



Analyse 1 - Contrôle 3 - CMS
10 avril 2025
Durée : 105 minutes

Bulbizarre Herbizarre Florizarre Salamèche Reptincel Dracaufeu Carapuce Carabaffe Tortank













SCIPER : **999999**

Signature

☐ Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, signez la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé. L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
les points indiqués si la réponse est correcte,
0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire. Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie). Les brouillons ne seront pas ramassés.

| Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien | | |
|---|---|---|
| choisir une réponse select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren |
|    |  |   |
| ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte | | |
|       | | |



Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \tan x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bisection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---------------------------|---------------------------|-----------|------------------------|----------------|--------------------------|
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sinh x$ | $\cosh x$ | $\arg \sinh x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\cosh x$ | $\sinh x$ | $\arg \cosh x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\arg \tanh x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| $\operatorname{arccot} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $\coth x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x}$ | $\arg \coth x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |



Première partie, questions à choix unique

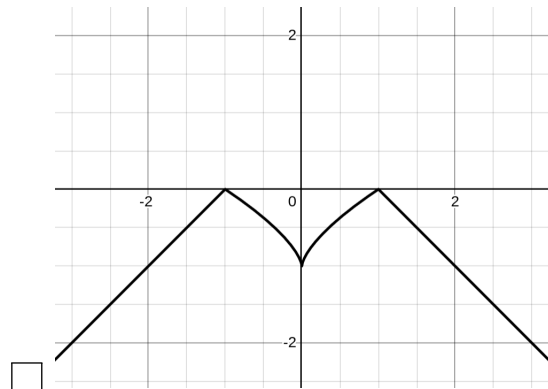
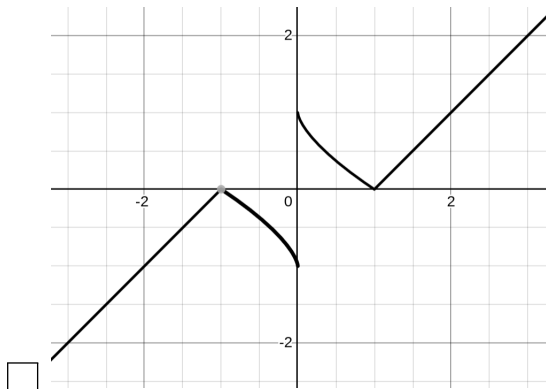
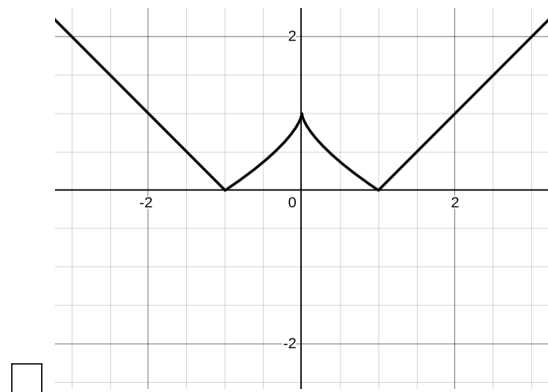
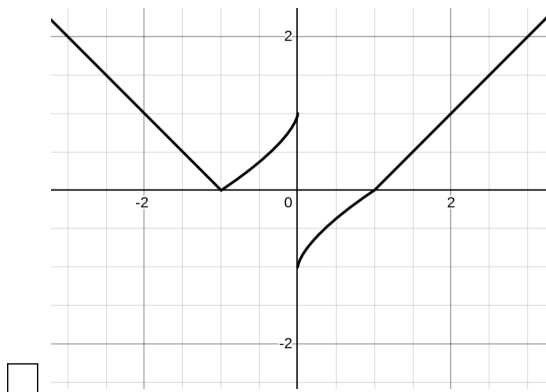
Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)

On considère une fonction f dont le tableau de signes de sa dérivée f' est donné par :

| x | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $f'(x)$ | + | - | - | + | |

Parmi les graphes ci-dessous, choisir celui qui pourrait être le graphe de f .



