

**EPFL****1**

Enseignant·es: Dubuis

Analyse 1 - CMS

12 juin 2023

Durée : 105 minutes

Robin des Bois

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 7 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
les points indiqués si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

| Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien | | |
|---|--|---|
| choisir une réponse select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren |
| <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> |
| ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte | | |
| <input checked="" type="checkbox"/> | | |



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos x}{2} & \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 + \cos x}{2} & \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \cos x &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \tan x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|--------------------|---------------------------|-----------|------------------------|----------------|--------------------------|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\arg \sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\cosh x$ | $\sinh x$ | $\arg \cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\arg \tanh x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| $\text{arccot } x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $\coth x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $\arg \coth x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |

**Première partie, questions à choix unique**

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)

Soit Γ la courbe donnée par l'équation $y = 2\sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq 1$.

L'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de l'axe Ox vaut

$4\pi(2\sqrt{2} - 1)$.

$\frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

$\frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

$\frac{8\pi}{3}(\sqrt{2})$.

Question 2 (2 points)

Soit D le domaine délimité par les droites $x = 1, y = 0$ et la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$.

La valeur du volume V du corps de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe Oy vaut

$\frac{3\pi}{4}$.

$\frac{17\pi}{20}$.

$\frac{\pi}{4}$.

$\frac{9\pi}{20}$.

Question 3 (2 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable telle que

- f est paire,

- $f(1) = 1$,

- $\int_{-1}^1 xf'(x)dx = 3$.

La valeur de $\int_{-1}^1 f(x)dx$ est

3.

-1.

1.

-3.



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 4 points.*

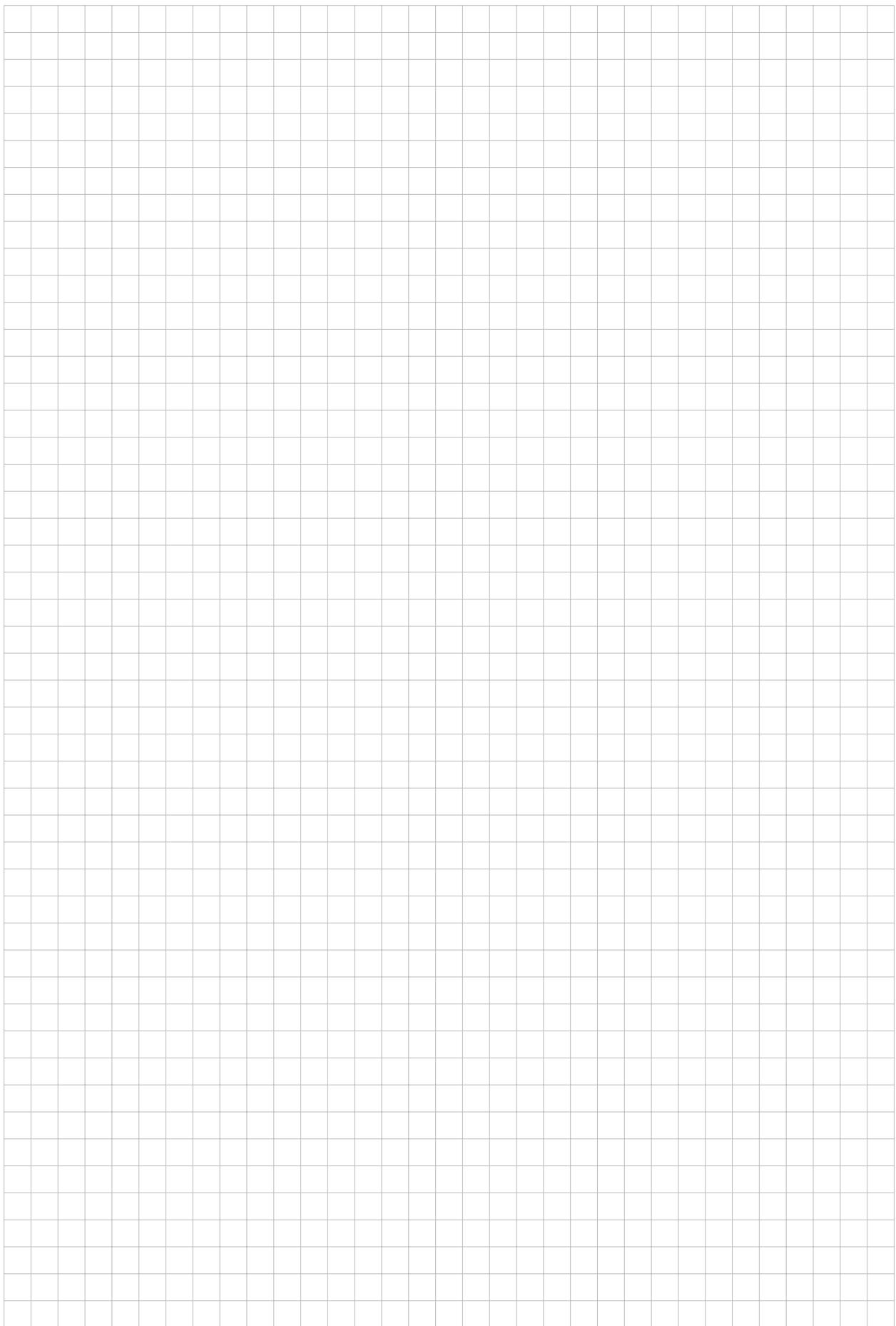
| | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----|--------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> | ,5 | <input type="checkbox"/> | ,5 | <input type="checkbox"/> | ,5 | <input type="checkbox"/> | ,5 |
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | | | |

