

Calcul Intégral

Calcul Intégral

2. L'intégrale indéfinie

2. L'intégrale indéfinie

2.2 Recherche de primitives

2. L'intégrale indéfinie

2.2 Recherche de primitives

2.2.3 Intégration par changement de variable :

Exemples

Remarque

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Remarque

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On cherche à intégrer une expression qui est fonction de $\sqrt{P_2(x)}$.

Remarque

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On cherche à intégrer une expression qui est fonction de $\sqrt{P_2(x)}$. Quel changement de variable peut-on effectuer ?

Remarque

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On cherche à intégrer une expression qui est fonction de $\sqrt{P_2(x)}$. Quel changement de variable peut-on effectuer ?

Un changement de variable possible va dépendre du signe du discriminant Δ

Remarque

Soit $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On cherche à intégrer une expression qui est fonction de $\sqrt{P_2(x)}$. Quel changement de variable peut-on effectuer ?

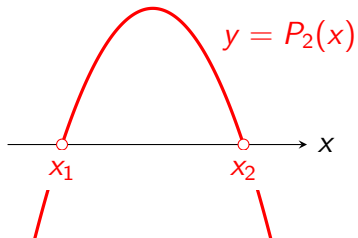
Un changement de variable possible va dépendre du signe du discriminant Δ et de celui du coefficient dominant a de $P_2(x)$.

Remarque

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,

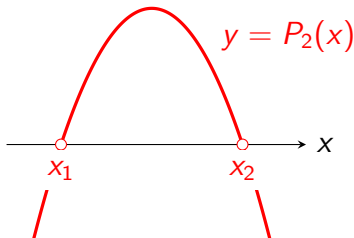
Remarque

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,



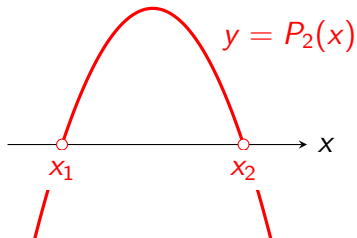
Remarque

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$,



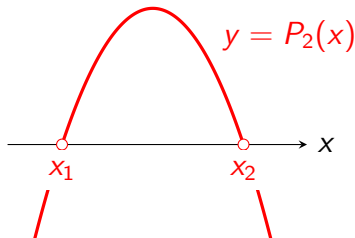
Remarque

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$,



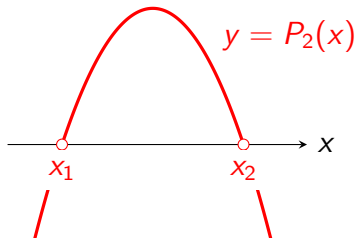
Remarque

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$,
peut s'écrire sous la forme
 $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$,



Remarque

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$,
peut s'écrire sous la forme
 $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$, $z \in [-1, 1]$.



Remarque

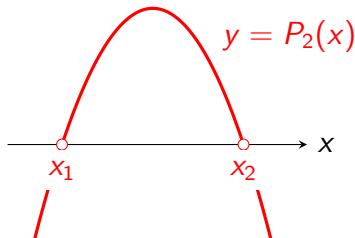
- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,

alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$,

peut s'écrire sous la forme

$\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$, $z \in [-1, 1]$.

Et on peut poser $z = \sin(t)$,



Remarque

- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$,

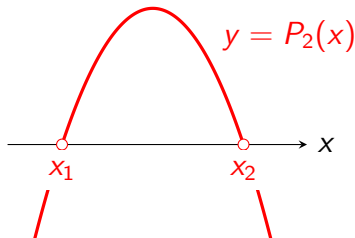
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in [x_1, x_2]$,

peut s'écrire sous la forme

$\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$, $z \in [-1, 1]$.

Et on peut poser $z = \sin(t)$,

ou $z = \cos(t)$.



Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx,$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$)

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif,

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

$$\sqrt{6x - x^2} =$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 9} =$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 9} = \sqrt{9 - (x - 3)^2} =$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 9} = \sqrt{9 - (x - 3)^2} = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}.$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 9} = \sqrt{9 - (x - 3)^2} = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}.$$

On a évidemment : $x \in [0, 6] \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} \in [-1, 1].$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 9} = \sqrt{9 - (x - 3)^2} = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}.$$

On a évidemment : $x \in [0, 6] \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} \in [-1, 1].$

On peut alors poser $\frac{x-3}{3} = \sin(t)$

Exemple

Exemple : $\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx, \quad x \in]0, 6].$

Le trinôme $6x - x^2$ est réductible ($\Delta > 0$) et de coefficient dominant négatif, on peut donc exprimer $\sqrt{6x - x^2}$ sous la forme $\lambda \cdot \sqrt{1 - z^2}$:

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 9} = \sqrt{9 - (x - 3)^2} = 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}.$$

On a évidemment : $x \in [0, 6] \Leftrightarrow \frac{x-3}{3} \in [-1, 1].$

On peut alors poser $\frac{x-3}{3} = \sin(t)$ ou $\frac{x-3}{3} = \cos(t).$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t) ,$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6],$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t),$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t),$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t), \quad dx = 3 \cos(t) dt.$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t), \quad dx = 3 \cos(t) dt.$$

$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx =$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t), \quad dx = 3 \cos(t) dt.$$

$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} dx =$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t), \quad dx = 3 \cos(t) dt.$$

$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} dx = \int \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)} \cdot [3 \cos(t) dt]$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t), \quad dx = 3 \cos(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} dx = \int \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)} \cdot [3 \cos(t) dt] \\ &= 3 \int \frac{\cos^2(t)}{1 + \sin(t)} dt \end{aligned}$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t), \quad dx = 3 \cos(t) dt.$$

$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} dx = \int \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)} \cdot [3 \cos(t) dt]$$

$$= 3 \int \frac{\cos^2(t)}{1 + \sin(t)} dt = 3 \int \frac{1 - \sin^2(t)}{1 + \sin(t)} dt$$

Exemple

$$\frac{x-3}{3} = \sin(t), \quad x \in]0, 6], \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t = \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right),$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} = \cos(t), \quad \frac{x}{3} = 1 + \sin(t), \quad dx = 3 \cos(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} dx = \int \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)} \cdot [3 \cos(t) dt] \\ &= 3 \int \frac{\cos^2(t)}{1 + \sin(t)} dt = 3 \int \frac{1 - \sin^2(t)}{1 + \sin(t)} dt = 3 \int \frac{[1 - \sin(t)][1 + \sin(t)]}{1 + \sin(t)} dt \end{aligned}$$

Exemple

$$= 3 \int [1 - \sin(t)] \, dt$$

Exemple

$$= 3 \int [1 - \sin(t)] \, dt = 3t + 3 \cos(t) + C .$$

Exemple

$$= 3 \int [1 - \sin(t)] dt = 3t + 3 \cos(t) + C.$$

Et en revenant à la variable x , on obtient :

Exemple

$$= 3 \int [1 - \sin(t)] dt = 3t + 3 \cos(t) + C.$$

Et en revenant à la variable x , on obtient :

$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx =$$

Exemple

$$= 3 \int [1 - \sin(t)] dt = 3t + 3 \cos(t) + C.$$

Et en revenant à la variable x , on obtient :

$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx = 3 \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) + 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} + C,$$

Exemple

$$= 3 \int [1 - \sin(t)] dt = 3t + 3 \cos(t) + C.$$

Et en revenant à la variable x , on obtient :

$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx = 3 \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) + 3 \sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{3}\right)^2} + C,$$

