Calcul Intégral

Calcul Intégral

3. Applications géométriques du calcul intégral

3.3 Longueur d'arc

Longueur d'arc

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Longueur d'arc

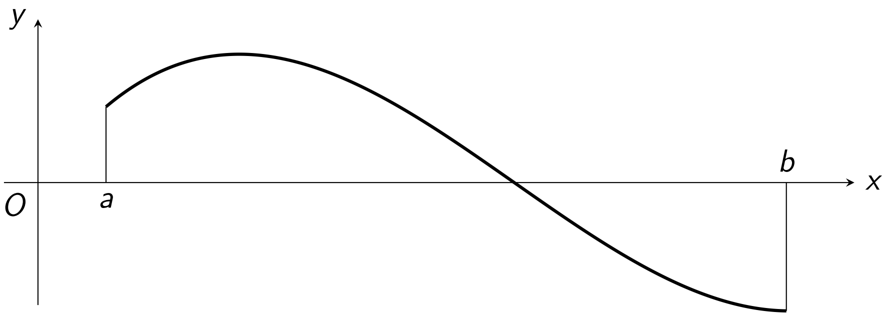
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable

Longueur d'arc

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable $(f \in C^1_{[a, b]})$.

Longueur d'arc

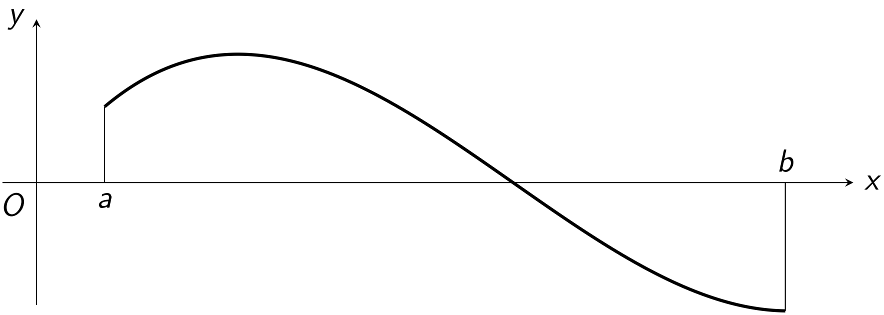
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable $(f \in C^1_{[a,b]})$.



Longueur d'arc

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continuement dérivable $(f \in C^1_{[a,b]})$.

On cherche à calculer la longueur S du graphe de f.



Longueur d'arc

Pour cela, on crée une partition de l'intervalle $[a, b]$:

Longueur d'arc

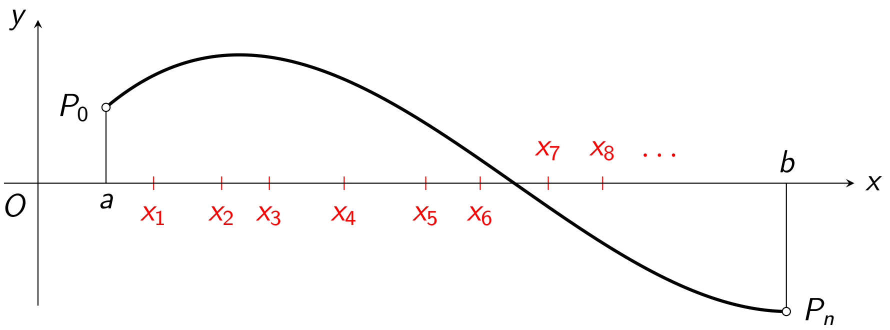
Pour cela, on crée une partition de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\,,$$

Longueur d'arc

Pour cela, on crée une partition de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\,,$$



Longueur d'arc

Et on associe à cette partition,

Longueur d'arc

Et on associe à cette partition, la ligne polygonale $P_0P_1 \cdots P_{k-1}P_k \cdots P_n$,