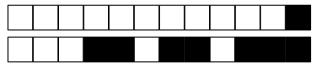
Déterminer le domaine de définition puis, sur ce domaine, calculer l'ensemble des primitives de la fonction

$$f(x) = x \ln(\sqrt{x^2 + 1}).$$

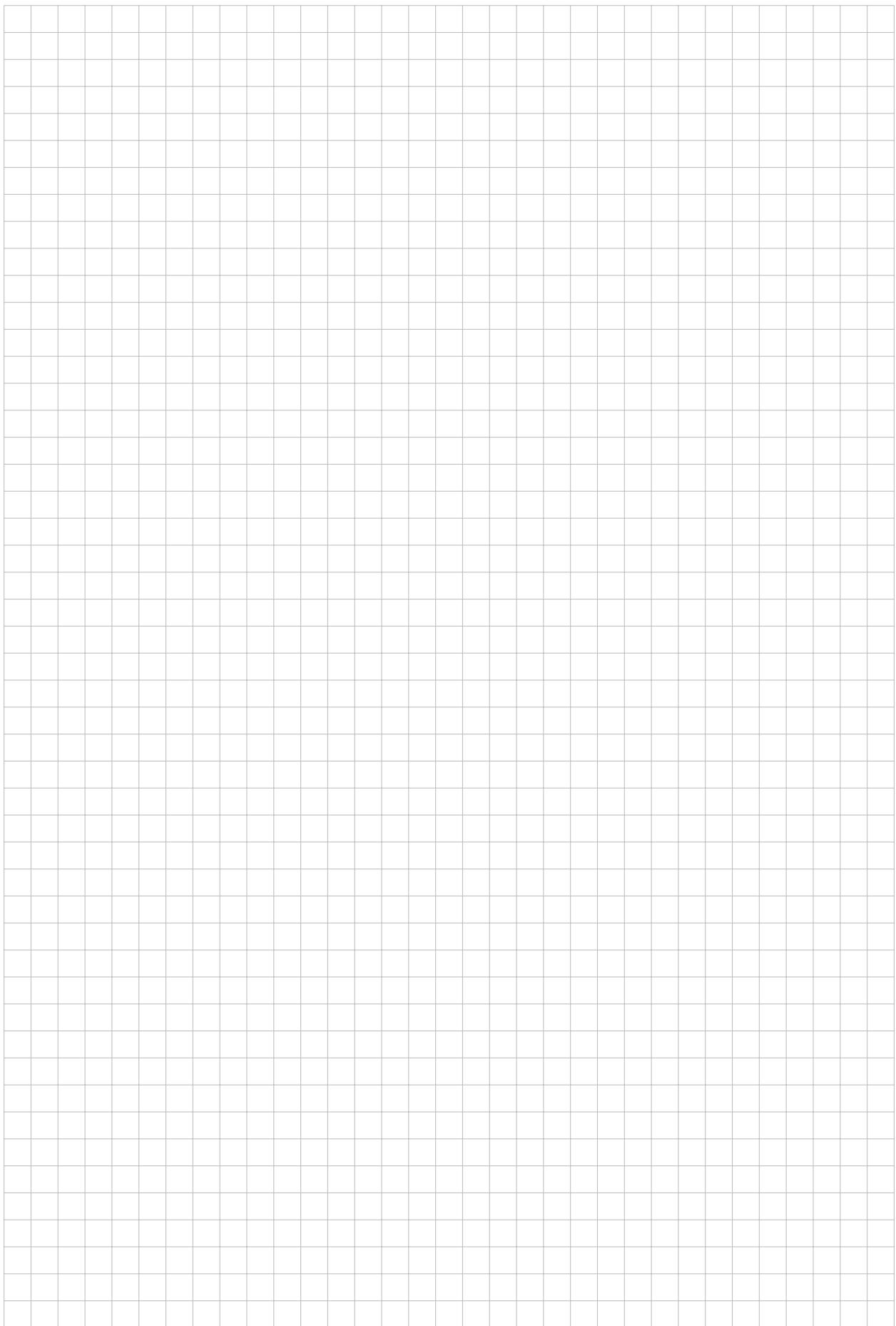


+1/5/56+





+1/6/55+



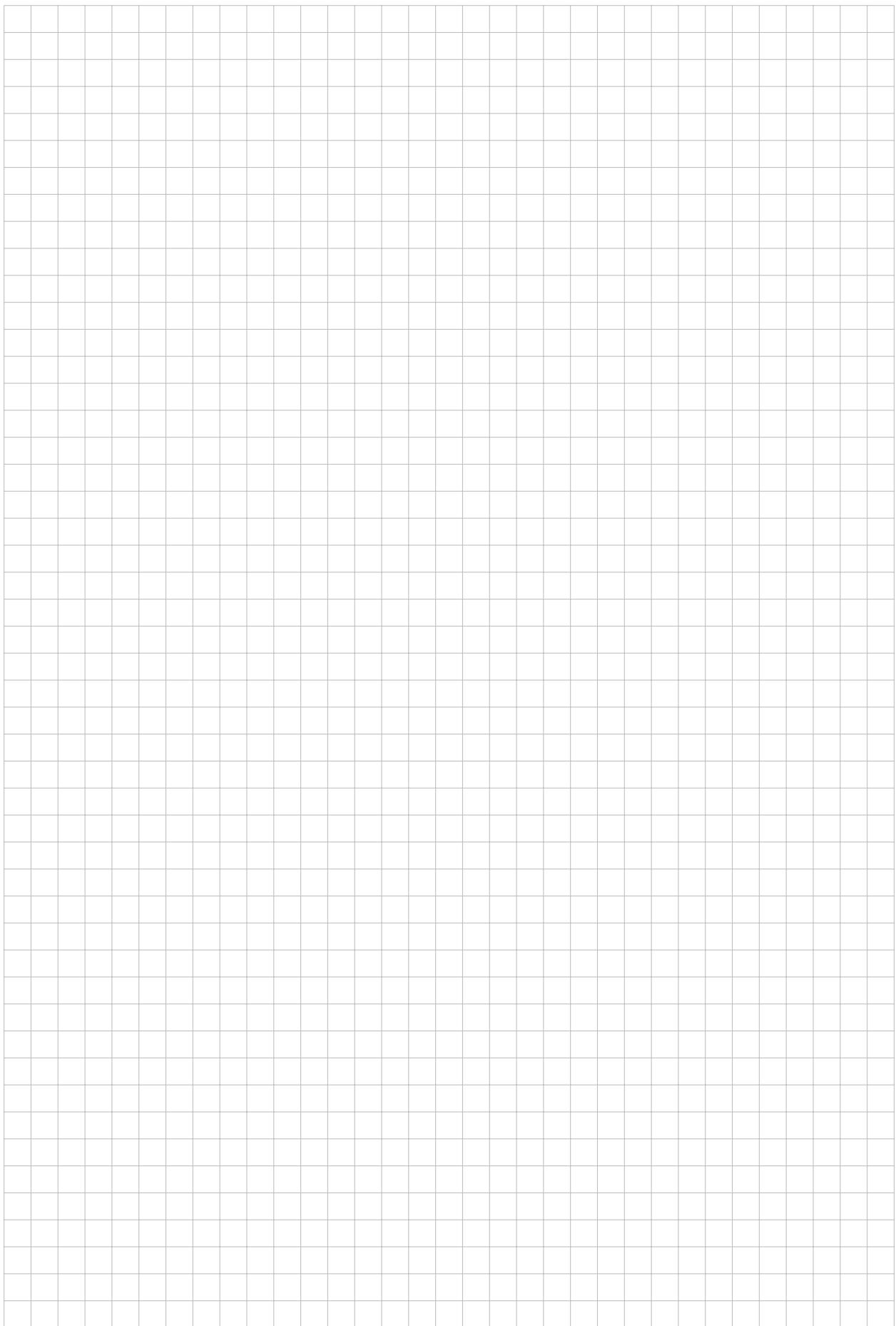
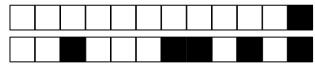


