

Série 24

1. Calculer la longueur des arcs définis ci-dessous :

$$\text{a) } y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad \text{c) } y = \ln[\cos(x)], \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right],$$

$$\text{b) } y = \ln(1 - x^2), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \text{d) } y = \arcsin(e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq a.$$

2. Calculer la longueur des arcs définis paramétriquement ci-dessous :

$$\text{a) } \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\text{b) } \begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t) \\ y(t) = -2 \sin t - \sin(2t) \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$

3. Déterminer l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe d'équation $y = f(x)$ autour de l'axe d dans les deux cas suivants :

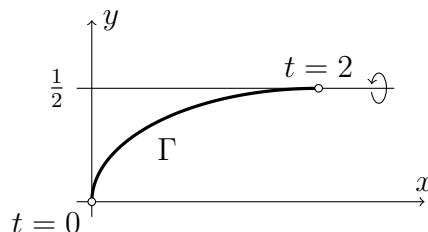
$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{3} x^3, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad d = (Ox),$$

$$\text{b) } f(x) = \cosh(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad d = (Oy).$$

4. Calculer l'aire d'une sphère de rayon r .

5. On considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4 + t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{4 + t^2} \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$



a) Calculer la longueur de l'arc Γ .

b) Calculer l'aire de la surface de révolution obtenue par rotation de l'arc Γ autour de l'axe horizontal $y = \frac{1}{2}$.

6. On considère l'arc de courbe Γ défini par

$$y = \sinh^2(x), \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

- a) Calculer la longueur de l'arc Γ .
- b) Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc Γ autour de l'axe vertical d'équation $x = \arg \sinh(1)$.

Donner les résultats sous leur forme la plus simple.

Réponses de la série 24

- 1. a) $L = a \left[\sinh\left(\frac{\beta}{a}\right) - \sinh\left(\frac{\alpha}{a}\right) \right],$ c) $L = \ln(3),$
b) $L = -1 + 2 \ln(3),$ d) $L = \arg \cosh(e^a).$
 - 2. a) $L = 2 + \sqrt{2} \arg \sinh(1),$ b) $L = 16.$
 - 3. a) $A = \frac{\pi}{9} (2\sqrt{2} - 1),$ b) $A = 2\pi \left[\sinh(1) - \cosh(1) + 1 \right].$
 - 4. $A = 4\pi r^2.$
 - 5. a) $L = \frac{\pi}{4},$ b) $A = \frac{\pi}{4} (\pi - 2).$
 - 6. a) $s = \sqrt{2},$ b) $A = \pi.$
-