Longueur d'arc

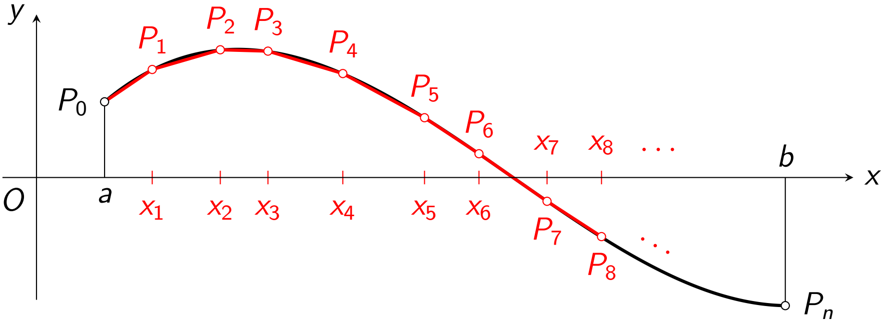
Et on associe à cette partition, la ligne polygonale $P_0P_1\cdots P_{k-1}P_k\cdots P_n$,

où les P_j sont les points du graphe de f d'abscisse x_j, $0\leq j\leq n$.

Longueur d'arc

Et on associe à cette partition, la ligne polygonale $P_0P_1 \cdots P_{k-1}P_k \cdots P_n$,

où les P_j sont les points du graphe de f d'abscisse x_j, $0 \leq j \leq n$.

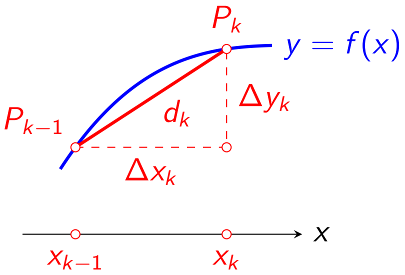


Longueur d'arc

Effectuons un zoom sur le segment $(P_{k-1}\,,\,P_k)$:

Longueur d'arc

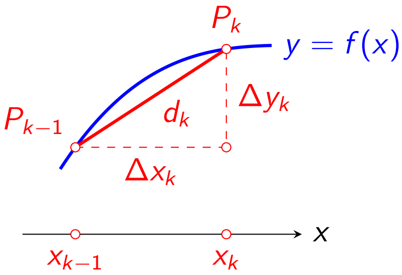
Effectuons un zoom sur le segment $(P_{k-1}\,,\,P_k)$:



Longueur d'arc

Effectuons un zoom sur le segment $(P_{k-1}\,,\ P_k)$:

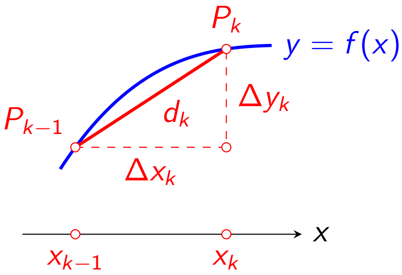
$$\Delta x_k \;=\; x_k - x_{k-1}\,,$$



Longueur d'arc

Effectuons un zoom sur le segment $(P_{k-1}\,,\,P_k)$:

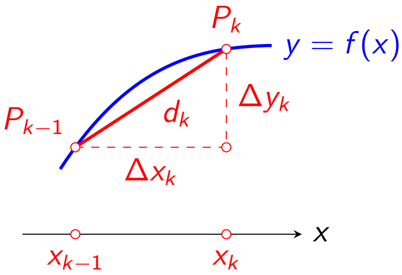
$$\begin{aligned}\Delta x_k &= x_k - x_{k-1}\,,\\ \Delta y_k &= f(x_k) - f(x_{k-1})\end{aligned}$$



Longueur d'arc

Effectuons un zoom sur le segment $(P_{k-1}\,,\,P_k)$:

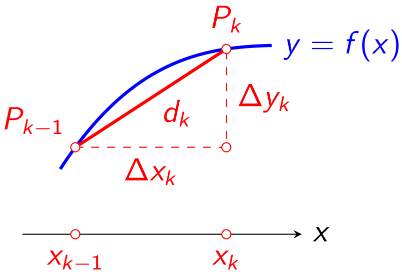
$$\begin{aligned}
\Delta x_k &= x_k - x_{k-1}\,, \\
\Delta y_k &= f(x_k) - f(x_{k-1}) \quad \text{et} \\
d_k &= \delta\,(P_{k-1}\,,\,P_k)
\end{aligned}$$



