

Série 21

1. Décomposer, si nécessaire, les fractions rationnelles suivantes en éléments simples ; puis chercher les primitives des fonctions ainsi définies.

a) $a(x) = \frac{1-x}{5+4x+x^2}$,

d) $d(x) = \frac{x^6+1}{(x^2+1)^2}$,

b) $b(x) = \frac{2x+5}{4x^2-12x+9}$,

e) $e(x) = \frac{4x^3+2x+2}{4x^4+1}$.

c) $c(x) = \frac{3x^2+1}{(x^2+x)(x^2+1)}$,

2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5}{x^2} \cdot \ln(x^3 - 2x^2 + 5x), \quad x > 0.$$

3. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$,

c) $c(x) = \frac{10 \tan x}{3 \cos x - 2 \sin^2 x}$,

b) $b(x) = \frac{4}{\cos^3 x}$,

d) $d(x) = \frac{1}{1 + \sin x + 2 \cos x}$.

4. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{5}{x^2 + 2x\sqrt{x} + 10x}$, $x > 0$,

b) $g(x) = \frac{1 + \tanh(x)}{4 + \tanh^2(x)}$.

Réponses de la série 21

1. a) $\int \frac{1-x}{5+4x+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(5+4x+x^2) + 3 \arctan(x+2) + C,$
- b) $\int \frac{2x+5}{4x^2-12x+9} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| - \frac{4}{2x-3} + C,$
- c) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2+x)(x^2+1)} dx = \ln|x| - 2 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + C,$
- d) $\int \frac{x^6+1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{3} x^3 - 2x + 3 \arctan x + C,$
- e) $\int \frac{4x^3+2x+2}{4x^4+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x^2+2x+1) + \arctan(2x-1) + C.$

2. $\int f(x) dx = -\frac{5}{x} \cdot \ln(x^3-2x^2+5x) - 2 \ln(x) - \frac{5}{x} + \ln(x^2-2x+5) + 4 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

3. a) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C.$
- b) $\int \frac{4 dx}{\cos^3 x} = \ln \left[\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right] + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} + C.$
- c) $\int \frac{10 \tan x}{3 \cos x - 2 \sin^2 x} dx = 5 \ln|\cos x| - 4 \ln|2 \cos x - 1| - \ln(\cos x + 2) + C.$
- d) $\int \frac{dx}{1+\sin x+2 \cos x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-3} \right| + C.$

4. a) $\int g(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x+10}} \right) - \frac{1}{3} \arctan \left(\frac{1+\sqrt{x}}{3} \right) + C.$
- b) $\int g(x) dx = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{4+\tanh^2(x)}{[1-\tanh(x)]^2} \right) + \frac{1}{10} \arctan \left[\frac{\tanh(x)}{2} \right] + C.$
-