Série 18

1. Soient $0 < a < b < c$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^*$, $h_2 \neq h_1$, et soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a\,, \\ h_1 & \text{si } a < x \leq b\,, \\ h_2 & \text{si } b < x < c\,, \\ 0 & \text{si } x \geq c\,. \end{cases}$$

a) Calculer la fonction-aire associée à f : $A(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ $(x \geq 0)$, et montrer qu'elle est continue sur $[0, \infty[$.

b) Déterminer l'ensemble des points où A est dérivable, noté $D_{A'}$, et montrer que

$$A'(x) = f(x)\,, \quad \forall x \in D_{A'}\,.$$

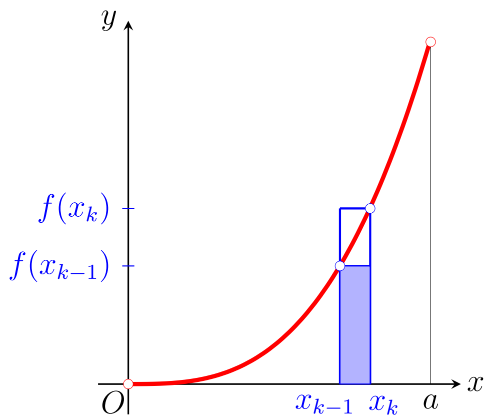
c) Esquisser f et A dans le cas où $a = 1,\ b = 2,\ c = 6,\ h_1 = 2,\ h_2 = -1$.

2. Soit P_n une partition en n intervalles de même longueur de l'intervalle $[\,0\,,\,a\,]$, $a > 0$.
Calculer les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f(x) = x^3$, associées à cette partition.

Montrer que ces deux sommes convergent vers la même valeur lorsque n tend vers l'infini.

Indication :

Utiliser le résultat : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$.
Puis le démontrer par récurrence.



3. On donne la relation suivante : $$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos\left[(n+1)\,x\right]}{2\,(1 - \cos x)}\,.$$

a) Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ en déterminant les deux sommes de Darboux sur une partition régulière de l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ et en vérifiant qu'elles convergent vers la même valeur.

b) Démontrer par récurrence, la relation donnée.

4. Exercice facultatif

A faire une fois les nombres complexes vus en analyse 2

Démontrer la relation donnée dans l'exercice 3 :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos\left[(n+1)\,x\right]}{2\,(1-\cos x)}\,,$$

en utilisant dans $\mathbb{C}$ la relation : $e^{ix} = \cos(x) + i\,\sin(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$

5. Calculer, si elle existe, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right).$

6. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $\displaystyle A(x) = \int_2^{2x} \frac{dt}{\operatorname{arg\,cosh} t}\,,\quad x > 1\,;$ b) $\displaystyle B(x) = \int_{\arcsin x}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt\,,\quad 0 < x < 1\,.$

7. Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt}{x^6}\,.$$

8. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\,dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Indications : utiliser les trois règles suivantes vues au cours

(*i*) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

(iii) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x).$

Réponses de la série 18

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a^4}{4}$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$.

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} \sin(x)dx$.

6. $A'(x) = \dfrac{2}{\arg\cosh(2x)}$, $B'(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \dfrac{x}{\arcsin x}$.

7. La limite vaut $\dfrac{1}{3}$.

8. Le maximum de f est atteint en $x = 4$.