Enseignant·es: Dubuis
Analyse 1 - CMS
17 avril 2023
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (1 point)
Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^{t^2} e^{s^2}\,ds, \\ y(t) = \displaystyle\int_0^{t^2+t} e^{s^2}\,ds, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Γ possède

- ☐ exacement 1 point à tangente horizontale et aucun point à tangente verticale.
- ☐ aucun point à tangente horizontale et aucun point à tangente verticale.
- ☐ aucun point à tangente horizontale et exactement 1 point à tangente verticale.
- ■ exactement 1 point à tangente horizontale et exactement 1 point à tangente verticale.

Correction : On calcule $\dot{x}(t) = 2te^{t^4}$ et $\dot{y}(t) = (2t+1)e^{(t^2+t)^2}$. $\dot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $\dot{y}(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1/2$.

Question 2 (2 points)
Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + 2t, \\ y(t) = \dfrac{4+t^4}{t^2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Γ possède

- ■ exactement 1 point double.
- ☐ aucun point double.
- ☐ exactement 2 points doubles.
- ☐ strictement plus que 2 points doubles.

Correction : On résout $x(a) = x(b)$ et $y(a) = y(b)$ avec $a \neq b$. On a $a + b = -2$ et $a^2b^2 = 4$. On trouve deux paires de solutions : $a = -1-\sqrt{3}, b = -1+\sqrt{3}$ et $a' = -1+\sqrt{3}, b' = -1-\sqrt{3}$. Ces paires sont les mêmes. On a donc un unique point double.

Question 3 (2 points)
Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^2), \\ y(t) = \cos(\pi t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donner la pente m de la tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$.

- ☐ $m = -\infty$
- ■ $m = \dfrac{-\pi^2}{2}$
- ☐ $m = 0$
- ☐ $m = \dfrac{\pi^2}{2}$

Correction : On calcule la limite de $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ quand $t \to 0$ à l'aide de la règle de BH.

Question 4 (1 point)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \in C^0(\mathbb{R})$. On suppose que

(a) f est paire.

(b) f est périodique de période $T = 2$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx$.

- ■ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 6$
- □ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$
- □ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 3$
- □ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 2$

Correction : La fonction étant paire, on a $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$. Par périodicité, $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 3\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Question 5 (2 points)
Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-2x}dx$.

- □ $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$
- □ $\ln(3)$
- □ $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- ■ $\ln(\sqrt{3})$

Correction : Par la formule de Newton-Leibniz, on a $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-2x}dx = -\frac{1}{2}\ln(|1-2x|)\big|_{-1/4}^{1/4}$.

Question 6 (2 points)
Calculer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}$.

- □ 4
- ■ 1
- □ 0
- □ $\dfrac{1}{4}$

Correction : On reconnait une somme de Riemann associée à $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}}$.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 10 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2(t), \\ y(t) = 2\sin(t) - \dfrac{8}{3}\sin^3(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Commencer par montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(ii) Faire l'étude complète de l'arc paramétré Γ sur le domaine d'étude $D = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On ne demande pas de déterminer les éventuels points multiples.

(iii) Représenter graphiquement l'arc paramétré Γ sur tout son domaine de définition dans un système d'axes orthonormés d'unité égale à 12 carrés.

Solution

(i) Domaine d'étude

- On observe tout d'abord que $x(t)$ est périodique de période π et $y(t)$ de période 2π. Donc $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ est périodique de période 2π. On peut donc restreindre le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$.
- Comme $x(t)$ est paire et $y(t)$ est impaire, Γ a une symétrie d'axe Ox et on peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.
- Finalement, on observe que $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, on peut par conséquent restreindre l'étude à $D = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(ii) 1) Limites au bord du domaine d'étude et branches infinies : la fonction $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ étant continue sur D, il n'y a pas de branches infinies. On a

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = (1, 0), \lim_{t\to \frac{\pi}{2}} \vec{r}(t) = \left(0, -\frac{2}{3}\right).$$

2) Variations des fonctions coordonnées et points remarquables

- On calcule tout d'abord les dérivées :

$$\dot{x}(t) = -2\cos(t)\sin(t) = -\sin(2t), \dot{y}(t) = 2\cos(t) - 8\sin^2(t)\cos(t) = 2\cos(t)(1 - 4\sin^2(t)).$$

- On a

$$\dot{x}(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \quad \dot{y}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}.$$

- $\vec{r}(0) = (1, 0)$ est un point à (demi-)tangente verticale, $\vec{r}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right)$ est un point à tangente horizontale, $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -\frac{2}{3}\right)$ est un point stationnaire.

- On détermine la tangente au graphe en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$m = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - 4\sin^2(t))}{-2\sin(t)} = 3.$$

Le point stationnaire est donc un point à tangente oblique de pente $m = 3$.