Longueur d'arc

Effectuons un zoom sur le segment $(P_{k-1}\,,\,P_k)$:

$$\begin{aligned}\Delta x_k &= x_k - x_{k-1}\,,\\ \Delta y_k &= f(x_k) - f(x_{k-1}) \quad \text{et}\\ d_k &= \delta\,(P_{k-1}\,,\,P_k)\\ &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}\,.\end{aligned}$$



Longueur d’arc

Or d’après le théorème des accroissements finis,

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1}\, ,\, x_k]$

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1} \,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1}\, ,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1} \,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [\, f'(c_k) \cdot \Delta x_k \,]^2}\,,$$

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1}\,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [\, f'(c_k) \cdot \Delta x_k\,]^2}\,,$$

$$d_k = \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k\,,$$

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1} \,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [\, f'(c_k) \cdot \Delta x_k \,]^2}\,,$$

$$d_k = \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k\,, \quad \Delta x_k > 0\,.$$

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1}\,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [\, f'(c_k) \cdot \Delta x_k\,]^2}\,,$$

$$d_k = \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k\,, \quad \Delta x_k > 0\,.$$

Et en sommant les longueurs de tous les segments de cette ligne polygonale,

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1}\,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [\, f'(c_k) \cdot \Delta x_k\,]^2}\,,$$

$$d_k = \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k\,, \quad \Delta x_k > 0\,.$$

Et en sommant les longueurs de tous les segments de cette ligne polygonale, on obtient une approximation de la longueur S cherchée,

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1}\,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [\, f'(c_k) \cdot \Delta x_k \,]^2}\,,$$

$$d_k = \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k\,, \quad \Delta x_k > 0\,.$$

Et en sommant les longueurs de tous les segments de cette ligne polygonale, on obtient une approximation de la longueur S cherchée, d'autant plus précise que n est grand

Longueur d'arc

Or d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in [\, x_{k-1}\,,\, x_k]$ tel que $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$.

$$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [\, f'(c_k) \cdot \Delta x_k \,]^2}\,,$$

$$d_k = \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k\,, \quad \Delta x_k > 0\,.$$

Et en sommant les longueurs de tous les segments de cette ligne polygonale, on obtient une approximation de la longueur S cherchée, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k petits.

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Or cette fonction est continue

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Or cette fonction est continue car par hypothèse f est de classe C^1,

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Or cette fonction est continue car par hypothèse f est de classe C^1, elle est donc intégrable au sens de Riemann.

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Or cette fonction est continue car par hypothèse f est de classe C^1, elle est donc intégrable au sens de Riemann.

Et par définition,

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Or cette fonction est continue car par hypothèse f est de classe C^1, elle est donc intégrable au sens de Riemann.

Et par définition, la longueur du graphe de f entre a et b est donnée par

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Or cette fonction est continue car par hypothèse f est de classe C^1, elle est donc intégrable au sens de Riemann.

Et par définition, la longueur du graphe de f entre a et b est donnée par

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$$

Longueur d'arc

Cette somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k$

est une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}$.

Or cette fonction est continue car par hypothèse f est de classe C^1, elle est donc intégrable au sens de Riemann.

Et par définition, la longueur du graphe de f entre a et b est donnée par

$$S = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [\, f'(c_k)\,]^2} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}\, dx$$

Abscisse curviligne

Définition :

Abscisse curviligne

Définition :

Soit f de classe C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$.

Abscisse curviligne

Définition :

Soit f de classe C^1 sur $[a, b]$.

On appelle abscisse curviligne

Abscisse curviligne

Définition :

Soit f de classe C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$.

On appelle abscisse curviligne la fonction

$s(x)$ définie par

Abscisse curviligne

Définition :

Soit f de classe C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$.

On appelle abscisse curviligne la fonction

$s(x)$ définie par

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [\,f'(t)\,]^2}\; dt\,,$$

Abscisse curviligne

Définition :

Soit f de classe C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$.

On appelle abscisse curviligne la fonction

$s(x)$ définie par

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [\,f'(t)\,]^2}\,dt\,,\quad x \in [\,a\,,\,b\,]$$

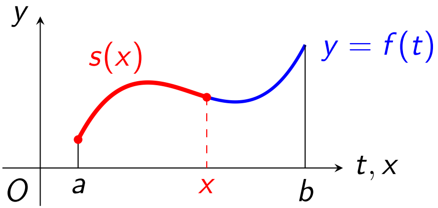
Abscisse curviligne

Définition :

Soit f de classe C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$.

