Calcul Intégral

Calcul Intégral

3. Applications géométriques du calcul intégral

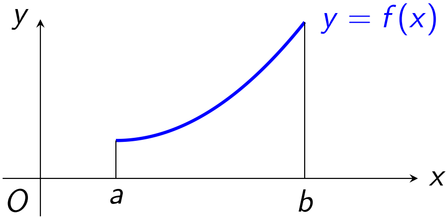
3.4 Surface de révolution

Surface de révolution

Soit f une fonction de classe C^1
sur $[a, b]$.

Surface de révolution

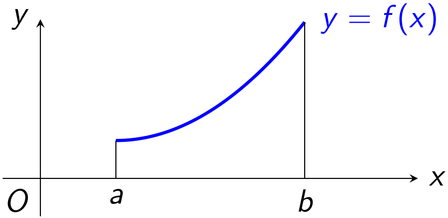
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.



Surface de révolution

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

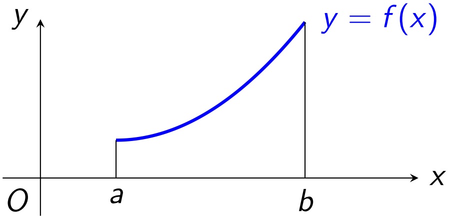
On cherche à calculer l'aire A de la surface de révolution



Surface de révolution

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

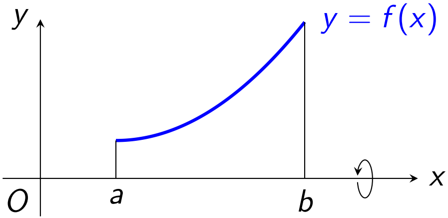
On cherche à calculer l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe de f



Surface de révolution

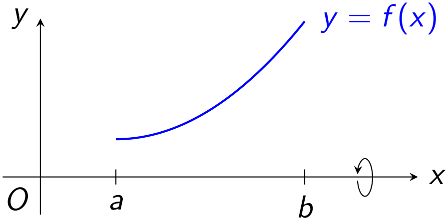
Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

On cherche à calculer l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe de f autour de l'axe Ox.



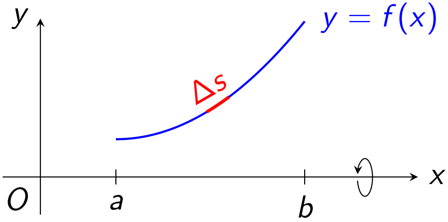
Surface de révolution

En faisant tourner, autour de l'axe Ox ,



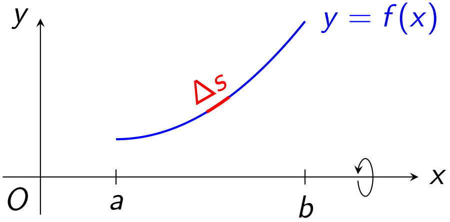
Surface de révolution

En faisant tourner, autour de l'axe Ox , un élément Δs du graphe de f ,



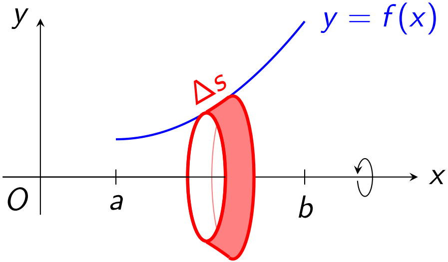
Surface de révolution

En faisant tourner, autour de l'axe Ox, un élément Δs du graphe de f, on obtient un élément de la surface cherchée



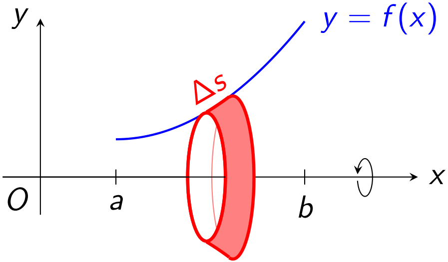
Surface de révolution

En faisant tourner, autour de l'axe Ox, un élément Δs du graphe de f, on obtient un élément de la surface cherchée



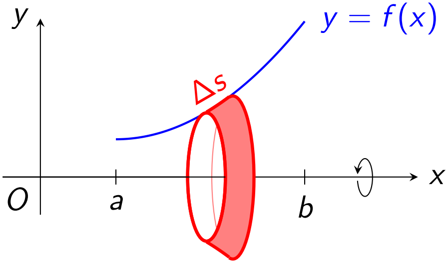
Surface de révolution

En faisant tourner, autour de l'axe Ox, un élément Δs du graphe de f, on obtient un élément de la surface cherchée qui est un tronc de cône de révolution.



Surface de révolution

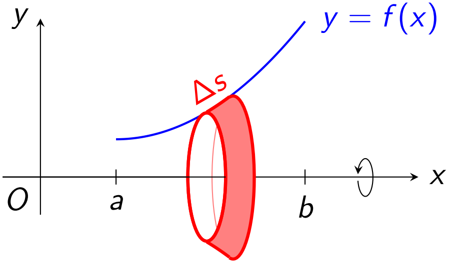
En faisant tourner, autour de l'axe Ox, un élément Δs du graphe de f, on obtient un élément de la surface cherchée qui est un tronc de cône de révolution.



