1

Enseignant·es: Dubuis
Analyse 1 - Contrôle 4 - CMS
10 juin 2024
Durée : 105 minutes

Robin des Bois

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x \, \cosh y + \cosh x \, \sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \, \cosh y + \sinh x \, \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \, \tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (3 points)
Soit D le domaine délimité par la courbe d'équation $y = x^2$ et les droites $y = 0$ et $x = 1$. Le volume du corps de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe $y = 1$ vaut

- [ ] π
- [x] $\frac{7\pi}{15}$
- [ ] $\frac{6\pi}{5}$
- [ ] $\frac{8\pi}{15}$
- [ ] $\frac{\pi}{5}$
- [ ] $\frac{4\pi}{5}$

Correction : On a que $V = \pi \int_0^1 1^2 dx - \pi \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{7\pi}{15}$.

Question 2 (2 points)
Soit Γ l'arc paramétré défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = e^t \cos(t) \\ y(t) = e^t \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

La longueur de Γ vaut

- [ ] $e^{4\pi} - 1$
- [x] $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$
- [ ] $e^{2\pi} - 1$
- [ ] $\sqrt{2}e^{2\pi}$

Correction : On a $\mathrm{long}(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^t dt = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

Question 3 (3 points)
L'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe Oy de la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{3x}$ avec $0 \leq x \leq \frac{8}{3}$ vaut

- [ ] $\frac{17\pi}{9}$
- [ ] $\frac{4\pi}{9}(17\sqrt{17} - 1)$
- [ ] $\frac{16\pi}{9}$
- [ ] $\frac{2\pi}{3}(17\sqrt{17} - 1)$
- [ ] $\frac{2\pi}{9}17\sqrt{17}$
- [x] $\frac{\pi}{9}(17\sqrt{17} - 1)$

Correction : On a que $A = 2\pi \int_0^2 x(y)\sqrt{1 + x'(y)^2} dy = 2\pi \int_0^2 \frac{1}{3}y^3 \sqrt{1 + y^4} dy = \frac{\pi}{9}(17\sqrt{17} - 1)$.

Question 4 (2 points)
Soit D le domaine délimité par les courbes d'équation $y = x$ et $y = x^2$ et les droites $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$. L'aire de D vaut

- [ ] $\frac{2}{3}$
- [ ] $\frac{3}{8}$
- [ ] $\frac{5}{8}$
- [x] $\frac{11}{12}$
- [ ] 1
- [ ] $\frac{7}{12}$

Correction : On a que $A = \int_{1/2}^2 |x - x^2| dx = \int_{1/2}^1 x - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x dx = \frac{11}{12}$.

Question 5 (1 point)

La décomposition en éléments simples de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+x+2)^2}$ est de la forme

- ☐ $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x^2+x+2} + \dfrac{d}{(x^2+x+2)^2}$
- ☐ $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x^2+x+2}$
- ☐ $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x^2+x+2)^2}$
- ☐ $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+2}$
- ☐ $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{(cx+d)^2}{x^2+x+2} + \dfrac{(ex+f)^2}{(x^2+x+2)^2}$
- ■ $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+2} + \dfrac{ex+f}{(x^2+x+2)^2}$

Correction :

Question 6 (3 points)

La valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)\cos(2x)}{1+\sin^2(x)}dx$$

est

- ■ $\dfrac{3\pi}{4} - 2$
- ☐ $\dfrac{3\pi}{4} + 2$
- ☐ 2
- ☐ -2
- ☐ $\dfrac{\pi}{4} - 2$
- ☐ $-\dfrac{\pi}{4} - 2$

Correction : La quantité $\frac{\cos(x)\cos(2x)}{1+\sin^2(x)}dx$ est invariante si on remplace x par $\pi - x$. On effectue donc le changement de variable $z = \sin(x), dz = \cos(x)dx, \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) = 1 - 2z^2$. On intègre alors $\int_0^1 \frac{1-2z^2}{1+z^2}dz = 3\int_0^1 \frac{1}{1+z^2}dz - 2\int_0^1 dz = 3\arctan(1) - 2$.