On appelle abscisse curviligne la fonction $s(x)$ définie par

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [\,f'(t)\,]^2}\;dt\,, \quad x \in [\,a\,,\,b\,]$$



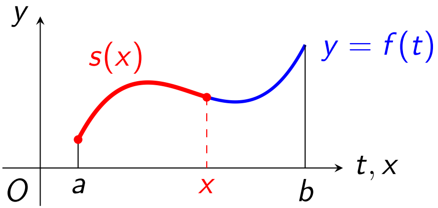
Abscisse curviligne

Définition :

Soit f de classe C^1 sur $[\,a\,,\,b\,]$.

On appelle abscisse curviligne la fonction $s(x)$ définie par

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [\,f'(t)\,]^2}\; dt\,, \quad x \in [\,a\,,\,b\,]$$



Cette fonction représente la longueur du graphe de f entre a et x.

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx$.

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1 + [\,f'(t)\,]^2}\;dt$$

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1+[\,f'(t)\,]^2}\,dt = \sqrt{1+[\,f'(x)\,]^2}\,.$$

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1 + [\,f'(t)\,]^2}\;dt = \sqrt{1 + [\,f'(x)\,]^2}\,.$$

D'où

$$ds = \sqrt{1 + [\,f'(x)\,]^2}\;dx$$

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\, dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \sqrt{1 + [\, f'(t)\,]^2}\; dt = \sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}\,.$$

D'où

$$ds = \sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}\; dx = \sqrt{1 + \left[\, \tfrac{dy}{dx}\,\right]^2}\; dx$$

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx\,.$

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1+[\,f'(t)\,]^2}\;dt = \sqrt{1+[\,f'(x)\,]^2}\,.$$

D'où

$$ds = \sqrt{1+[\,f'(x)\,]^2}\;dx = \sqrt{1+\left[\,\tfrac{dy}{dx}\,\right]^2}\;dx = \sqrt{(\,dx\,)^2+(\,dy\,)^2}\,,$$

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\, dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \sqrt{1 + [\, f'(t)\,]^2}\; dt = \sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}\,.$$

D'où

$$ds = \sqrt{1 + [\, f'(x)\,]^2}\; dx = \sqrt{1 + \left[\, \tfrac{dy}{dx} \,\right]^2}\; dx = \sqrt{(\, dx\,)^2 + (\, dy\,)^2}\,, \quad (dx > 0)\,.$$

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1+[\,f'(t)\,]^2}\;dt = \sqrt{1+[\,f'(x)\,]^2}\,.$$

D'où

$$ds = \sqrt{1+[\,f'(x)\,]^2}\;dx = \sqrt{1+\left[\,\tfrac{dy}{dx}\,\right]^2}\;dx = \sqrt{(\,dx\,)^2+(\,dy\,)^2}\,, \quad (dx>0)\,.$$

La relation de Pythagore reste vraie sur les différentielles :

Abscisse curviligne

La différentielle de l'abscisse curviligne s'écrit $ds = s'(x)\,dx$.

Or d'après le théorème fondamental du calcul intégral, on a

$$s'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \sqrt{1 + [\,f'(t)\,]^2}\;dt = \sqrt{1 + [\,f'(x)\,]^2}\,.$$

D'où

$$ds = \sqrt{1 + [\,f'(x)\,]^2}\;dx = \sqrt{1 + \left[\,\tfrac{dy}{dx}\,\right]^2}\;dx = \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2}\,, \quad (dx > 0)\,.$$

La relation de Pythagore reste vraie sur les différentielles :