Ouvrons une parenthèse pour calculer l'aire de ce tronc de cône de révolution

Surface de révolution

En faisant tourner, autour de l'axe Ox , un élément Δs du graphe de f , on obtient un élément de la surface cherchée qui est un tronc de cône de révolution.



Ouvrons une parenthèse pour calculer l'aire de ce tronc de cône de révolution en fonction du rayon des cercles de base et de la longueur Δs des génératrices.

Aire latérale du tronc de cône de révolution

On considère le tronc de cône de révolution

Aire latérale du tronc de cône de révolution

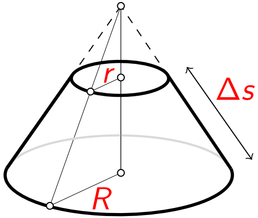
On considère le tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases

Aire latérale du tronc de cône de révolution

On considère le tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur Δs des génératrices.

Aire latérale du tronc de cône de révolution

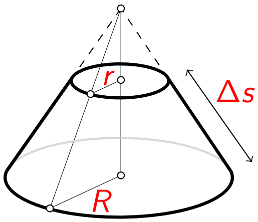
On considère le tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur Δs des génératrices.



Aire latérale du tronc de cône de révolution

On considère le tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur Δs des génératrices.

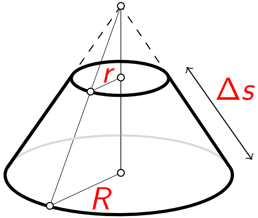
Ce tronc de cône est une surface développable :



Aire latérale du tronc de cône de révolution

On considère le tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur Δs des génératrices.

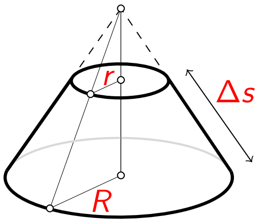
Ce tronc de cône est une surface développable : en le découpant le long d'une génératrice,



Aire latérale du tronc de cône de révolution

On considère le tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur Δs des génératrices.

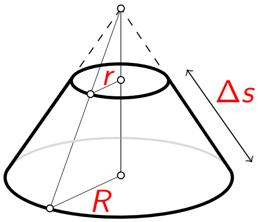
Ce tronc de cône est une surface développable : en le découpant le long d'une génératrice, on obtient un secteur de couronne circulaire.

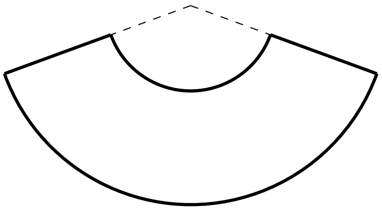


Aire latérale du tronc de cône de révolution

On considère le tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur Δs des génératrices.

Ce tronc de cône est une surface développable : en le découpant le long d'une génératrice, on obtient un secteur de couronne circulaire.





Aire latérale du tronc de cône de révolution

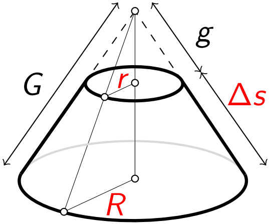
Notons G la longueur des génératrices du grand cône

Aire latérale du tronc de cône de révolution

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.

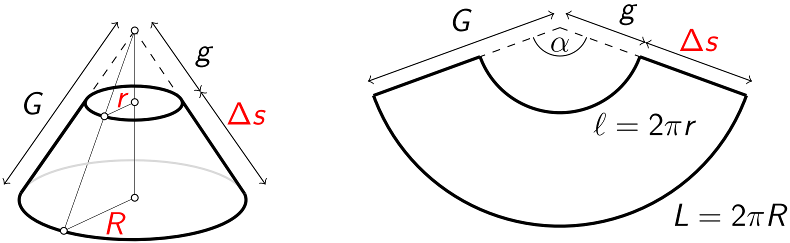
Aire latérale du tronc de cône de révolution

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.



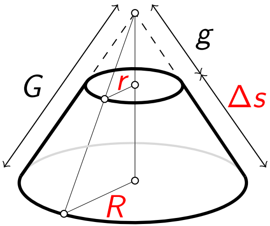
Aire latérale du tronc de cône de révolution

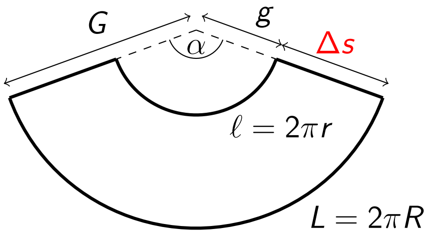
Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.



Aire latérale du tronc de cône de révolution

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.

