Série 23

1. On considère le domaine D du plan limité par la courbe d'équation $y = 4 - x^2$ et par les droites d'équation $y = 4$ et $x = 2$.

Calculer le volume du corps engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe d'équation $x = 2$.

2. Déterminer le volume engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) du domaine fini limité par les courbes d'équation $y = x^3$ et $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geq 0)$.

3. Dans le plan (Oxy), on considère le domaine fini D limité par la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{2x}$, l'axe (Ox) et la droite verticale d'équation $x = 4$.

Calculer le volume du corps obtenu par la rotation du domaine D autour de la droite verticale d'équation $x = 4$.

4. Dans le plan (Oxy), on considère le domaine fini D limité par la courbe d'équation $y = 4 - x^2$, $(x \geq 0)$, l'axe (Ox) et l'axe (Oy).

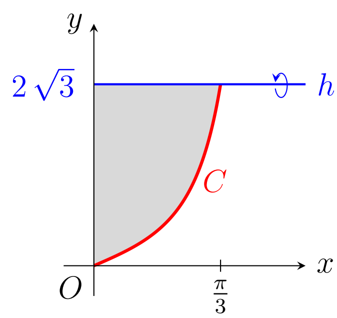
a) Calculer le volume V_a du corps obtenu par la rotation du domaine D autour de l'axe (Oy).

b) Calculer le volume V_b du corps obtenu par la rotation du domaine D autour de la droite horizontale d'équation $y = 4$.

5. Soit D le domaine du plan limité par la courbe C, l'axe Oy et la droite horizontale h d'équation $y = 2\sqrt{3}$.

$$C: \quad y = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}, \qquad x \in [\,0\,,\,\tfrac{\pi}{3}\,].$$

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe h.

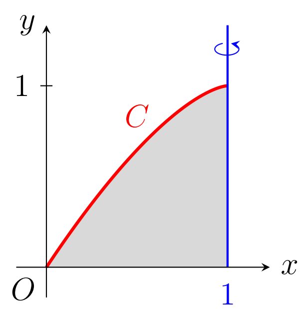


6. Vérifier que le volume d'une sphère de rayon r est égale à $\frac{4}{3}\pi r^3$.

7. Soit D le domaine du plan limité par la courbe C, l'axe Ox et la droite verticale d'équation $x = 1$.

$$C: \begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = 1 - \cos^3(t) \end{cases} \qquad t \in [\,0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,].$$

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe d'équation $x = 1$.



8. Dans l'espace muni d'un système d'axes cartésien $(Oxyz)$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à (Oy) sont des triangles ABC définis ainsi : A est sur l'axe (Oy), B est sur la droite d'équations $x = y = z$ et C, dans le plan (Oxy), appartient à l'arc Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1 .$$

Calculer le volume du corps ainsi défini.

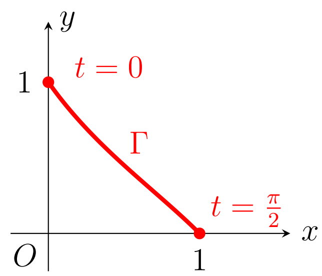
9. Soit γ la courbe de l'espace définie par $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

On considère le corps engendré par des disques horizontaux dont les centres sont sur γ et dont les cercles frontières coupent l'axe Oz.

Calculer, pour $z \geq 0$, le volume de ce corps sachant que le rayon des disques varie entre 0 et $\sqrt{2}$.

10. Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des carrés $ABCD$ tels que A est sur l'axe Oy et B, dans le plan Oxy, appartient à l'arc Γ, $(z_C\,, z_D > 0)$.

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{1 - \cos(t)} \\ y(t) = \dfrac{\cos(t)}{1 + \sin(t)} \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [\,0\,, \tfrac{\pi}{2}\,] .$$



Calculer le volume V de ce corps.

Réponses de la série 23

1. $V = \dfrac{8\pi}{3}$

2. $V = \dfrac{16\pi}{35}$

3. $V = \dfrac{144\pi}{7}$

4. $V_a = 8\pi$, $\quad V_b = \dfrac{128\pi}{5}$

5. $V = 4\pi^2 - 3\pi\sqrt{3}$

7. $V = \dfrac{3\pi}{7}$

8. $V = \dfrac{3}{10}$

9. $V = \dfrac{36\pi}{35}$

10. $V = 1 - \ln(2)$
