Enseignant·es: Dubuis
Analyse 1 - CMS
17 avril 2023
Durée : 105 minutes

1

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (1 point)
Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \displaystyle\int_0^{t^2} e^{s^2}\, ds, \\ y(t) = \displaystyle\int_0^{t^2+t} e^{s^2}\, ds, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Γ possède

- ☐ exacement 1 point à tangente horizontale et aucun point à tangente verticale.
- ☐ aucun point à tangente horizontale et aucun point à tangente verticale.
- ☐ aucun point à tangente horizontale et exactement 1 point à tangente verticale.
- ☐ exactement 1 point à tangente horizontale et exactement 1 point à tangente verticale.

Question 2 (2 points)
Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t^2 + 2t, \\ y(t) = \dfrac{4+t^4}{t^2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Γ possède

- ☐ exactement 1 point double.
- ☐ aucun point double.
- ☐ exactement 2 points doubles.
- ☐ strictement plus que 2 points doubles.

Question 3 (2 points)
Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^2), \\ y(t) = \cos(\pi t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donner la pente m de la tangente à Γ au point $(x(0), y(0))$.

- ☐ $m = -\infty$
- ☐ $m = \dfrac{-\pi^2}{2}$
- ☐ $m = 0$
- ☐ $m = \dfrac{\pi^2}{2}$

Question 4 (1 point)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \in C^0(\mathbb{R})$. On suppose que

(a) f est paire.

(b) f est périodique de période $T = 2$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx$.

- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 6$
- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$
- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 3$
- ☐ $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx = 2$

Question 5 (2 points)
Calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-2x} dx$.

- ☐ $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$
- ☐ $\ln(3)$
- ☐ $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- ☐ $\ln(\sqrt{3})$

Question 6 (2 points)
Calculer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}$.

- ☐ 4
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{4}$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5 ☐.5 ☐6 ☐.5 ☐7 ☐.5 ☐8 ☐.5 ☐9 ☐.5 ☐10

Dans le plan Oxy, on considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2(t), \\ y(t) = 2\sin(t) - \dfrac{8}{3}\sin^3(t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Commencer par montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(ii) Faire l'étude complète de l'arc paramétré Γ sur le domaine d'étude $D = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On ne demande pas de déterminer les éventuels points multiples.

(iii) Représenter graphiquement l'arc paramétré Γ sur tout son domaine de définition dans un système d'axes orthonormés d'unité égale à 12 carrés.

Question 8: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

On considère les trois fonctions ci-dessous, définies sur leurs domaines de définition respectifs :

$$a(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2 \left|x + \frac{3}{2}\right|^3}, \quad b(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) + \frac{1}{x^3}, \quad c(x) = \sqrt{\left(x^3 + \frac{7}{4}\right)^3}.$$

(i) Donner le domaine de définition de chaque fonction.

(ii) Déterminer et caractériser les extrema du graphe de a.

(iii) Etudier les branches infinies du graphe de b.

(iv) Déterminer les points d'inflexion du graphe de c.