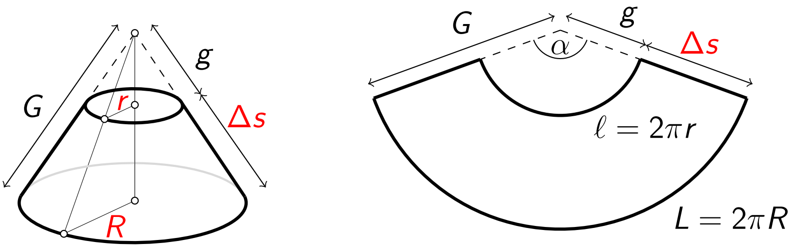




La surface A du tronc de cône

Aire latérale du tronc de cône de révolution

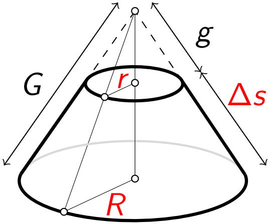
Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.

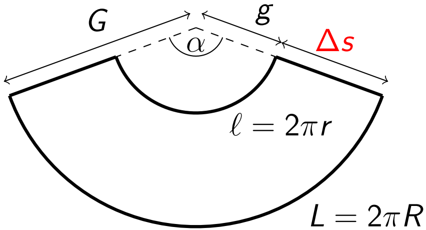


La surface A du tronc de cône s'exprime comme la différence entre le grand secteur circulaire et le petit.

Aire latérale du tronc de cône de révolution

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.

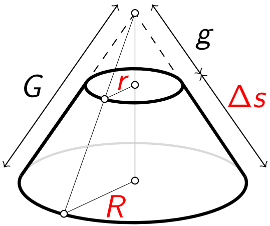


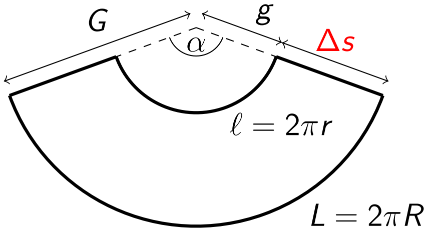


La surface A du tronc de cône s'exprime comme la différence entre le grand secteur circulaire et le petit. Soit α l'angle au centre des secteurs circulaires :

Aire latérale du tronc de cône de révolution

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.





La surface A du tronc de cône s'exprime comme la différence entre le grand secteur circulaire et le petit. Soit α l'angle au centre des secteurs circulaires :

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot G^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot g^2.$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2)$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g)$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot \Delta s\,.$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot \Delta s\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot \Delta s\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des cercles de base :

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot \Delta s\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des cercles de base :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi\, r$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G+g) \cdot (G-g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G+g) \cdot \Delta s\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des cercles de base :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi\, r \qquad \text{et} \qquad L = \alpha \cdot G = 2\pi\, R\,.$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G+g) \cdot (G-g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G+g) \cdot \Delta s\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des cercles de base :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi\, r \qquad \text{et} \qquad L = \alpha \cdot G = 2\pi\, R\,.$$

On en déduit l'expression de α en fonction de r et g

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) \; = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g) \; = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot \Delta s \, .$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des cercles de base :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi \, r \qquad \text{et} \qquad L = \alpha \cdot G = 2\pi \, R \, .$$

On en déduit l'expression de α en fonction de r et g ou de R et G :

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot \Delta s\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des cercles de base :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi\, r \qquad \text{et} \qquad L = \alpha \cdot G = 2\pi\, R\,.$$

On en déduit l'expression de α en fonction de r et g ou de R et G :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g}$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G^2 - g^2) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot (G - g) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G + g) \cdot \Delta s\,.$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des cercles de base :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi\, r \qquad \text{et} \qquad L = \alpha \cdot G = 2\pi\, R\,.$$

On en déduit l'expression de α en fonction de r et g ou de R et G :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G}\,.$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi R}{G} \cdot (G + g) \cdot \Delta s$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi R}{G} \cdot (G + g) \cdot \Delta s = \pi R \cdot \frac{G + g}{G} \cdot \Delta s$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi\, R}{G} \cdot (G + g) \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \frac{G + g}{G} \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi R}{G} \cdot (G+g) \cdot \Delta s = \pi R \cdot \frac{G+g}{G} \cdot \Delta s = \pi R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès,

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi\, R}{G} \cdot (G+g) \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \frac{G+g}{G} \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi\, R}{G} \cdot (G + g) \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \frac{G + g}{G} \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G}$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi\, R}{G} \cdot (G+g) \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \frac{G+g}{G} \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{G} = \frac{r}{R}\,,$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi\, R}{G} \cdot (G+g) \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \frac{G+g}{G} \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{G} = \frac{r}{R}\,,$$

$$A \;=\; \pi\, R \cdot \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot \Delta s$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi\, R}{G} \cdot (G+g) \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \frac{G+g}{G} \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{G} = \frac{r}{R}\,,$$

$$A \;=\; \pi\, R \cdot \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot \Delta s \;=\; \pi \cdot (R + r) \cdot \Delta s$$

Aire latérale du tronc de cône de révolution

$$A = \frac{\pi\, R}{G} \cdot (G+g) \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \frac{G+g}{G} \cdot \Delta s = \pi\, R \cdot \left(1 + \tfrac{g}{G}\right) \cdot \Delta s\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{G} = \frac{r}{R}\,,$$

$$A \;=\; \pi\, R \cdot \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot \Delta s \;=\; \pi \cdot (R+r) \cdot \Delta s \;=\; \underbrace{2\pi \;\cdot\; \underbrace{\frac{r+R}{2}}_{\text{rayon moyen}}}_{\text{circonférence moyenne}} \;\cdot\; \Delta s\,.$$

