Série 16

1. Pour chacune des courbes définies ci-dessous, rechercher les éléments de symétrie déductibles de la parité des fonctions coordonnées.

a) $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(t) = \frac{2\,t^2\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \\ y(t) = \frac{4\,t^3}{(t^2+1)^2} \end{cases}$

2. Soit Γ la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = t^2 - t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}\,.$

Calculer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe Γ passant par le point $P\,(4\,;\,-8) \notin \Gamma\,.$

3. On considère la courbe Γ décrite ci-dessous paramétriquement :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2t-3}} \\ y(t) = \dfrac{2}{\sqrt{2t-3}}\,. \end{cases}$$

Déterminer les équations cartésiennes des normales à Γ passant par l'origine.

4. Pour les courbes paramétrées suivantes, déterminer :

a) le point stationnaire et la tangente en ce point :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1-2t} \\ y(t) = \frac{t^3}{1-2t} \end{cases}$$

b) les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{4}{t-1} \\ y(t) = 2t^2 - \frac{16}{t-1} \end{cases}$$

5. Déterminer les paramètres réels a et b pour que la droite d : $9x + 3y + 4 = 0$ soit une asymptote oblique de la courbe Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{(t-a)\,(t-b)} \\ y(t) = \frac{t^2}{t-b} \end{cases}$$

6. On considère dans le plan, la courbe Γ définie par $\Gamma: \begin{cases} x(t) = \frac{2t^3}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^4}{t^2-1} \end{cases}$

a) Etudier les branches infinies de la courbe Γ.

b) Déterminer le point stationnaire de Γ et sa tangente.
Faire l'esquisse locale de la courbe Γ au voisinage de ce point.
En quoi ce point est-il remarquable ?

7. On considère dans le plan la courbe paramétrée Γ définie par

$$\Gamma: \quad \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t^2 + a\,t - \frac{1}{t^2} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, la courbe paramétrée Γ possède-t-elle un point stationnaire ?

Déterminer alors l'équation cartésienne de la tangente en ce point.

b) On pose $a = 4$. Etudier les branches infinies de Γ.

Réponses de la série 16

1. a) La courbe est symétrique par rapport à O .

b) La courbe est symétrique par rapport à Oy .

c) La courbe ne possède pas de symétrie déductible de la parité des fonctions coordonnées.

d) La courbe est symétrique par rapport à Ox .

2. Equation de la tangente : $5\,x + 2\,y - 4 = 0\,.$

3. Equation de la normale : $y = \dfrac{x}{2}\,.$

4. a) Point stationnaire $P(0\,;\ 0)$ de tangente $y = 0\,.$

b) Asymptotes obliques $a:\ y = 2x$ et $a':\ y = -4x + 6\,.$
Tangente horizontale en $(-1\,,\ 10)\,.$
Tangente verticale en $(8\,,\ -8)\,.$

5. Deux solutions :

- $a = 5$ et $b = 2\,,$
- $a = 1$ et $b = -2\,.$

6. a) Branches infinies de la courbe Γ .

- Branches paraboliques de direction de pente $m = \frac{1}{2}\,.$
- Asymptote verticale d'équation $x = 1\,.$
- Asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{4}\,(x + 1)\,.$

b) Le point stationnaire de Γ est l'origine ; c'est un point à tangente horizontale.

7. a) Γ admet un point stationnaire si et seulement si $a = 6\,.$

Equation de la tangente à Γ au point stationnaire : $x + y + 6 = 0\,.$

b) La courbe Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote oblique d'équation $y = 2x\,.$