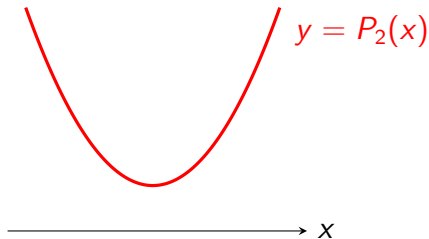
$$\int \frac{\sqrt{6x - x^2}}{x} dx = 3 \arcsin\left(\frac{x-3}{3}\right) + \sqrt{6x - x^2} + C.$$

Remarque, suite

- Si $\Delta < 0$ et $a > 0$,

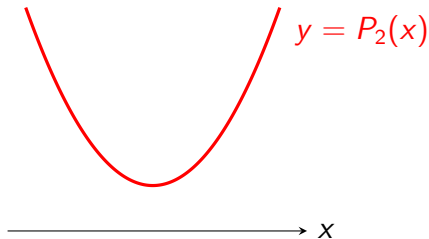
Remarque, suite

- Si $\Delta < 0$ et $a > 0$,



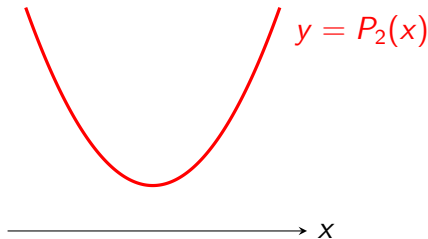
Remarque, suite

- Si $\Delta < 0$ et $a > 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$,



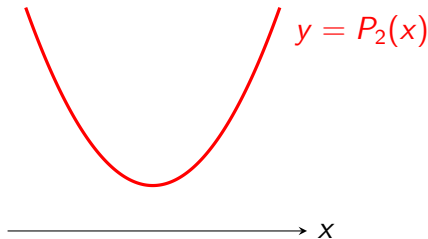
Remarque, suite

- Si $\Delta < 0$ et $a > 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in \mathbb{R}$,



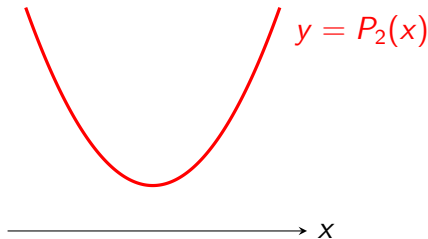
Remarque, suite

- Si $\Delta < 0$ et $a > 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in \mathbb{R}$,
peut s'écrire sous la forme
 $\lambda \cdot \sqrt{z^2 + 1}$,



Remarque, suite

- Si $\Delta < 0$ et $a > 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in \mathbb{R}$,
peut s'écrire sous la forme
 $\lambda \cdot \sqrt{z^2 + 1}$, $z \in \mathbb{R}$.



Remarque, suite

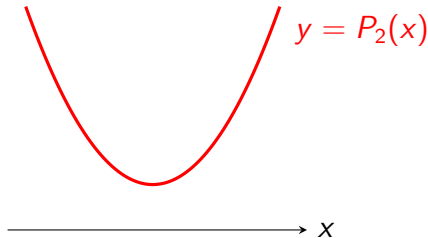
- Si $\Delta < 0$ et $a > 0$,

alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in \mathbb{R}$,

peut s'écrire sous la forme

$$\lambda \cdot \sqrt{z^2 + 1}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Et on peut poser $z = \sinh(t)$.



Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx,$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$)

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

On peut donc poser $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sinh(t),$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

On peut donc poser $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R},$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

On peut donc poser $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

On peut donc poser $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t = \arg \sinh \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right),$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

On peut donc poser $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t = \arg \sinh \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right),$

$$x = 1 + \sqrt{3} \sinh(t),$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

On peut donc poser $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t = \arg \sinh \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right),$

$$x = 1 + \sqrt{3} \sinh(t), \quad \sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{3} \cosh(t),$$

Exemple

Exemple : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Le trinôme $x^2 - 2x + 4$ est irréductible ($\Delta < 0$) et de coefficient dominant positif :

$$x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3 = 3 \left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right].$$