Surface de révolution

À chaque intervalle $[\, x_{k-1}\,,\, x_k \,]$ de la partition de $[\, a\,,\, b \,]$

Surface de révolution

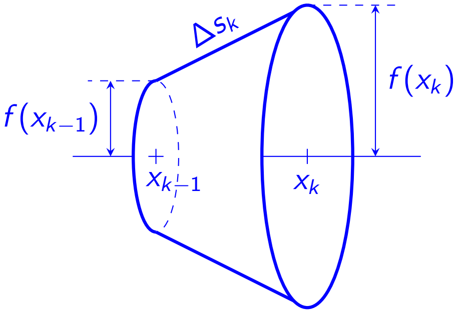
À chaque intervalle $[\, x_{k-1}\, ,\, x_k\,]$ de la partition de $[\, a\, ,\, b\,]$ correspond donc une "aire élémentaire" de la surface de révolution

Surface de révolution

À chaque intervalle $[\, x_{k-1}\,,\, x_k\,]$ de la partition de $[\, a\,,\, b\,]$ correspond donc une "aire élémentaire" de la surface de révolution qui est celle d'un tronc de cône d'aire A_k :

Surface de révolution

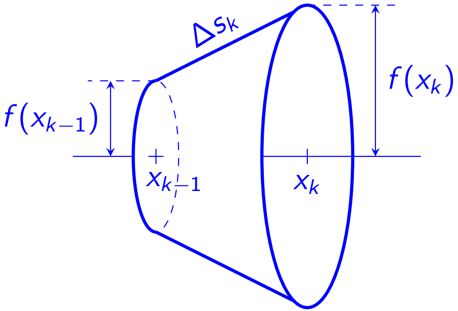
À chaque intervalle $[x_{k-1}\,,\,x_k]$ de la partition de $[a\,,\,b]$ correspond donc une "aire élémentaire" de la surface de révolution qui est celle d'un tronc de cône d'aire A_k :



Surface de révolution

À chaque intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ de la partition de $[\,a\,,\,b\,]$ correspond donc une "aire élémentaire" de la surface de révolution qui est celle d'un tronc de cône d'aire A_k :

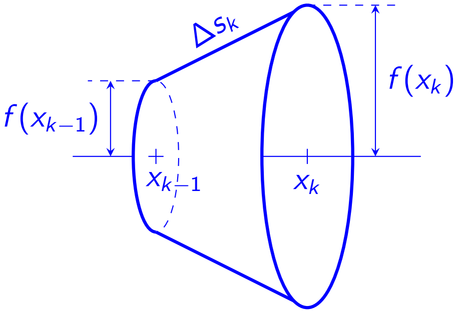
$$A_k \;=\; 2\pi \cdot \frac{r+R}{2} \cdot \Delta s_k$$



Surface de révolution

À chaque intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ de la partition de $[\,a\,,\,b\,]$ correspond donc une "aire élémentaire" de la surface de révolution qui est celle d'un tronc de cône d'aire A_k :

$$\begin{aligned} A_k &= 2\pi \cdot \frac{r+R}{2} \cdot \Delta s_k \\ &= 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k\,. \end{aligned}$$



Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation de l'aire A cherchée,

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation de l'aire A cherchée, d'autant plus précise que n est grand

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation de l'aire A cherchée, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k petits.

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation

de l'aire A cherchée, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k petits.

Lorsque $\Delta x_k \to 0$,

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation

de l'aire A cherchée, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k petits.

Lorsque $\Delta x_k \to 0\,,\quad x_{k-1} \to x_k\,,$

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation

de l'aire A cherchée, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k petits.

Lorsque $\Delta x_k \to 0$, $x_{k-1} \to x_k$, $\displaystyle\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \to f(x_k)$ et

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation

de l'aire A cherchée, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k petits.

Lorsque $\Delta x_k \to 0\,,\quad x_{k-1} \to x_k\,,\quad \dfrac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \to f(x_k)$ et $\Delta s_k \to ds\,.$

Surface de révolution

Et la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta s_k$ est une approximation

de l'aire A cherchée, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k petits.

Lorsque $\Delta x_k \to 0\,,\quad x_{k-1} \to x_k\,,\quad \dfrac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \to f(x_k)$ et $\Delta s_k \to ds\,.$

Et la somme de Riemann $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k$ converge vers $\displaystyle\int_{\Gamma} 2\pi\, f(x)\, ds\,.$

Surface de révolution

Par définition,

Surface de révolution

Par définition, l'expression de l'aire A
de la surface de révolution

Surface de révolution

Par définition, l'expression de l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe Γ de f autour de Ox

Surface de révolution

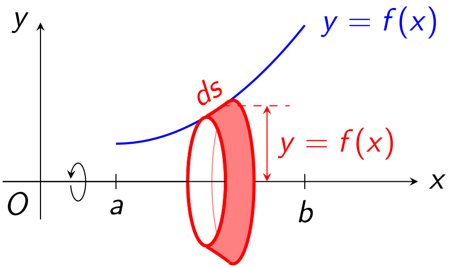
Par définition, l'expression de l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe Γ de f autour de Ox est donnée par

$$A = \int_\Gamma 2\pi f(x)\, ds\,,$$

Surface de révolution

Par définition, l'expression de l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe Γ de f autour de Ox est donnée par

