EPFL

1

Analyse 1 - Contrôle 3 - CMS
10 avril 2025
Durée : 105 minutes

Bulbizarre Herbizarre Florizarre Salamèche Reptincel Dracaufeu Carapuce Carabaffe Tortank

SCIPER : **999999**

Signature

Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte CAMIPRO sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page. Au démarrage de l'épreuve, signez la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé. L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire. Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie). Les brouillons ne seront pas ramassés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte		

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

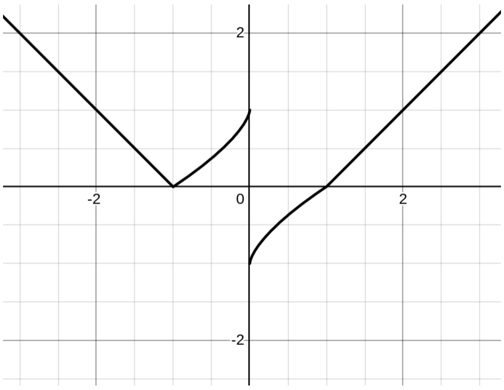
Première partie, questions à choix unique

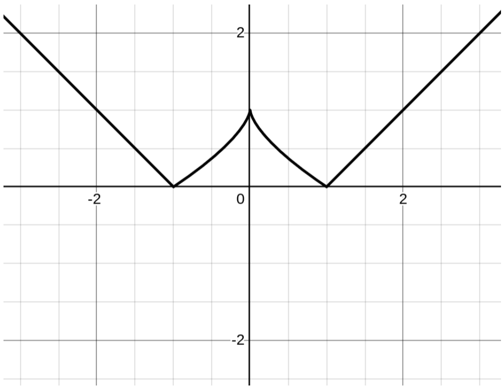
Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

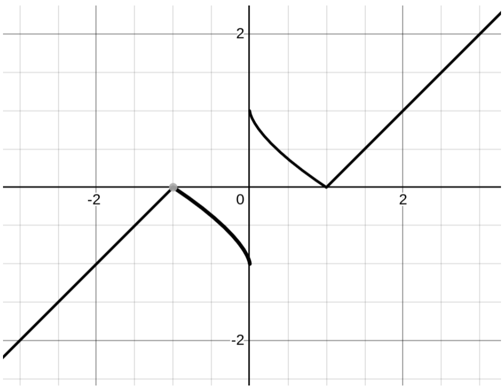
Question 1 (2 points)
On considère une fonction f dont le tableau de signes de sa dérivée f' est donné par :

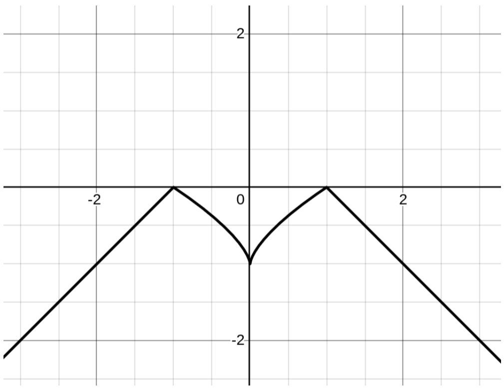
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	‖	$+$	

Parmi les graphes ci-dessous, choisir celui qui pourrait être le graphe de f.

☐ 

☐ 

■ 

☐ 

Correction :

Question 2 (2 points)
Calculer la valeur de la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k^4}{n^4}}.$$

- [ ] 1
- [x] $\frac{\pi}{8}$
- [ ] $\frac{1}{6}$
- [ ] $\frac{1}{3}$
- [ ] $\frac{\pi}{2}$
- [ ] $\frac{\pi}{4}$

Correction : On reconnait des sommes de Riemann associées à l'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$ *et une partition régulière de taille* $\frac{1}{n}$ *de l'intervalle* $[0,1]$. *La fonction étant continue sur* $[0,1]$, *les sommes de Riemann convergent alors vers l'intégrale. Or* $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2)|_0^1 = \frac{\pi}{8}$.

Question 3 (2 points)
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = 2$. On suppose que

- $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = 3$
- Dans le plan Oxy, restreint à l'intervalle $[0,2]$, le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale $x = 1$.