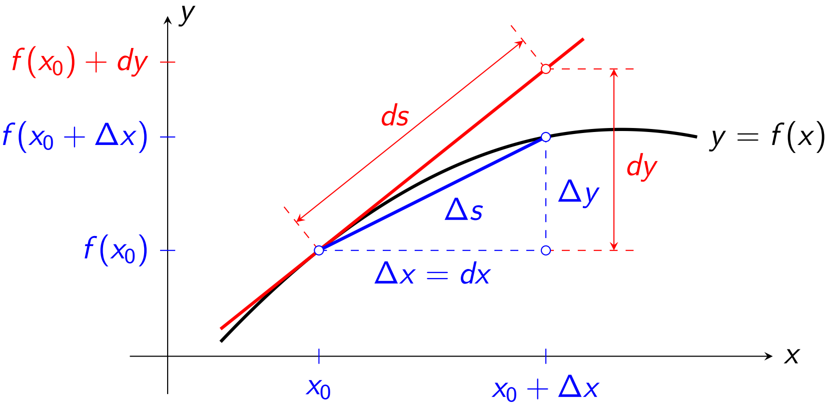
$$(\,ds\,)^2 = (\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2\,.$$

Abscisse curviligne

Interprétation géométrique :

Abscisse curviligne

Interprétation géométrique :



Remarques

Remarques

i) Si f est bijective,

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ,

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x ou à y :

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x ou à y :

$$S = \int_{\Gamma} ds$$

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x ou à y :

$$S = \int_{\Gamma} ds = \int_{\Gamma} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x ou à y :

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\,\frac{dy}{dx}\,\right]^2}\, dx\,,$$

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x ou à y :

$$S = \int_{\Gamma} ds = \int_{\Gamma} \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\,\frac{dy}{dx}\,\right]^2}\, dx\,, \quad (x_1 < x_2)$$

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x ou à y :

$$\begin{aligned} S = \int_\Gamma ds &= \int_\Gamma \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx\,, \quad (x_1 < x_2) \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dy}\right]^2 + 1}\, dy\,, \end{aligned}$$

Remarques

i) Si f est bijective, on peut calculer la longueur S de l'arc Γ, en intégrant ds par rapport à x ou à y :

$$
\begin{aligned}
S = \int_\Gamma ds &= \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\,\frac{dy}{dx}\,\right]^2}\, dx\,, \quad (x_1 < x_2) \\
&= \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left[\,\frac{dx}{dy}\,\right]^2 + 1}\, dy\,, \quad (y_1 < y_2)\,.
\end{aligned}
$$

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement,

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,t_1\,,\,t_2\,]\,,$$

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,t_1\,,\ t_2\,]\,,$$

$$dx = \dot{x}(t)\,dt$$

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,t_1\,,\ t_2\,]\,,$$

$dx = \dot{x}(t)\,dt$ et $dy = \dot{y}(t)\,dt$,

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \,, \end{cases} \qquad t \in [\, t_1 \,,\, t_2 \,] \,,$$

$dx = \dot{x}(t)\, dt$ et $dy = \dot{y}(t)\, dt$, d'où l'expression de ds en fonction de t :

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\, t_1 \,,\; t_2 \,]\,,$$

$dx = \dot{x}(t)\, dt$ et $dy = \dot{y}(t)\, dt$, d'où l'expression de ds en fonction de t :

$$S \;=\; \int_{\Gamma} ds$$

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) , \end{cases} \qquad t \in [\, t_1 \, , \; t_2 \,] ,$$

$dx = \dot{x}(t)\, dt$ et $dy = \dot{y}(t)\, dt$, d'où l'expression de ds en fonction de t :

$$S \;=\; \int_\Gamma ds \;=\; \int_\Gamma \sqrt{(\, dx \,)^2 + (\, dy \,)^2}$$

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) , \end{cases} \quad t \in [\, t_1 \,,\, t_2 \,] ,$$

$dx = \dot{x}(t)\, dt$ et $dy = \dot{y}(t)\, dt$, d'où l'expression de ds en fonction de t :

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\, dx \,)^2 + (\, dy \,)^2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt ,$$

Remarques

ii) Si l'arc de courbe Γ est défini paramétriquement, alors il faut exprimer ds en fonction du paramètre t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\, t_1 \,,\ t_2 \,]\,,$$

$dx = \dot{x}(t)\,dt$ et $dy = \dot{y}(t)\,dt$, d'où l'expression de ds en fonction de t :

$$S \;=\; \int_\Gamma ds \;=\; \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\;dt\,, \qquad (t_1 < t_2)\,.$$

Exemples

Exemple :

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\,,\ x \in [\,0\,,\,5\,]$.