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds\,,$$

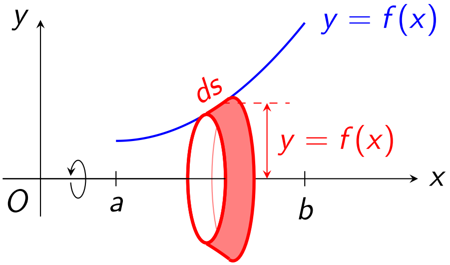


Surface de révolution

Par définition, l'expression de l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe Γ de f autour de Ox est donnée par

$$A = \int_{\Gamma} 2\pi \, f(x) \, ds \, ,$$

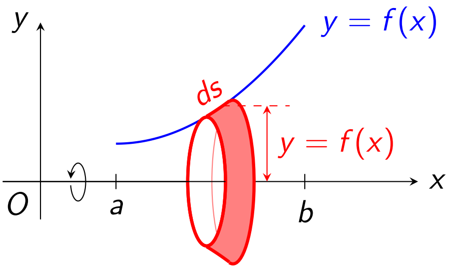
où $f(x)$ est le rayon moyen,



Surface de révolution

Par définition, l'expression de l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe Γ de f autour de Ox est donnée par

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds\,,$$

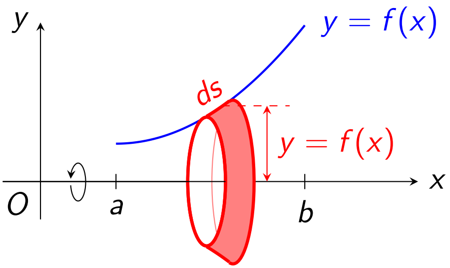


où $f(x)$ est le rayon moyen, $2\pi\, f(x)$ la circonférence moyenne

Surface de révolution

Par définition, l'expression de l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation du graphe Γ de f autour de Ox est donnée par

$$A = \int_{\Gamma} 2\pi\, f(x)\, ds\,,$$



où $f(x)$ est le rayon moyen, $2\pi\, f(x)$ la circonférence moyenne et ds la longueur des génératrices de l'aire élémentaire.

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$,

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi \, f(x) \, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

- en fonction de x :

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

- en fonction de x : $A = \int_a^b 2\pi\, f(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$,

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

- en fonction de x : $A = \displaystyle\int_a^b 2\pi\ f(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx$,
- ou en fonction de y :

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

- en fonction de x : $\quad A = \displaystyle\int_a^b 2\pi\; f(x) \cdot \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx\,,$
- ou en fonction de y : $\quad A = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} 2\pi\; y \cdot \sqrt{x'^{\,2}(y) + 1}\; dy\,, \quad (y_1 < y_2)\,,$

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

- en fonction de x : $\quad A = \displaystyle\int_a^b 2\pi\ f(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx\,,$
- ou en fonction de y : $\quad A = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} 2\pi\ y \cdot \sqrt{x'^2(y) + 1}\ dy\,, \quad (y_1 < y_2)\,,$

$\ldots$

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

- en fonction de x : $A = \int_a^b 2\pi\ f(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx$,
- ou en fonction de y : $A = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi\ y \cdot \sqrt{x'^2(y) + 1}\ dy$, $(y_1 < y_2)$,

  ...
- ou en fonction de t :

Surface de révolution

Pour calculer $A = \int_\Gamma 2\pi\, f(x)\, ds$, il faut l'expliciter en fonction de x ou de y :

- en fonction de x : $A = \int_a^b 2\pi\ f(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx\,,$
- ou en fonction de y : $A = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi\ y \cdot \sqrt{x'^2(y) + 1}\ dy\,, \quad (y_1 < y_2)\,,$

  $\ldots$
- ou en fonction de t : $A = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi\ y(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt\,, \quad (t_1 < t_2)\,.$

Exemples

Exemples

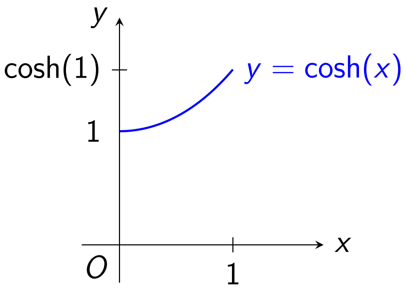
1) Soit Γ la courbe d'équation

$$y = \cosh(x)\,,\; 0 \leq x \leq 1\,.$$

Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$



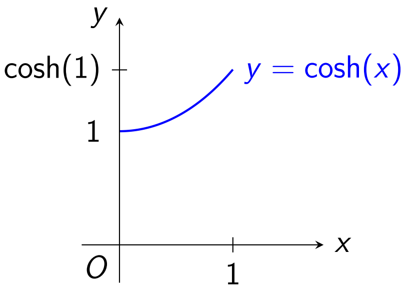
Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface

de révolution

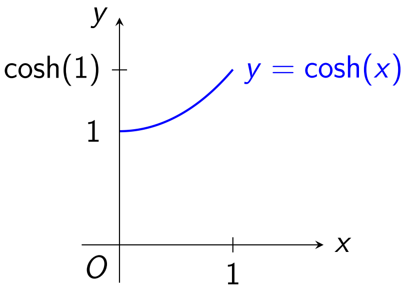


Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de $Ox\,.$

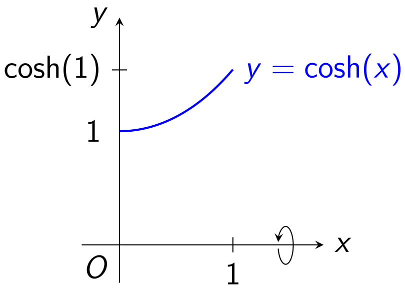


Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.

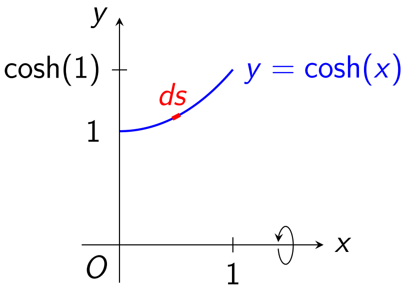


Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ \ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.

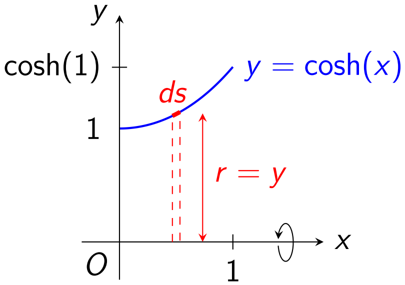


Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ \ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.



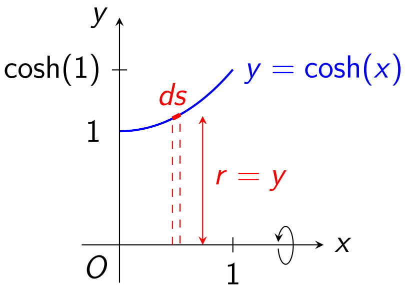
Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, y\, ds$$

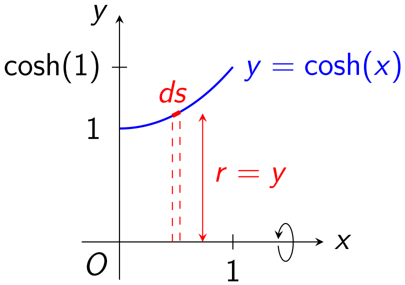


Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.



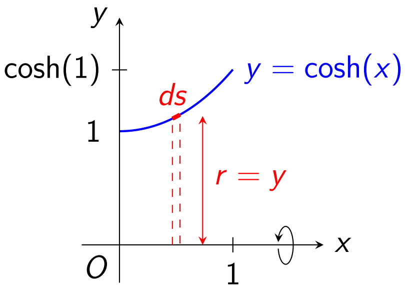
$$A = \int_\Gamma 2\pi\, y\, ds = \int_0^1 2\pi\, \cosh(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\ dx$$

Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.



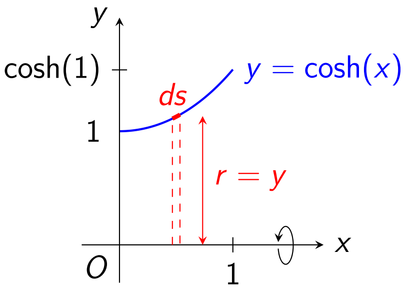
$$A = \int_{\Gamma} 2\pi\, y\, ds = \int_0^1 2\pi\, \cosh(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\ dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x)\, dx$$

Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.



$$A = \int_\Gamma 2\pi\, y\, ds = \int_0^1 2\pi\, \cosh(x) \cdot \sqrt{1+\sinh^2(x)}\ dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x)\, dx$$

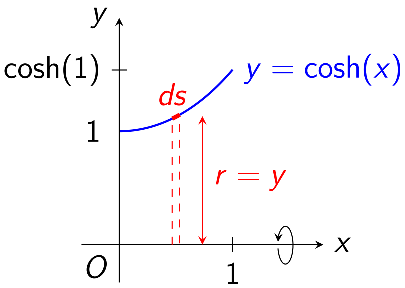
$$= \pi \int_0^1 [1+\cosh(2x)]\ dx$$

Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.



$$A = \int_\Gamma 2\pi\, y\, ds = \int_0^1 2\pi\, \cosh(x) \cdot \sqrt{1+\sinh^2(x)}\; dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x)\, dx$$

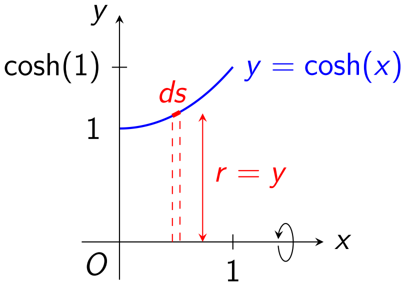
$$= \pi \int_0^1 [\,1+\cosh(2x)\,]\; dx = \pi \left[x + \frac{\sinh(2x)}{2}\right]_0^1$$