**Question 2** (2 points)

Calculer la valeur de la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k^4}{n^4}}.$$

☐ 1

☐ $\frac{\pi}{8}$

☐ $\frac{1}{6}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{\pi}{2}$

☐ $\frac{\pi}{4}$

Question 3 (2 points)

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} et périodique de période $T = 2$. On suppose que

- $\int_0^2 f(x) dx = 3$

- Dans le plan Oxy , restreint à l'intervalle $[0, 2]$, le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale $x = 1$.

Donner la valeur de l'intégrale définie

$$I = \int_5^{10} f(x) dx.$$

☐ $I = \frac{9}{2}$

☐ $I = \frac{7}{2}$

☐ $I = 8$

☐ $I = 9$

☐ $I = \frac{15}{2}$

☐ $I = 5$

Question 4 (2 points)

Donner la valeur de l'intégrale définie

$$I = \int_0^2 x^2 \sqrt{1 + x^3} dx.$$

☐ $I = 26$

☐ $I = 2\sqrt{3}$

☐ $I = 6$

☐ $I = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

☐ $I = \frac{26}{9}$

☐ $I = \frac{52}{9}$



Deuxième partie, questions à réponses courtes

Pour chaque question, écrire seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Question 5: Cette question est notée sur 4 points.

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|----------------------|---|---|
| <input type="text"/> | . | 5 | <input type="text"/> | . | 5 | <input type="text"/> | . | 5 | <input type="text"/> | . | 5 |
| <input type="text"/> | 0 | <input type="text"/> | 1 | <input type="text"/> | 2 | <input type="text"/> | 3 | <input type="text"/> | 4 | | |

- (a) (1 point) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie et continue sur \mathbb{R} , qui admet au point $(0, 0)$ de son graphe un point anguleux qui n'est pas un extremum local.

- (b) (1 point) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un voisinage de $x = 0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x = 0$, telle que $f'(x) < 0$ si $x < 0$ et $f'(x) > 0$ si $x > 0$, mais telle que $f(0)$ n'est pas un minimum local de f .

- (c) (1 point) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} dont la dérivée satisfait que

$$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{1}{(x-3)(x^2 + (2-a)x - 2a)}.$$

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, f admet-elle au point $(3, f(3))$ de son graphe un point à tangente verticale qui n'est pas un point de rebroussement ?

- (d) (1 point) Dans le plan Oxy , on considère la courbe paramétrée définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(5t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donner la période de la courbe Γ et sa symétrie dans le plan Oxy .



Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

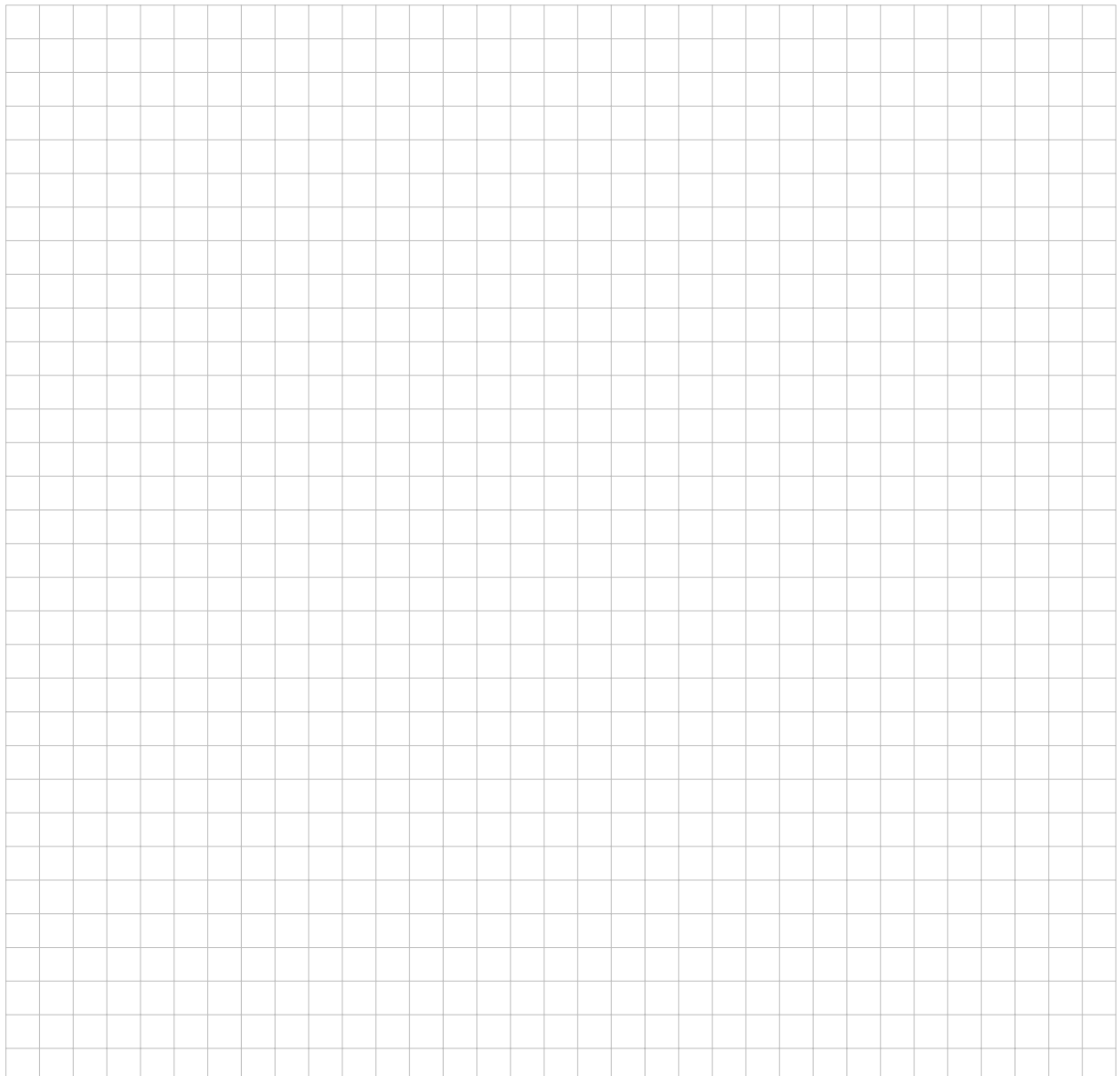
Question 6: Cette question est notée sur 3 points.

| | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> | .5 | <input type="checkbox"/> | .5 | <input type="checkbox"/> | .5 |
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | | |

On considère la fonction $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + x^2.$$

Pour quelle valeur de $x \in [-1, 0]$, la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$ est-elle minimale ?







Question 7: Cette question est notée sur 5 points.

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|---|
| <input type="text"/> | . | <input type="text"/> | . | <input type="text"/> | . | <input type="text"/> | . | <input type="text"/> | . | <input type="text"/> | |
| <input type="text"/> | 0 | <input type="text"/> | 1 | <input type="text"/> | 2 | <input type="text"/> | 3 | <input type="text"/> | 4 | <input type="text"/> | 5 |

En justifiant rigoureusement vos calculs, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)}$$

où

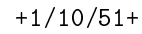
$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\ln(2 + \tanh(x))}.$$





+1/9/52+





| | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|--|
| | | | | | | |
| | .5 | .5 | .5 | .5 | .5 | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |

$$f(x) = x \left(\frac{\sqrt{|x^2 + 2x|}}{x^2} - e^x - 1 \right).$$







Question 9: Cette question est notée sur 5 points.

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|----|----------------------|---|
| <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | <input type="text"/> | .5 | | |
| <input type="text"/> | 0 | <input type="text"/> | 1 | <input type="text"/> | 2 | <input type="text"/> | 3 | <input type="text"/> | 4 | <input type="text"/> | 5 |

Dans le plan Oxy , on considère la courbe paramétrée Γ définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 + \frac{|t-1|^3}{1+4t^2} \\ y(t) = 1 - \frac{(t-1)^3}{1+4t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{4} \right\}.$$

- Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de Γ et la pente des tangentes (ou des demi-tangentes) à Γ en ce(s) point(s).
- Etudier les variations locales de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage des points trouvés en (a). Résumer le(s) situation(s) dans des tableaux contenant le signe de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ et les variations locales de $x(t)$ et $y(t)$.
- Faire l'esquisse locale de la courbe au voisinage des points trouvés en (a). Représenter les tangentes (ou les demi-tangentes) sur le dessin. Indiquer par des flèches le sens de parcours de la courbe.