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\,,\ x \in [\,0\,,\,5\,]$.

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx$$

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0\,,\, 5]$.

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx \quad \text{avec} \quad y'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}}$$

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\,,\; x \in [\,0\,,\,5\,]$.

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx \quad \text{avec} \quad y'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y'^{\,2}(x) = \frac{x}{4}\,.$$

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\,,\; x \in [\,0\,,\,5\,]$.

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx \quad \text{avec} \quad y'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y'^{\,2}(x) = \frac{x}{4}\,.$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \tfrac{x}{4}}\; dx$$

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\,,\ x \in [0\,,\,5]$.

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx \quad \text{avec} \quad y'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y'^{\,2}(x) = \frac{x}{4}\,.$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \tfrac{x}{4}}\; dx = 4 \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^5$$

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\,,\ x \in [\,0\,,\,5\,]$.

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx \quad \text{avec} \quad y'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y'^{\,2}(x) = \frac{x}{4}\,.$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \tfrac{x}{4}}\; dx = 4 \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^5 = \frac{8}{3} \left[\, \left(1 + \tfrac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \,\right]$$

Exemples

Exemple :

1) Calculons la longueur S de l'arc de courbe défini par $y = \dfrac{1}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\,,\ x \in [\,0\,,\,5\,]$.

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\; dx \quad \text{avec} \quad y'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad y'^{\,2}(x) = \frac{x}{4}\,.$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \tfrac{x}{4}}\; dx = 4 \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^5 = \frac{8}{3} \left[\, \left(1 + \tfrac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{19}{3}\,.$$

Exemple 2

2) La cycloïde

Exemple 2

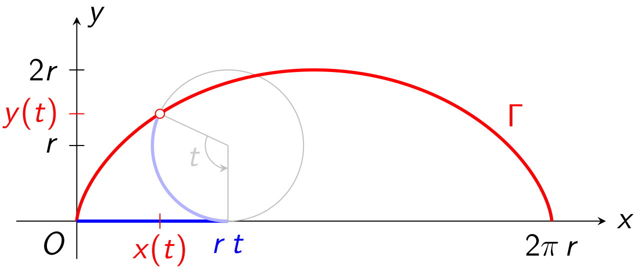
2) La cycloïde est la trajectoire Γ d'un point fixé sur un cercle

Exemple 2

2) La cycloïde est la trajectoire Γ d'un point fixé sur un cercle qui roule sur une droite.

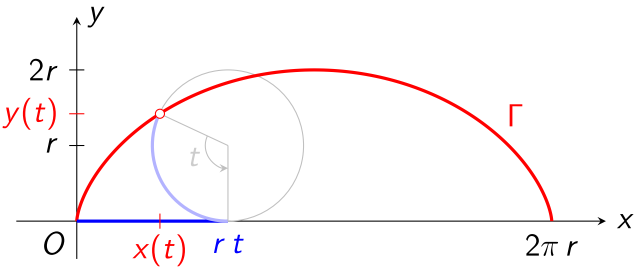
Exemple 2

2) La cycloïde est la trajectoire Γ d'un point fixé sur un cercle qui roule sur une droite.



Exemple 2

2) La cycloïde est la trajectoire Γ d'un point fixé sur un cercle qui roule sur une droite. La description paramétrique d'une arche de cycloïde est donnée par :

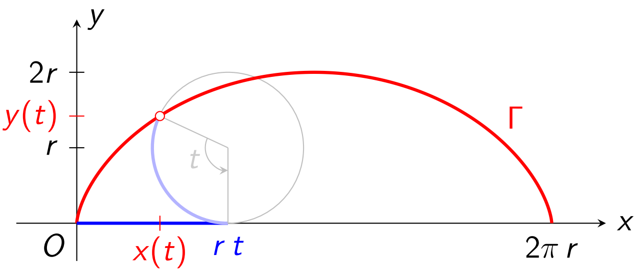


Exemple 2

2) La cycloïde est la trajectoire Γ d'un point fixé sur un cercle qui roule sur une droite. La description paramétrique d'une arche de cycloïde est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = r\,(t - \sin t) \\ y(t) = r\,(1 - \cos t)\,, \end{cases}$$