Exemples

1) Soit Γ la courbe d'équation

$y = \cosh(x)\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Ox.



$$A = \int_\Gamma 2\pi\, y\, ds = \int_0^1 2\pi\, \cosh(x) \cdot \sqrt{1+\sinh^2(x)}\; dx = 2\pi \int_0^1 \cosh^2(x)\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 [1+\cosh(2x)]\; dx = \pi \left[x + \frac{\sinh(2x)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,(2+\sinh(2))\,.$$

Exemple 2

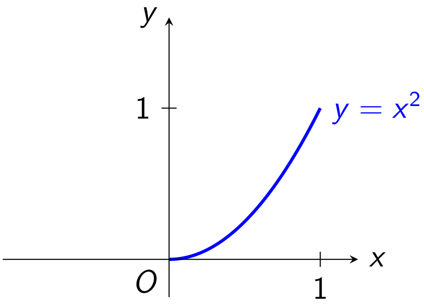
2) Soit Γ l'arc de parabole

$$y = x^2\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$$

Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$



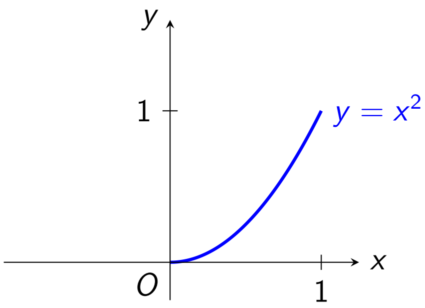
Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface

de révolution

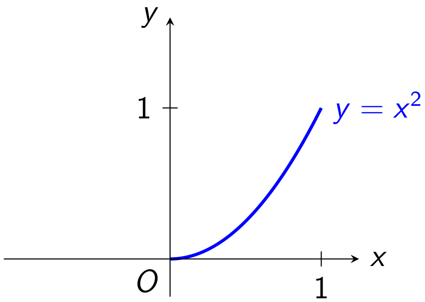


Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.

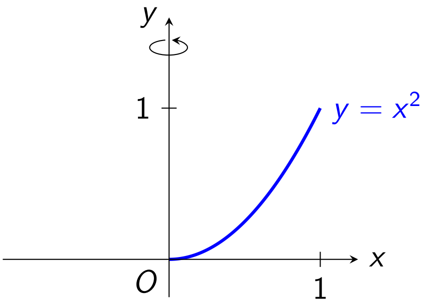


Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.

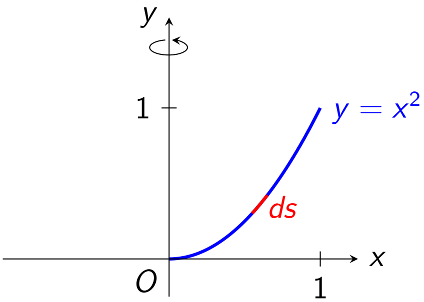


Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.

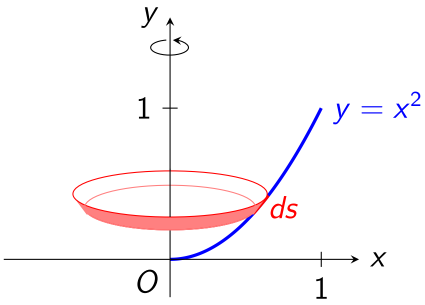


Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.

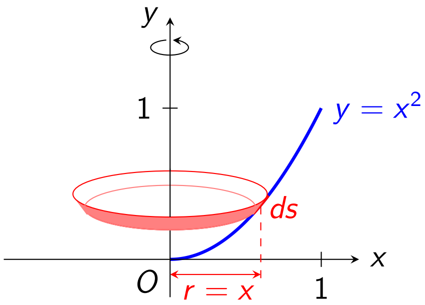


Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2 \,, \; 0 \leq x \leq 1 \,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy .

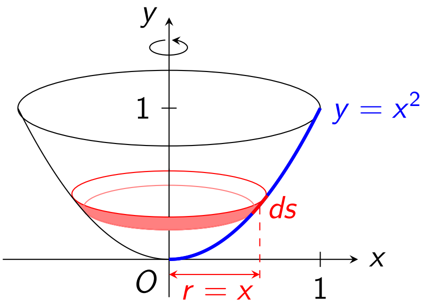


Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.

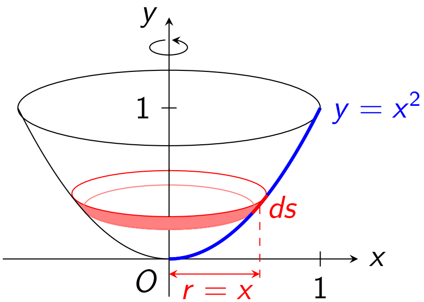


Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.



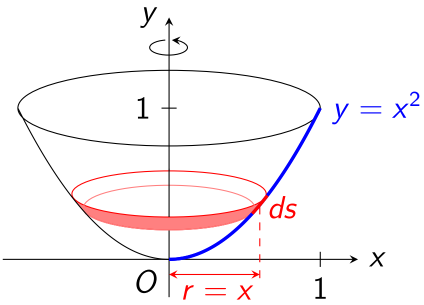
$$A = \int_{\Gamma} 2\pi \, r \, ds$$

Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.