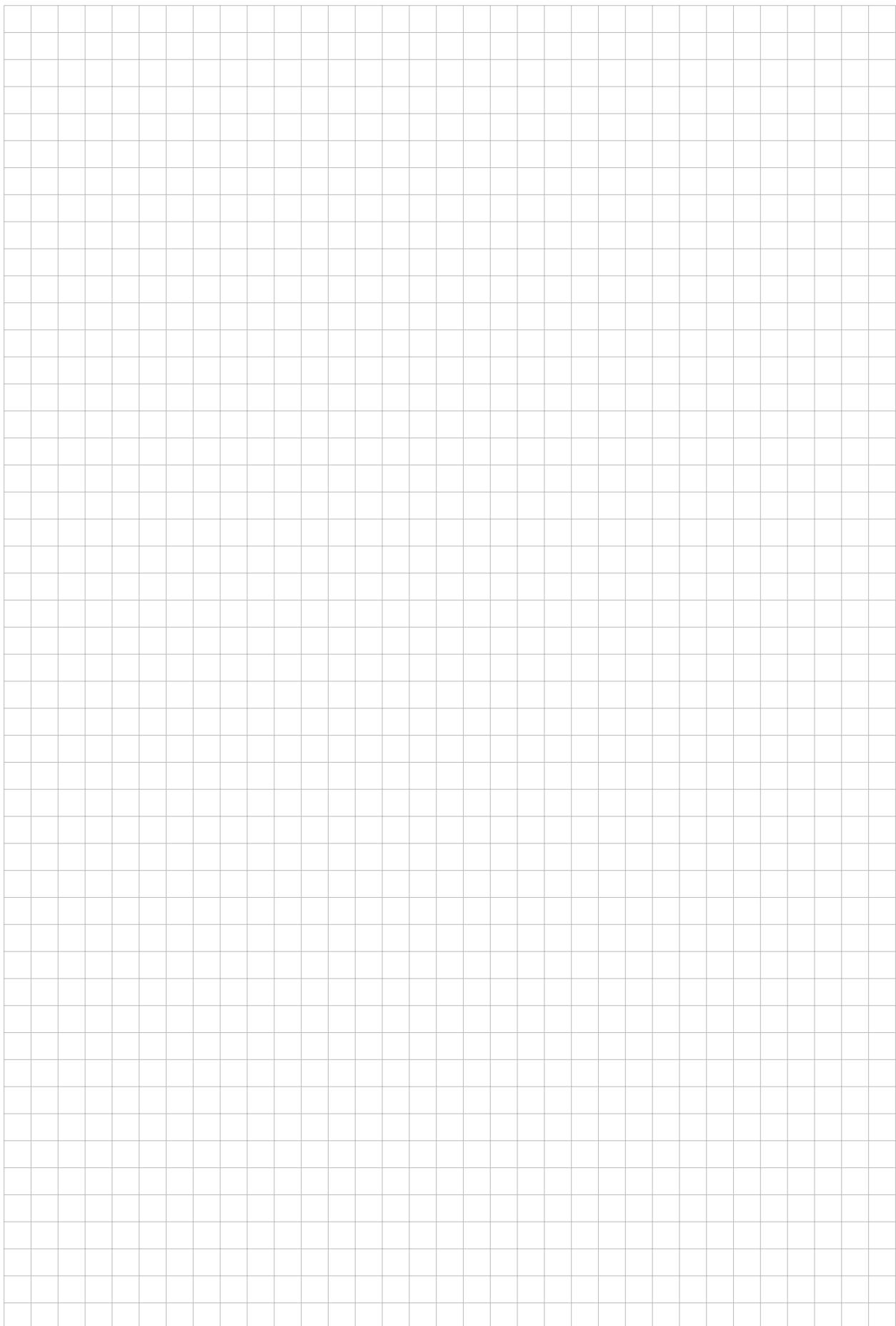
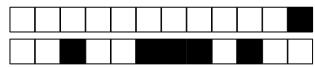
Question 5: Cette question est notée sur 5 points.

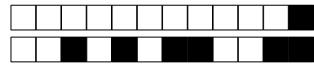
| | | | | | | | | | | |
|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> | ,5 | |
| <input type="checkbox"/> 0 | | <input type="checkbox"/> 1 | | <input type="checkbox"/> 2 | | <input type="checkbox"/> 3 | | <input type="checkbox"/> 4 | | <input type="checkbox"/> 5 |

Déterminer le domaine de définition puis, sur ce domaine, calculer l'ensemble des primitives de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}.$$





