Série 15

1. Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes en $x = x_0$.

a) $a(x) = \dfrac{1 - 3x^2 + 2x^3}{1 - x + \ln x}\,, \quad x_0 = 1$

b) $b(x) = \dfrac{a^x - e^x}{x}\,, \quad x_0 = 0$

c) $c(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\,, \quad x_0 = 0$

d) $d(x) = \dfrac{x}{\ln\left[3x + \cosh(2x)\right]}\,, \quad x \to -\infty$

e) $e(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)\,, \quad x_0 = 0\,,\ x > 0$

f) $f(x) = \Big[\tanh(x)\Big]^{\sinh^2(x)}\,, \quad x \to +\infty$

g) $g(x) = \left[\dfrac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}\,, \quad x_0 = 0$

2. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\ln\left[\,\cosh(x)\,\right]}{x^n}\,, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour quelles valeurs du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction g est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

3. Faire l'étude complète des fonctions données dans l'exercice 4 de la série 13.

a) $a(x) = x + \sqrt{1 - x}\,,$

b) $b(x) = \left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right|\,,$

c) $c(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\,,$

d) $d(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}\,,$

4. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left[\tfrac{x^2}{4\,(x+1)}\right] \quad \text{si} \quad x \neq -1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Faire l'étude complète de la fonction f.

Caractériser les points remarquables et représenter le graphe de f dans un système d'axes cartésien d'unité 2 cm (4 carrés).

Réponses de la série 15

1. a) $\lim\limits_{x\to 1} a(x) = -6$

b) $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = \ln(a) - 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} c(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} c(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} d(x) = -\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} e(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = e^{-\frac{1}{6}}$

2. $n = 1$ ou $n = 2$.

3. a) Au voisinage de $-\infty$, le graphe de la fonction a admet une branche parabolique de direction de pente $m = 1$.

b) Le graphe de la fonction b admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, il admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

c) Aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, le graphe de la fonction c admet des branches paraboliques de direction horizontale.

d) Au voisinage de $\pm\infty$, le graphe de la fonction d admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$.

4.
- Branches infinies :
  - le graphe de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$,
  - le graphe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = +\frac{\pi}{2}$,
- Points remarquables :
  - le point de coordonnées $(-2\,,\,-\frac{\pi}{4})$ est un maximum à tangente horizontale,
  - le point de coordonnées $(-1\,,\,\frac{\pi}{2})$ est un maximum dont la demi-tangente à droite est de pente $m = -4$,
  - le point de coordonnées $(0\,,\,0)$ est un minimum à tangente horizontale.