Donner la valeur de l'intégrale définie

$$I = \int_5^{10} f(x)dx.$$

- [ ] $I = \frac{9}{2}$
- [ ] $I = \frac{7}{2}$
- [ ] $I = 8$
- [ ] $I = 9$
- [x] $I = \frac{15}{2}$
- [ ] $I = 5$

Correction : La fonction étant périodique, on a $\int_5^{10} f(x)dx = \int_3^8 f(x)dx = \int_1^6 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + 2\int_0^2 f(x)dx$. *Comme le graphe est symétrique par rapport à* $x = 1$, *on a* $\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2}$. *D'où* $\int_5^{10} f(x)dx = \frac{3}{2} + 6$.

Question 4 (2 points)
Donner la valeur de l'intégrale définie

$$I = \int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}dx.$$

- [ ] $I = 26$
- [ ] $I = 2\sqrt{3}$
- [ ] $I = 6$
- [ ] $I = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
- [ ] $I = \frac{26}{9}$
- [x] $I = \frac{52}{9}$

Correction : Une primitive est donnée par $\frac{2}{9}\left(\sqrt{1+x^3}\right)^3$.

Deuxième partie, questions à réponses courtes

Pour chaque question, écrire seulement la réponse finale dans l'espace prévu.

Question 5: *Cette question est notée sur 4 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4

(a) (1 point) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$, qui admet au point $(0,0)$ de son graphe un point anguleux qui n'est pas un extremum local.

(b) (1 point) Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie sur un voisinage de $x = 0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x = 0$, telle que $f'(x) < 0$ si $x < 0$ et $f'(x) > 0$ si $x > 0$, mais telle que $f(0)$ n'est pas un minimum local de f.

(c) (1 point) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée satisfait que

$$\lim_{x \to 3^\pm} f'(x) = \lim_{x \to 3^\pm} \frac{1}{(x-3)(x^2 + (2-a)x - 2a)}.$$

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, f admet-elle au point $(3, f(3))$ de son graphe un point à tangente verticale qui n'est pas un point de rebroussement ?

(d) (1 point) Dans le plan Oxy, on considère la courbe paramétrée définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(5t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donner la période de la courbe Γ et sa symétrie dans le plan Oxy.

Solution

(a) Par exemple, $f(x) = x, x < 0$ et $f(x) = x^2, x \geq 0$.

(b) Par exemple, $f(x) = x^2, x \neq 0, f(0) = 2$.

(c) $a = 3$

(d) $T = 2\pi$, Γ a une symétrie d'axe Oy ($x(t)$ impaire, $y(t)$ paire).

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

Question 6: *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

On considère la fonction $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 + x^2.$$

Pour quelle valeur de $x \in [-1, 0]$, la pente de la tangente au graphe de f au point $(x, f(x))$ est-elle minimale ?

Solution

La pente de la tangente est donnée par la dérivée de la fonction f : $f'(x) = 3x^2 + 2x$. Pour déterminer quand est-ce que f' est minimale, on étudie ses variations en calculant sa dérivée, à savoir $f''(x) = 6x + 2$. On a alors le tableau de signe suivant :

x	-1		$-\frac{1}{3}$		0
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La pente est donc minimale en $x = -\frac{1}{3}$.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

En justifiant rigoureusement vos calculs, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} e^{f(x)}$$

où

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\ln(2+\tanh(x))}.$$

Solution

Par continuité de l'exponentielle, on a que

$$\lim_{x\to-\infty} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}.$$

Dès lors, il suffit de calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Or on a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\ln(2+\tanh(x))} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{BH} \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\frac{\pi}{x^2}}{\frac{1}{2+\tanh(x)}\frac{1}{\cosh^2(x)}} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{-\pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\to-\pi}\cdot\underbrace{(2+\tanh(x))}_{\to1}\cdot\frac{\cosh^2(x)}{x^2}.$$

Seul le troisième facteur est une indétermination (de type $\frac{\infty}{\infty}$), on applique donc BH à nouveau.
On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cosh^2(x)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \underbrace{=}_{BH} \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cosh(x)\sinh(x)}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sinh(2x)}{2x}$$
$$= \frac{\infty}{\infty} \underbrace{=}_{BH} \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cosh(2x)}{2} = +\infty.$$

Par conséquent, on remettant tout ensemble, on trouve que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi\cdot+\infty = -\infty$$

et donc

$$\lim_{x\to-\infty} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)} = 0.$$

Question 8: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = x\left(\frac{\sqrt{|x^2+2x|}}{x^2} - e^x - 1\right).$$

Etudier les branches infinies du graphe de f.