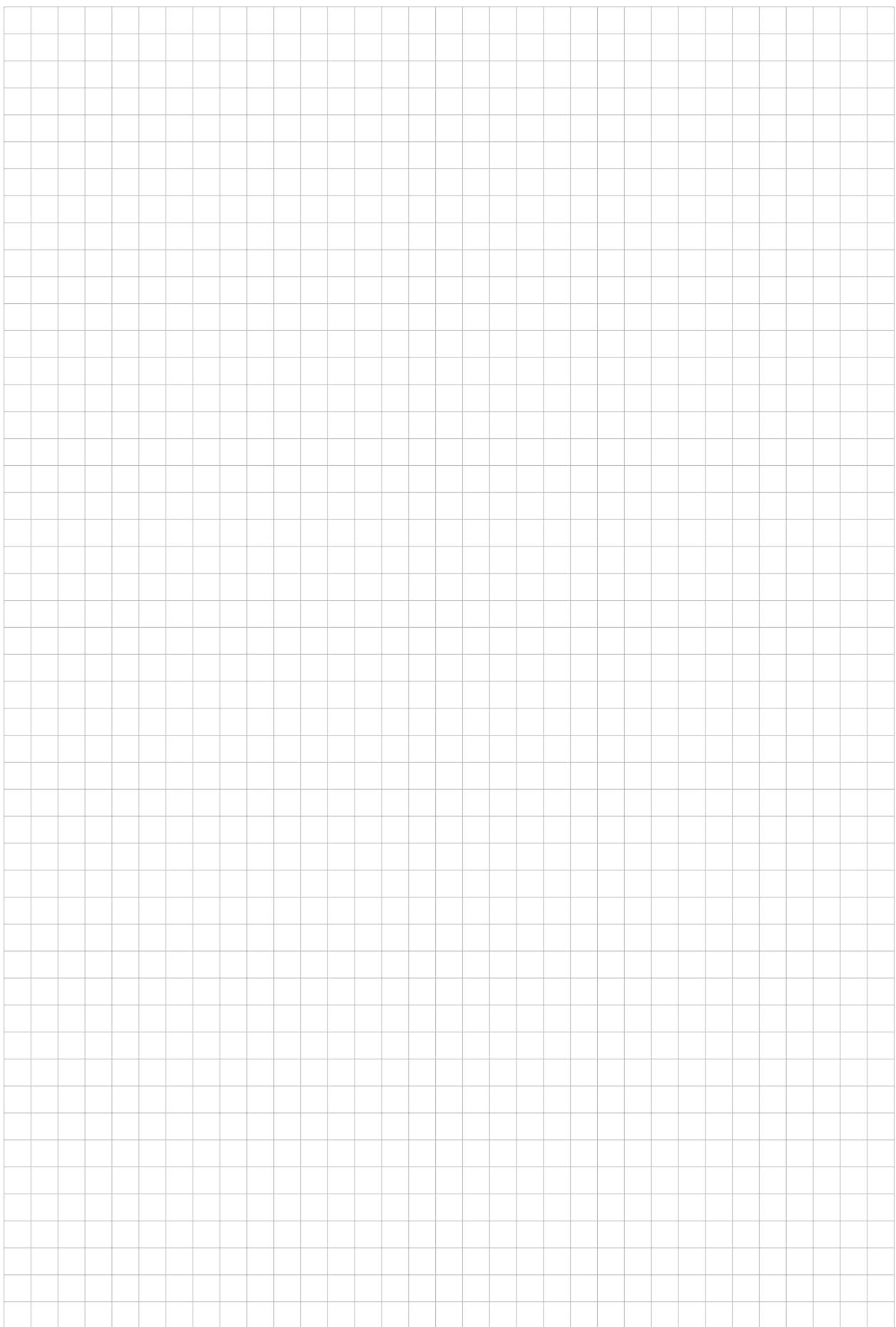


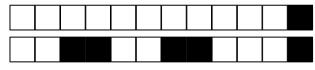
Question 6: Cette question est notée sur 5 points.

| | | | | | | | | | | |
|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|----|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> | .5 | |