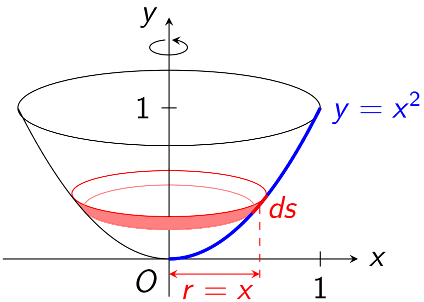
$$A = \int_\Gamma 2\pi\, r\, ds = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds\,.$$

Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de Oy.



$$A = \int_\Gamma 2\pi\, r\, ds = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds\,.$$

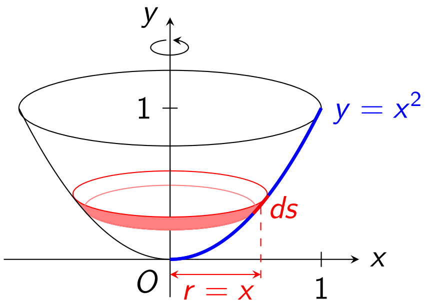
Calculons A de deux façons différentes,

Exemple 2

2) Soit Γ l'arc de parabole

$y = x^2\,,\ 0 \leq x \leq 1\,.$

Calculons l'aire A de la surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de $Oy\,.$



$$A = \int_\Gamma 2\pi\, r\, ds = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds\,.$$

Calculons A de deux façons différentes, en intégrant par rapport à x et à y.

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x,

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x, il ne reste plus qu'à traduire ds en fonction de x :

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x, il ne reste plus qu'à traduire ds en fonction de x :

  $$A = \int_{\Gamma} 2\pi\, x\, ds$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x, il ne reste plus qu'à traduire ds en fonction de x :

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = \int_0^1 2\pi\, x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x, il ne reste plus qu'à traduire ds en fonction de x :

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = \int_0^1 2\pi\, x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x, il ne reste plus qu'à traduire ds en fonction de x :

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = \int_0^1 2\pi\, x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\; dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + (2x)^2}\; dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\; dx$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x, il ne reste plus qu'à traduire ds en fonction de x :

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = \int_0^1 2\pi\, x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\; dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + (2x)^2}\; dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\; dx = 2\pi \left[\frac{1}{12} \left(1 + 4x^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à x

  Le rayon r fonction de x est égal à x, il ne reste plus qu'à traduire ds en fonction de x :

$$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = \int_0^1 2\pi\, x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\; dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + (2x)^2}\; dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt{1 + 4x^2}\; dx = 2\pi \left[\frac{1}{12} \left(1 + 4x^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \left(5\sqrt{5} - 1 \right).$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x,

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :

  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$.

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y : $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\ dy$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\, dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\, dy$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\ dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\ dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 + 1}\ dy$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\, dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\, dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 + 1}\, dy = \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\, dy\,.$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :

  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\, dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\, dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 + 1}\, dy = \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\, dy\,.$$

  $$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\, dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\, dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 + 1}\, dy = \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\, dy\,.$$

  $$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = 2\pi \int_0^1 x(y) \cdot \sqrt{x'^2(y) + 1}\, dy$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\; dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\; dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 + 1}\; dy = \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\; dy\,.$$

  $$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = 2\pi \int_0^1 x(y) \cdot \sqrt{x'^2(y) + 1}\; dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\; dy$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\; dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\; dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 + 1}\; dy = \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\; dy\,.$$

  $$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = 2\pi \int_0^1 x(y) \cdot \sqrt{x'^2(y) + 1}\; dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\; dy$$

  $$= \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4y}\; dy$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y) + 1}\; dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2 + 1}\; dy = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2 + 1}\; dy = \sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\; dy\,.$$

  $$A = \int_\Gamma 2\pi\, x\, ds = 2\pi \int_0^1 x(y)\cdot\sqrt{x'^2(y) + 1}\; dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y}\cdot\sqrt{\frac{1}{4y} + 1}\; dy$$

  $$= \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4y}\; dy = \pi \left[\frac{1}{6}\,(1 + 4y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

Exemple 2

- Intégration par rapport à y

  Le rayon r vaut toujours x, mais il faut l'exprimer en fonction de y :
  $r(y) = x(y) = \sqrt{y}$. Et l'expression de ds en fonction de y s'écrit :

  $$ds = \sqrt{x'^2(y)+1}\;dy = \sqrt{(\sqrt{y})'^2+1}\;dy = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2+1}\;dy = \sqrt{\tfrac{1}{4y}+1}\;dy\,.$$

  $$A = \int_\Gamma 2\pi\,x\,ds = 2\pi\int_0^1 x(y)\cdot\sqrt{x'^2(y)+1}\;dy = 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{4y}+1}\;dy$$

  $$= \pi\int_0^1 \sqrt{1+4y}\;dy = \pi\left[\frac{1}{6}\left(1+4y\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$