$$t \in [\,0\,,\,2\pi\,]\,.$$



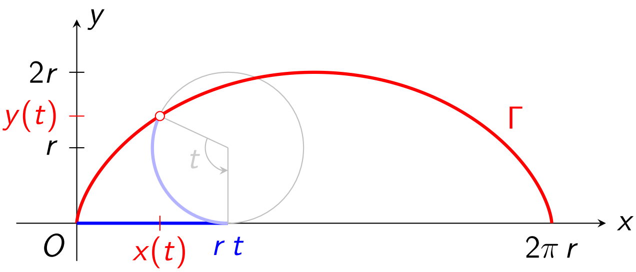
Exemple 2

2) La cycloïde est la trajectoire Γ d'un point fixé sur un cercle qui roule sur une droite. La description paramétrique d'une arche de cycloïde est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = r\,(t - \sin t) \\ y(t) = r\,(1 - \cos t)\ , \end{cases}$$

$$t \in [\,0\,,\,2\pi\,]\,.$$

Calculons la longueur de cette arche.



Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Exemple 2

$$S = \int_{\Gamma} ds = \int_{\Gamma} \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt\,,$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt\,,$$

avec $\quad \dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t)$

Exemple 2

$$S = \int_{\Gamma} ds = \int_{\Gamma} \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt\,,$$

avec $\quad \dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t) \quad$ et $\quad \dot{y}(t) = r\,\sin t\,.$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt\,,$$

avec $\quad \dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t) \quad$ et $\quad \dot{y}(t) = r\,\sin t\,.$

$$S = \int_0^{2\pi} r\,\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\; dt$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\;dt\,,$$

avec $\quad \dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t) \quad$ et $\quad \dot{y}(t) = r\,\sin t\,.$

$$S = \int_0^{2\pi} r\,\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\;dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\cos t}\;dt$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt\,,$$

avec $\dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t)$ et $\dot{y}(t) = r\,\sin t\,.$

$$S = \int_0^{2\pi} r\,\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\cos t}\ dt$$

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\ dt$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt\,,$$

avec $\dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t)$ et $\dot{y}(t) = r\ \sin t$.

$$S = \int_0^{2\pi} r\ \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\ \cos t}\ dt$$

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\ dt = 2r \int_0^{2\pi} |\ \sin(\tfrac{t}{2})\,|\ dt$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt\,,$$

avec $\quad \dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t) \quad$ et $\quad \dot{y}(t) = r\ \sin t\,.$

$$S = \int_0^{2\pi} r\ \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\cos t}\ dt$$

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\ dt = 2r \int_0^{2\pi} |\,\sin(\tfrac{t}{2})\,|\ dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{t}{2})\ dt$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt\,,$$

avec $\quad \dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t) \quad$ et $\quad \dot{y}(t) = r\,\sin t\,.$

$$S = \int_0^{2\pi} r\,\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\cos t}\ dt$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\ dt = 2r\int_0^{2\pi} |\,\sin(\tfrac{t}{2})\,|\ dt = 2r\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{t}{2})\ dt$$

$$= \ -4r\cos(\tfrac{t}{2})\,\Big|_0^{2\pi}$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt\,,$$

avec $\dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t)$ et $\dot{y}(t) = r\,\sin t\,.$

$$S = \int_0^{2\pi} r\,\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\cos t}\ dt$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\ dt = 2r\int_0^{2\pi} |\,\sin(\tfrac{t}{2})\,|\ dt = 2r\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{t}{2})\ dt$$

$$= -4r\cos(\tfrac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = -4r\,[\,(-1) - 1\,]$$

Exemple 2

$$S = \int_\Gamma ds = \int_\Gamma \sqrt{(\,dx\,)^2 + (\,dy\,)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\; dt\,,$$

avec $\quad \dot{x}(t) = r\,(1 - \cos t) \quad$ et $\quad \dot{y}(t) = r\,\sin t\,.$

$$S = \int_0^{2\pi} r\,\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\; dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\cos t}\; dt$$

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\; dt = 2r \int_0^{2\pi} |\,\sin(\tfrac{t}{2})\,|\; dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{t}{2})\; dt$$

$$= -4r\cos(\tfrac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = -4r\,[\,(-1) - 1\,] = 8r\,.$$