| <input type="checkbox"/> 0 | | <input type="checkbox"/> 1 | | <input type="checkbox"/> 2 | | <input type="checkbox"/> 3 | | <input type="checkbox"/> 4 | | <input type="checkbox"/> 5 |

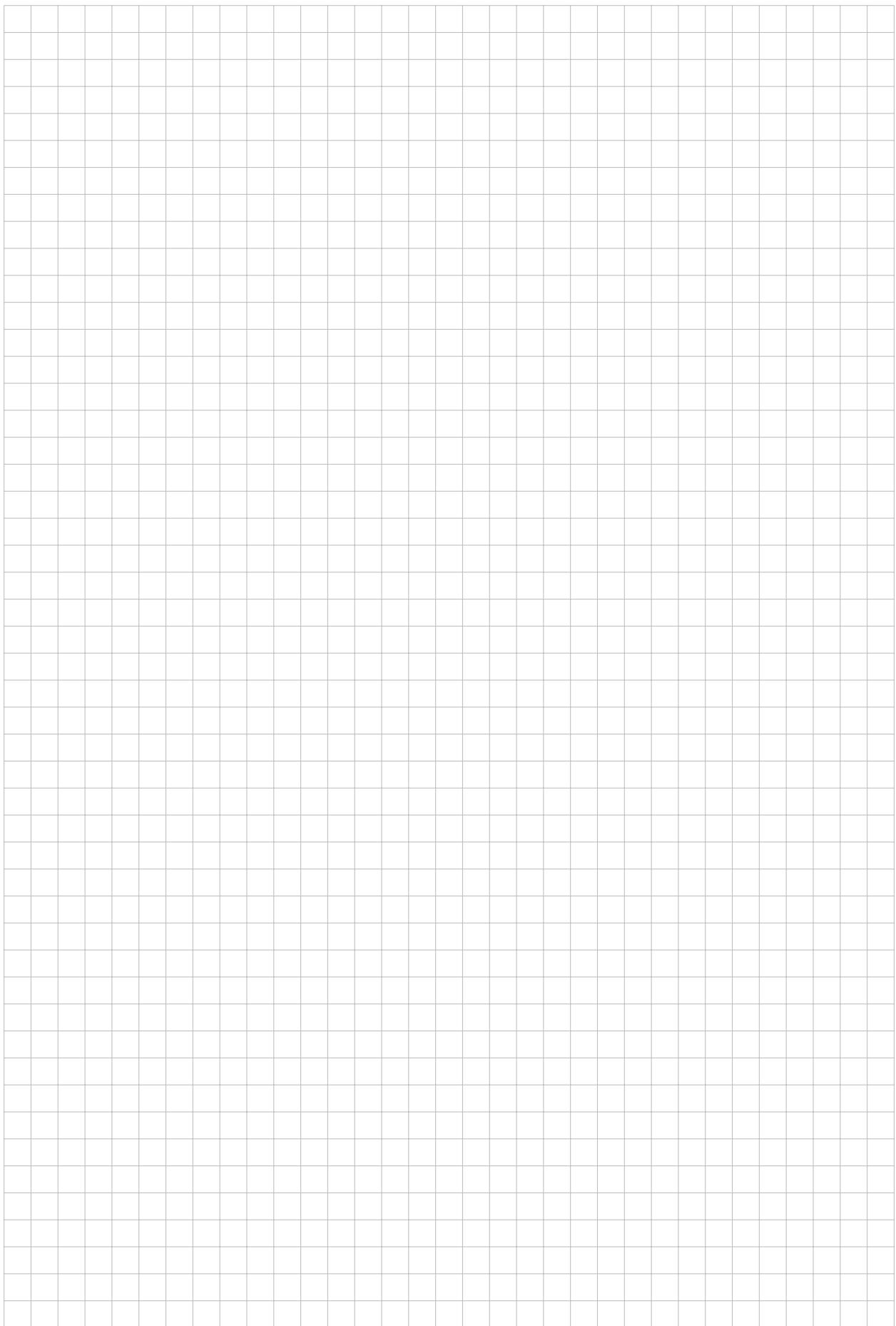
Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x) \sin(x) - \cos(x) \sin(x) + \sin(x)}{(\cos(x) + 1)(\cos(x) - 2)^2} dx.$$