- Tableau des signes :

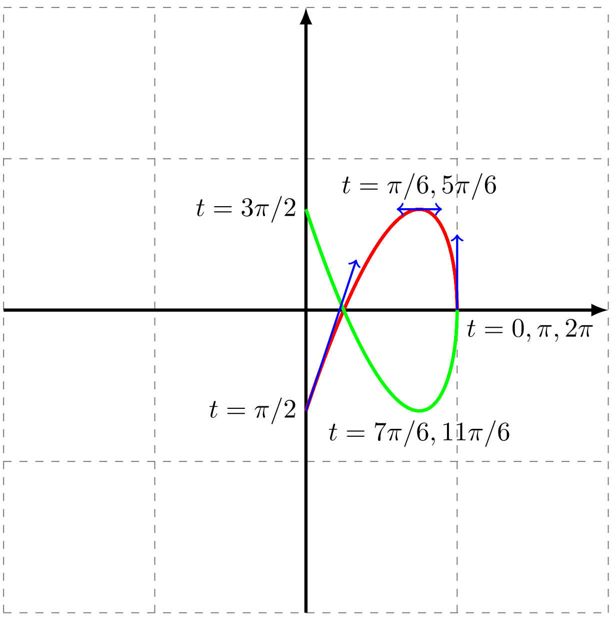
t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\dot{x}$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\dot{y}$	$+$	$+$	0	$-$	0

3) Résumé

Tableau de variation :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\dot{x}$	0	$-$	$-$	$-$	0
x	1	$\searrow$	$3/4$	$\searrow$	0
$\dot{y}$	$+$	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$2/3$	$\searrow$	$-2/3$
	TV		TH		$PS\, m = 3$

(iii) Esquisse : unité = 1 carré



Question 8: *Cette question est notée sur 10 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

On considère les trois fonctions ci-dessous, définies sur leurs domaines de définition respectifs :

$$a(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2 \left|x+\frac{3}{2}\right|^3}, \quad b(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) + \frac{1}{x^3}, \quad c(x) = \sqrt{\left(x^3+\frac{7}{4}\right)^3}.$$

(i) Donner le domaine de définition de chaque fonction.

(ii) Déterminer et caractériser les extrema du graphe de a.

(iii) Etudier les branches infinies du graphe de b.

(iv) Déterminer les points d'inflexion du graphe de c.

Solution

(i)

$$D_a = \mathbb{R}, D_b = \mathbb{R}^*, D_c = \left[-\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{4}}, +\infty\right[.$$

(ii) On a que $a(x)$ est donnée par

$$a(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)^3}, x \geq -\frac{3}{2} \\ -\sqrt[3]{(x-1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)^3}, x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

On calcule

$$a'(x) = \begin{cases} \frac{5x(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{3\sqrt[3]{(x-1)^4\left(x+\frac{3}{2}\right)^6}}, x > -\frac{3}{2}, x \neq 1 \\ -\frac{5x(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{3\sqrt[3]{(x-1)^4\left(x+\frac{3}{2}\right)^6}}, x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Sous forme compacte,

$$a'(x) = \operatorname{sgn}\left(x+\frac{3}{2}\right)\frac{5x}{3\sqrt[3]{x-1}}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}.$$

On étudie le signe de a' :

x		$-3/2$		0		1	
$a'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

Comme a est continue sur tout $\mathbb{R}$, on a donc des minima locaux aux points $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ et $(1,0)$, ainsi qu'un maximum local au point $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

De plus,

$$a'\left(-\frac{3}{2}^{\pm}\right) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}^{\pm}} a'(x) = \pm\sqrt[3]{\frac{25}{4}}$$

et donc le graphe admet un point anguleux en ce point.

On calcule également que

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} a'(x) = \pm\infty$$

et donc le graphe admet un point de rebroussement en ce point.

Finalement, en $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, on a un point à tangente horizontale.

(iii) On calcule les limites à gauche et à droite de zéro. Par le théorème "0 x borné " on a

$$\lim_{x\to 0^\pm} b(x) = 0 + \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty.$$

Le graphe a donc une asymptote verticale en $x = 0$. De plus

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\sin(|y|)}{y} = \pm \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\sin(y)}{y} = \pm 1.$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} b(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 3x \lim_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = +\infty.$$

On cherche une asymptote oblique, on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{b(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 3x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = \pm 3.$$

De plus,

$$\lim_{x\to\pm\infty} b(x) - (\pm 3)x = \lim_{x\to\pm\infty} 3x\left(x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - (\pm 1)\right) = \pm 3 \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\sin(y) - y}{y^2}$$

$$\underbrace{=}_{BH} \pm 3 \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\cos(y) - 1}{2y} \underbrace{=}_{BH} \pm 3 \lim_{y\to 0^\pm} \frac{-\sin(y)}{2} = 0.$$

Le graphe de b admet donc la droite d'équation $\pm 3x$ comme asymptote oblique à $\pm\infty$.

(iv) On calcule $c'(x)$ pour tout $x > -\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{4}}$. On a

$$c'(x) = \frac{9}{2}x^2\sqrt{x^3 + \frac{7}{4}}.$$

Puis

$$c''(x) = \frac{63x(x^3+1)}{4\sqrt{x^3+\frac{7}{4}}}.$$

La dérivée seconde s'annule en -1 et 0. Le tableau des signes nous donne :

x	$-\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{4}}$		-1		0	
c''	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$

Comme la dérivée seconde change de signe en -1 et 0, on a donc un point d'inflexion du graphe au point $\left(-1, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$ et au point d'abcisse $\left(0, \frac{7\sqrt{7}}{8}\right)$.