Points remarquables et extrema

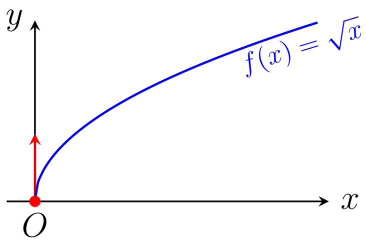
Pour une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, on cherche ses extrema parmi les points appelés "points remarquables".

- Il y a trois catégories de points remarquables (voir ci-dessous).
- On détermine les extrema :
  a) Pour les points remarquables de catégorie 1 : en évaluant et en observant la croissance/décroissance de la fonction.
  b) Pour les points de catégories 2 et 3 : en étudiant le signe de la dérivée.
- On détermine la nature géométrique d'un point remarquable en observant les pentes des tangentes et demi-tangentes (là où il est possible de calculer $f'(x)$ ou sa limite).

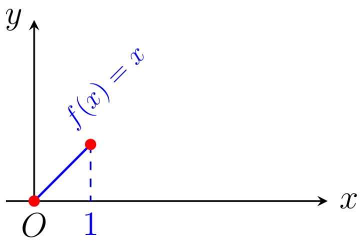
On présente ci-dessous une liste d'exemples (non exhaustive).

- Points remarquables de catégorie 1 -

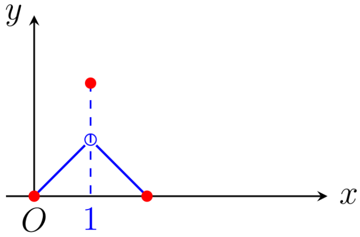
Extrémités du domaine de définition et extrémités du domaine de continuité de f



$D_f = [0, +\infty[$
Minimum en $x = 0$: la fonction est strictement croissante.
(Demi-tangente verticale en $x = 0$)



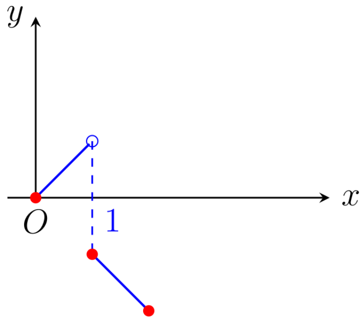
$D_f = [0, 1]$
Minimum en $x = 0$, maximum en $x = 1$: f est strictement croissante.



$f(x) = 1 - |x - 1|, x \neq 1$

$f(1) = 2$

$D_f = [0, 2]$, $D_{\text{continuité}} = [0, 1[\cup]1, 2]$
Minima en $x = 0$ et $x = 2$: maximum en $x = 1$.



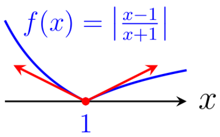
$f(x) = x, x < 1$

$f(x) = -x, x \geq 1$

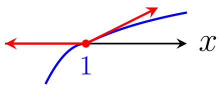
$D_f = [0, 2]$
$D_{\text{continuité}} = [0, 1[\cup]1, 2]$
Minima locaux en $x = 0$ et $x = 2$
aucun extrema en $x = 1$ (quand bien même la dérivée change de signe, la continuité est nécessaire)

- Points remarquables de catégorie 2 -

Points où f est continue, mais non dérivable. Les extrema se trouvent aux "points où la dérivée change de signe".

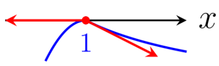


Point anguleux à demi-tangentes (obliques)
$f'(1^+) = \frac{1}{2} \neq f'(1^-) = \frac{-1}{2}$: Extremum (minimum)



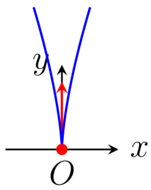
$f(x) = -(x-1)^2, x < 1$
$f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \geq 1$

Point anguleux à demi-tangente oblique et à demi-tangente horizontale :$f'(1^+) = \frac{1}{2} \neq f'(1^-) = 0$.
Pas d'extremum, la dérivée ne change pas de signe.



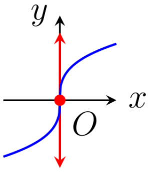
$f(x) = -(x-1)^2, x < 1$
$f(x) = \frac{1-x}{x+1}, x \geq 1$

Point anguleux à demi-tangente oblique et à demi-tangente horizontale :$f'(1^+) = \frac{-1}{2} \neq f'(1^-) = 0$.
Extremum (maximum), la dérivée change de signe.



$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Point de rebroussement (deux demi-tangentes verticales)
$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$: Extremum (minimum)

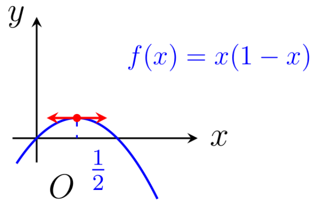


$f(x) = \sqrt[3]{x}$

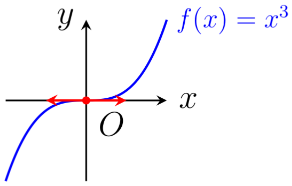
Point à tangente verticale : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$
(Pas d'extremum - la dérivée ne change pas de signe)

- Points remarquables de catégorie 3 -

Points à tangente horizontale. Les extrema se trouvent aux "points où la dérivée change de signe".



Point à tangente horizontale en $x = \frac{1}{2}$
Extremum (maximum).



Point à tangente horizontale en $x = 0$.
(Pas d'extremum - la dérivée ne change pas de signe)