+1/12/49+





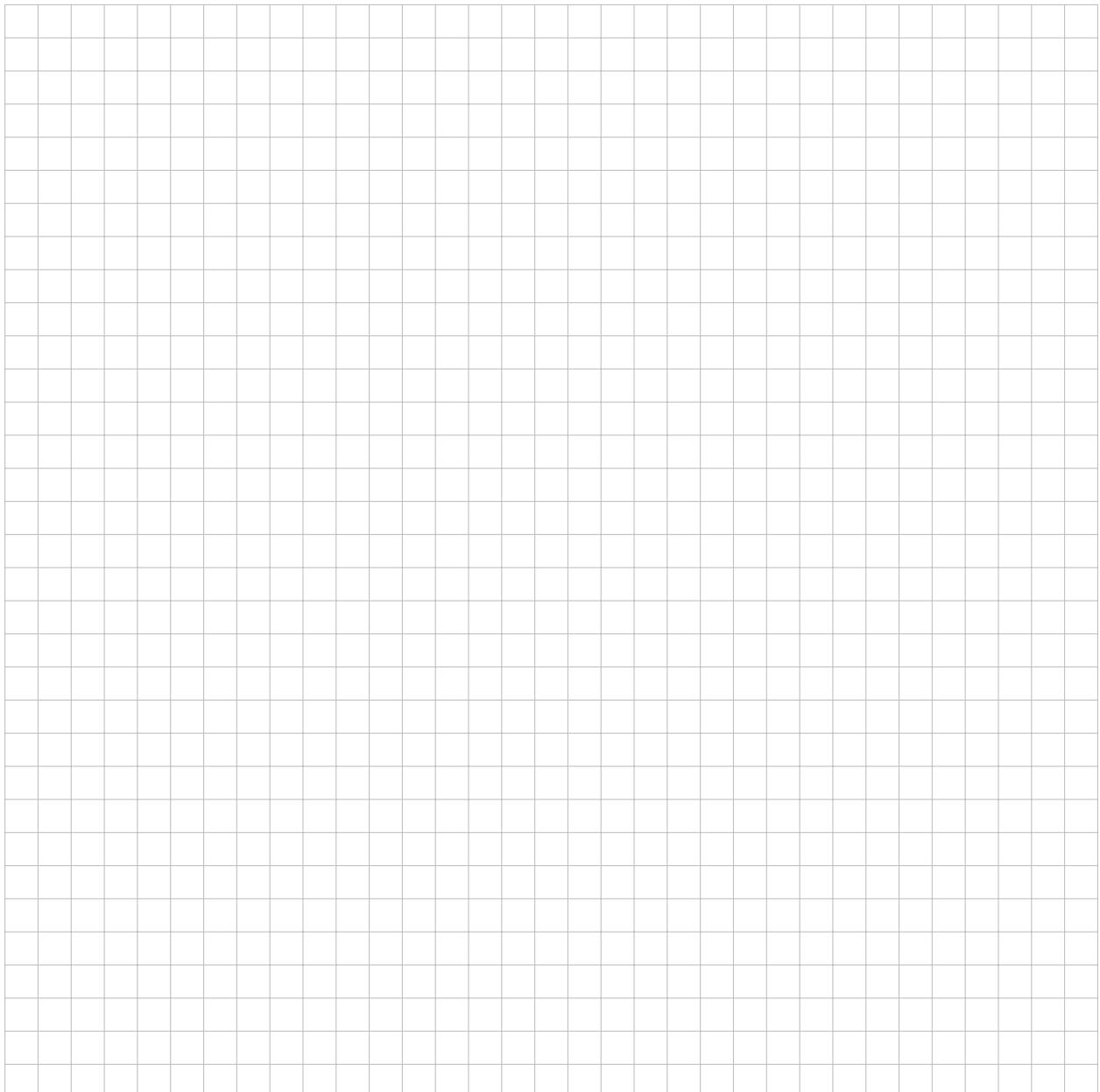
Question 7: Cette question est notée sur 10 points.