Question 7 (2 points)

L'intégrale définie

$$\int_{-4}^{-2} \sqrt{x^2-4}dx$$

est égale à

- ☐ $2\displaystyle\int_0^{\operatorname{argcosh}(2)} \sinh^2(t)dt$
- ☐ $4\displaystyle\int_{\operatorname{argcosh}(2)}^{0} \sinh^2(t)dt$
- ■ $4\displaystyle\int_0^{\operatorname{argcosh}(2)} \sinh^2(t)dt$
- ☐ $\displaystyle\int_{\operatorname{argcosh}(2)}^{\operatorname{argcosh}(4)} \sinh^2(t)dt$

Correction : On effectue le changement de variable $\frac{x}{2} = -\cosh(t), dx = -2\sinh(t)dt$.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 8: *Cette question est notée sur 3 points.*

.5 .5 .5
0 1 2 3

Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \sin(x^2) dx.$$

Solution
On calcule la primitive de $x^3 \sin(x^2)$ par partie. On va dériver x^2 et intégrer $x \sin(x^2)$. On a

$$\int x^3 \sin(x^2) dx = \int x^2 x \sin(x^2) dx = x^2[-\frac{\cos(x^2)}{2}] + \int x \cos(x^2) dx$$
$$= -\frac{x^2}{2}\cos(x^2) + \frac{1}{2}\sin(x^2) = F(x)$$

On évalue pour finalement obtenir

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x^3 \sin(x^2) = F\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) - F(0) = -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Question 9: *Cette question est notée sur 4 points.*

.5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4

Calculer l'intégrale définie

$$\int_{-2}^{1} \frac{x+3}{x^2+4x+5} dx.$$

Solution On pose $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+5}$ et calcule la primitive de $f(x)$:

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x+3}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} = \int \frac{2x+6}{x^2+4x+5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx + \int \frac{1}{x^2+4x+5} dx.\end{aligned}$$

D'où

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + \int \frac{1}{x^2+4x+5} dx.$$

De plus

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx = \arctan(x+2) + C$$

d'où

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + \arctan(x+2) + C.$$

En évaluant entre -2 et 1, on obtient finalement

$$\int_{-2}^{1} \frac{x+3}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(10) + \arctan(3).$$

Question 10: *Cette question est notée sur 7 points.*

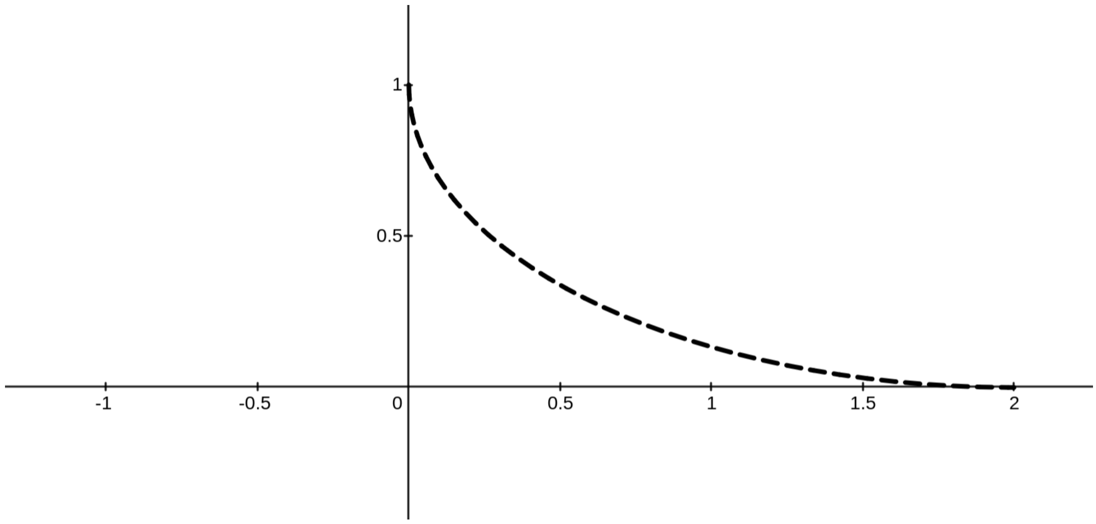
☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

On considère le domaine D délimité par l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 + 2\cos(t) \\ y(t) = 1 + \sin(t) \end{cases} \quad t \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]$$

et les trois droites d'équation $y = 0, y = \frac{1}{2}$ et $x = -1$.

