \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{-4t+2}{-e^t} = -2$

On a donc une asymptote oblique d'équation $y = -x - 2$ à $t \to 0^{\pm}$.

Question 10: *Cette question est notée sur 8 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)(x-2)^2}.$$

(a) Déterminer les points remarquables de f (on en donnera uniquement les abcisses) et la nature géométrique de ces derniers.

(b) Parmi les points trouvés en (a), lesquels sont des minima locaux et lesquels sont des maxima locaux ? Justifier votre réponse.

Solution

(a) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$. On va donc rechercher les points remarquables parmi les points où f' n'est pas définie et ses zéros.

Calcul de f' pour $x \neq \pm 1, 2$: on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left((x^2-1)(x-2)^2\right)^2}}\left(2x(x-2)^2+(x^2-1)2(x-2)\right) \\ &= \frac{2}{3}\frac{(x-2)(2x^2-2x-1)}{\sqrt[3]{\left((x^2-1)(x-2)^2\right)^2}} = \frac{2}{3}\frac{(2x^2-2x-1)}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2(x-2)}}. \end{aligned}$$

f' n'est pas définie en $x = -1, 1, 2$ et s'annule en $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

- En $x = -1$ on a $\lim_{x \to -1} f'(x) = \frac{2}{3}\frac{3}{0^+(-3)} = -\infty$, on a donc une tangente verticale.
- En $x = 1$, on a $\lim_{x \to 1} f'(x) = \frac{2}{3}\frac{-1}{0^+(-1)} = +\infty$, on a donc une tangente verticale.
- En $x = 2$, on a $\lim_{x \to 2^\pm} f'(x) = \frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt[3]{9}0^\pm} = \pm\infty$, on a un point de rebroussement.
- En x_1, x_2, $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, on a une tangente horizontale

(b) On étudie le signe de f' : on a

x		-1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		2	
$2x^2-2x-1$ +	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	||	+
$(x^2-1)^2$	+	||	+	+	+	||	+	+	+	+	+
$f'(x)$	-	||	-	0	+	||	+	0	-	||	+

On a donc un minimum local en $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et un minimum local en $x = 2$. On a un maximum local en $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.