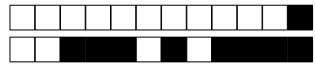
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|------------------------|----|-------------------------|
| <input type="text"/> | ,5 | |
| <input type="text"/> 0 | | <input type="text"/> 1 | | <input type="text"/> 2 | | <input type="text"/> 3 | | <input type="text"/> 4 | | <input type="text"/> 5 | | <input type="text"/> 6 | | <input type="text"/> 7 | | <input type="text"/> 8 | | <input type="text"/> 9 | | <input type="text"/> 10 |

Dans le plan Oxy , on considère le domaine D délimité par la droite $d : y = x - 1$ et les courbes Γ_1 et Γ_2 définies par

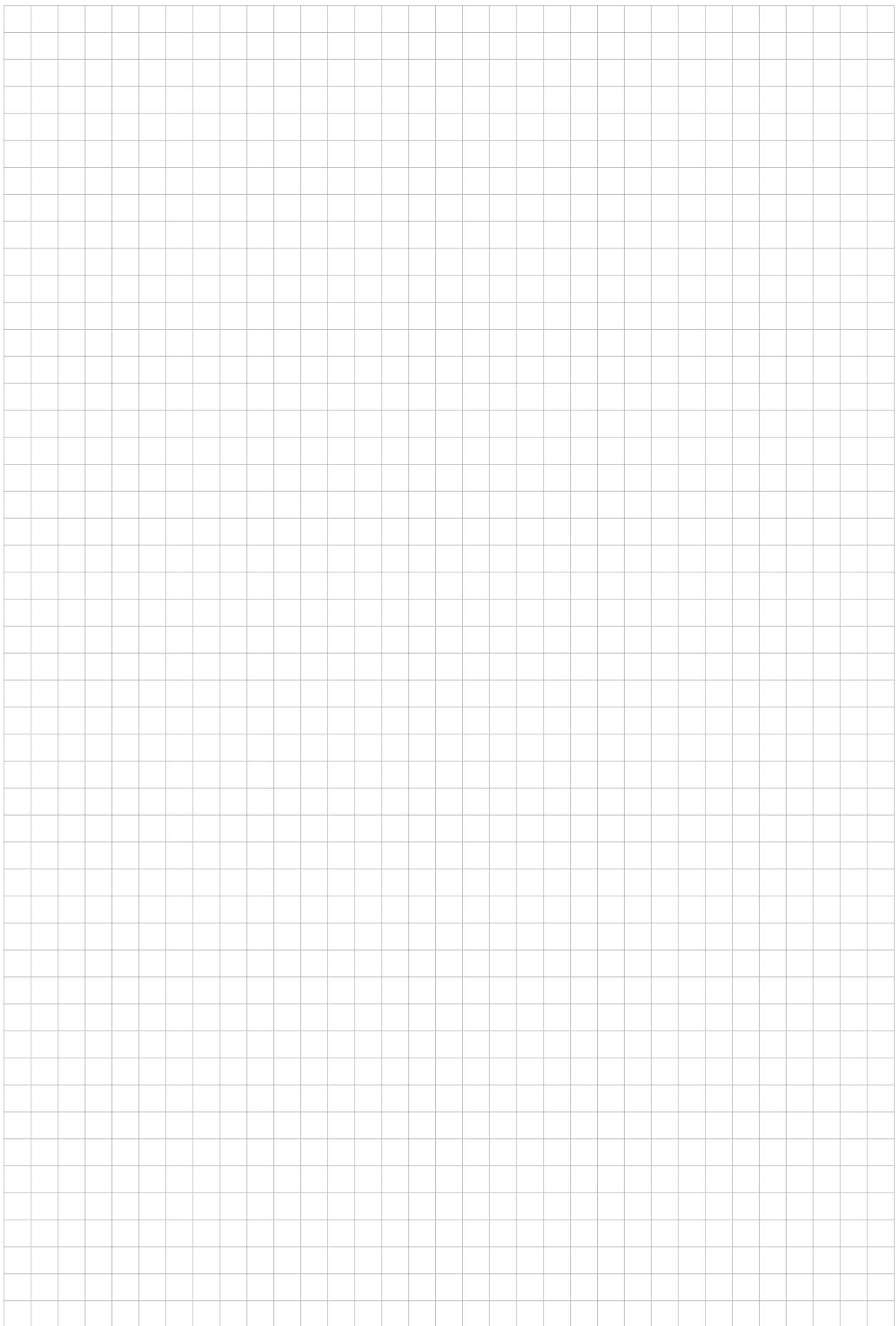
$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_1(t) = \cos(t), \\ y_1(t) = \sin(t), \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x_2(t) = \sqrt{3} \cos(t), \\ y_2(t) = \sin(t), \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