Solution

Il faut étudier les limites de $f(x)$ aux frontières de son domaine de définition. On commence par manipuler l'expression pour la rendre plus agréable à calculer :

$$f(x) = \frac{|x|\sqrt{|1+\frac{2}{x}|}}{x} - xe^x - x = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\left|1+\frac{2}{x}\right|} - xe^x - x.$$

- $x \to -\infty$: on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\left|1+\frac{2}{x}\right|}}_{\to -1} - \underbrace{xe^x}_{\to 0} - \underbrace{x}_{\to-\infty} = +\infty$
- $x \to +\infty$: on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\left|1+\frac{2}{x}\right|}}_{\to 1} - \underbrace{xe^x}_{\to+\infty} - \underbrace{x}_{\to+\infty} = -\infty$
- $x \to 0$: on a $\lim_{x\to0^\pm} f(x) = \lim_{x\to0^\pm} \underbrace{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{\left|1+\frac{2}{x}\right|}}_{\to\pm\infty} - \underbrace{xe^x}_{\to 0} - \underbrace{x}_{\to 0} = \pm\infty.$

On a donc une asymptote verticale en $x = 0$.
Pour déterminer la nature asymptotique en $x \to \pm\infty$, on a étudie la limite du rapport $\frac{f(x)}{x}$. On a alors

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{|x^2+2x|}}{x^2}}_{\to 0} - \underbrace{e^x}_{\to+\infty} -1 = -\infty$. Le graphe de f admet donc une branche parabolique verticale quand $x \to +\infty$.
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{|x^2+2x|}}{x^2}}_{\to 0} - \underbrace{e^x}_{\to 0} -1 = -1$

On recherche une éventuelle asymptotique oblique quand $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-1)\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\left|1+\frac{2}{x}\right|} - xe^x = -1 + 0 = -1.$$

Le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -x - 1$ quand $x \to -\infty$.

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

■0 □.5 □1 □.5 □2 □.5 □3 □.5 □4 □.5 □5

Dans le plan Oxy, on considère la courbe paramétrée Γ définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{|t-1|^3}{1+4t^2} \\ y(t) = 1 - \dfrac{(t-1)^3}{1+4t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}.$$

(a) Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s) de Γ et la pente des tangentes (ou des demi-tangentes) à Γ en ce(s) point(s).

(b) Etudier les variations locales de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage des points trouvés en (a). Résumer le(s) situation(s) dans des tableaux contenant le signe de $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ et les variations locales de $x(t)$ et $y(t)$.

(c) Faire l'esquisse locale de la courbe au voisinage des points trouvés en (a). Représenter les tangentes (ou les demi-tangentes) sur le dessin. Indiquer par des flèches le sens de parcours de la courbe.

Solution

(a) Pour calculer $\dot{x}(t)$, on récrit $x(t)$ comme

$$x(t) = \begin{cases} 2 + \frac{(t-1)^3}{1+4t^2}, t \geq 1 \\ 2 + \frac{(1-t)^3}{1+4t^2}, t < 1 \end{cases}$$

On trouve donc que pour $t \neq 1$, on a

$$\dot{x}(t) = \operatorname{sgn}(t-1)\frac{(t-1)^2(4t^2+8t+3)}{(1+4t^2)^2}.$$

Pour calculer, $\dot{x}(1)$, on passe par les limites. On a :

$$\dot{x}(1) = \lim_{t\to 1} \dot{x}(t) = 0.$$

Finalement,on peut déterminer que $\dot{x}(t) = 0 \iff t = 1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$.

Pour $\dot{y}(t)$,on a

$$\dot{y}(t) = -\frac{(t-1)^2(8t+7)}{(1+4t)^2}.$$

D'où $\dot{y}(t) = 0 \iff t = 1, -\frac{7}{8}$.

Il n'y a donc qu'un seul point stationnaire en $t = 1$ dont les coordonnées sont $P(2,1)$. La pente des demi-tangentes à Γ en $(2,1)$ sont données par

$$m_\pm = \lim_{t\to 1^\pm} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \mp 1.$$

(b) On étudie les variations de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de $t = 1$.

t			1		
$\dot{x}(t)$		$-$	0	$+$	
$x(t)$			2		

t			1		
$\dot{y}(t)$		$-$	0	$-$	
$y(t)$			1		

(c)