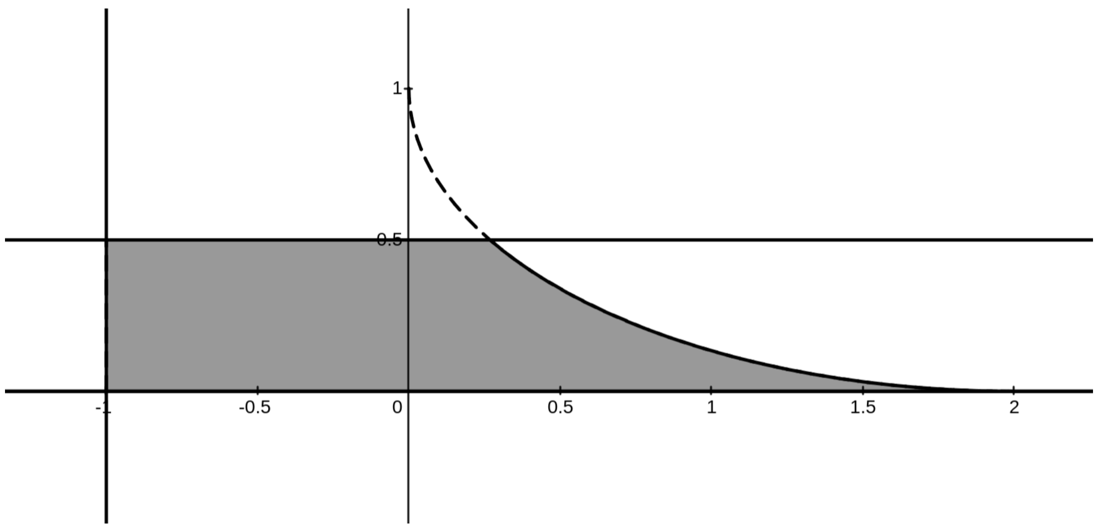
(a) Ci-dessous, on représente en traitillé l'arc paramétré Γ. Esquisser sur la figure ci-dessous le domaine D.



(b) Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de D autour de $x = -1$.

Solution

(a) Le domaine D est représenté par la région grisée .



(b) On modélise le volume comme des tranches horizontales $x_\Gamma + 1$, de hauteur dy, qui tournent autour de l'axe $x = -1$. On génère donc des cylindres infinitésimaux de volume $dV = \pi(x_\Gamma + 1)^2 dy$ que l'on intègre vercticalement de $y = 0$ à $y = \frac{1}{2}$. On a donc

$$V = \int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \pi(x_\Gamma + 1)^2 dy.$$

On traduit l'intégrale en recherchant les points d'intersections. On a pour $t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

$$y(t) = 1 + \sin(t) = 0 \iff t = -\frac{\pi}{2}, y(t) = \sin(t) + 1 = \frac{1}{2} \iff t = -\frac{5\pi}{6}.$$

On a donc

$$V = \int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \pi(x_\Gamma + 1)^2 dy = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} (3 + 2\cos(t))^2 \cos(t) dt$$

On calcule finalement l'intégrale définie :

$$\begin{aligned} V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} 9\cos(t) + 12\cos^2(t) + 4\cos^3(t) dt \\ = 9\pi[\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} + 12\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt + 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} \cos(t)(1 - \sin^2(t)) dt \\ = 13\pi[\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} + 12\pi \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} - \frac{4\pi}{3} \left[\sin^3(t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

En évaluant, on trouve finalement

$$V = \frac{16\pi}{3} - 2\pi^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$