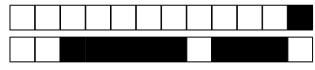
- (a) Faire une esquisse de la situation.
- (b) Calculer l'aire géométrique du domaine D .



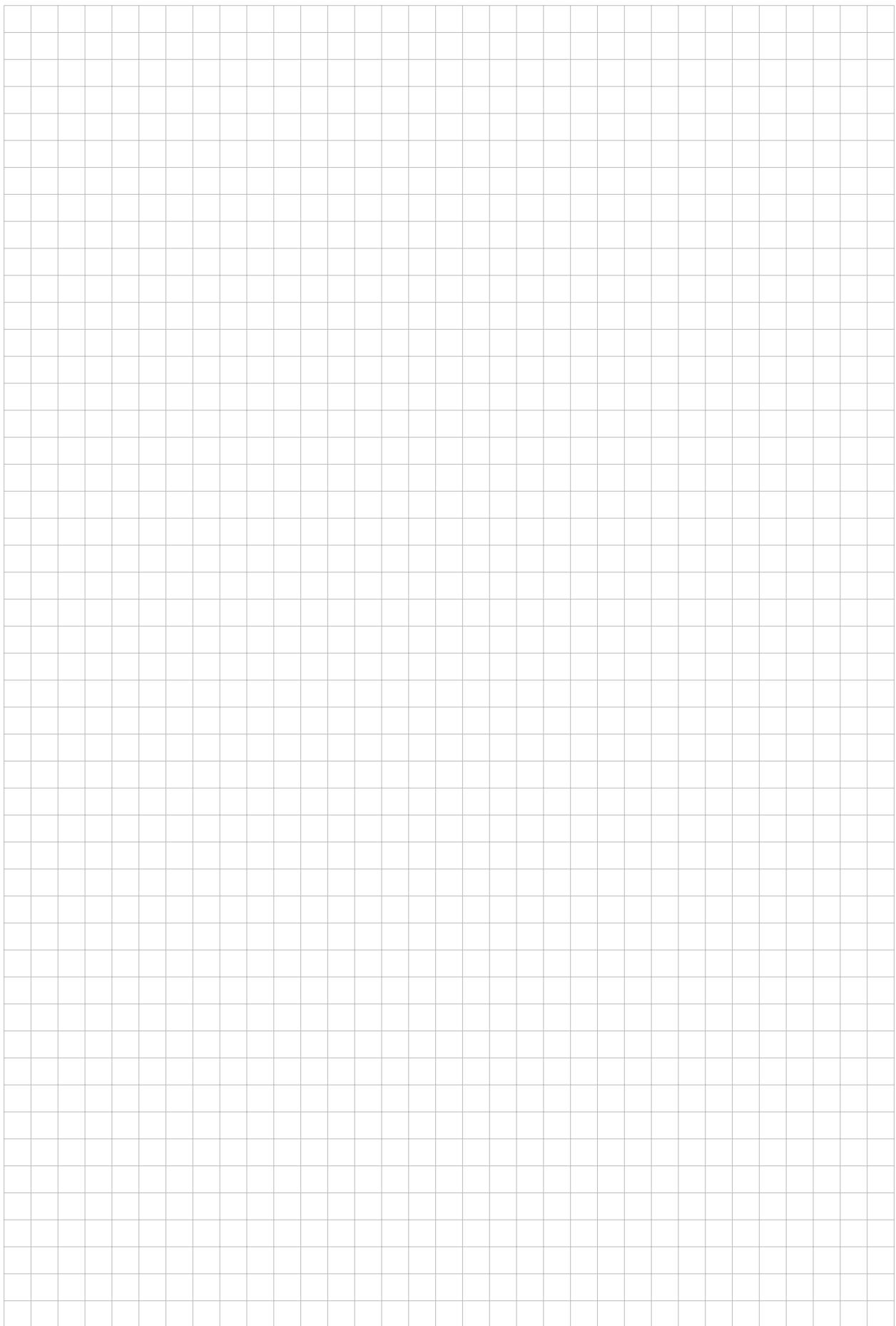


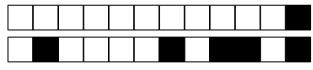
+1/14/47+





+1/15/46+





+1/16/45+