On peut donc poser $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sinh(t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t = \arg \sinh \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} \right),$

$$x = 1 + \sqrt{3} \sinh(t), \quad \sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{3} \cosh(t), \quad dx = \sqrt{3} \cosh(t) dt.$$

Exemple

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx$$

Exemple

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx =$$

Exemple

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx = \int \frac{1}{3\sqrt{3} \cosh^3(t)} \cdot \left[\sqrt{3} \cosh(t) dt \right]$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx &= \int \frac{1}{3\sqrt{3} \cosh^3(t)} \cdot \left[\sqrt{3} \cosh(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cosh^2(t)} dt\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx &= \int \frac{1}{3\sqrt{3} \cosh^3(t)} \cdot \left[\sqrt{3} \cosh(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cosh^2(t)} dt = \frac{1}{3} \tanh(t) + C\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx &= \int \frac{1}{3\sqrt{3} \cosh^3(t)} \cdot \left[\sqrt{3} \cosh(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cosh^2(t)} dt = \frac{1}{3} \tanh(t) + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} + C.\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx &= \int \frac{1}{3\sqrt{3} \cosh^3(t)} \cdot \left[\sqrt{3} \cosh(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cosh^2(t)} dt = \frac{1}{3} \tanh(t) + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} + C.\end{aligned}$$

En conclusion :

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx &= \int \frac{1}{3\sqrt{3} \cosh^3(t)} \cdot \left[\sqrt{3} \cosh(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cosh^2(t)} dt = \frac{1}{3} \tanh(t) + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} + C.\end{aligned}$$

En conclusion : $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx =$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx &= \int \frac{1}{3\sqrt{3} \cosh^3(t)} \cdot \left[\sqrt{3} \cosh(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cosh^2(t)} dt = \frac{1}{3} \tanh(t) + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} + C.\end{aligned}$$

En conclusion :

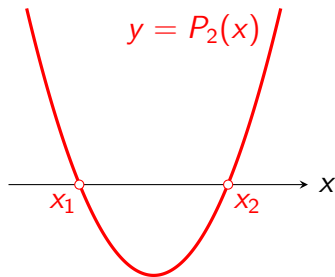
$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 4)^3}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} + C.$$

Remarque, suite et fin

- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,

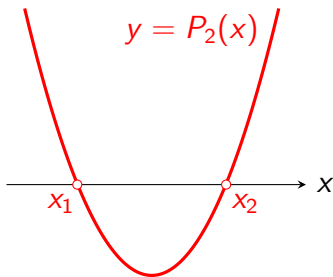
Remarque, suite et fin

- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,



Remarque, suite et fin

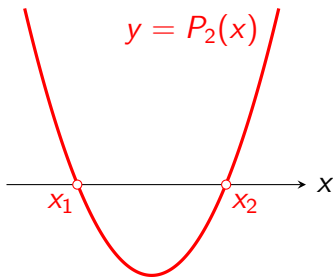
- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,
alors $\sqrt{P_2(x)}$,



Remarque, suite et fin

- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,

alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$,



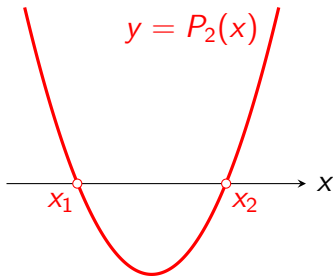
Remarque, suite et fin

- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,

alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$,

peut s'écrire sous la forme

$$\lambda \cdot \sqrt{z^2 - 1},$$



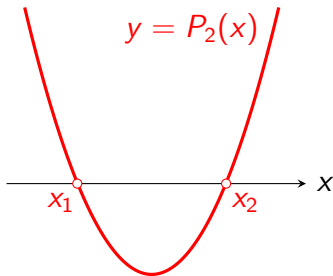
Remarque, suite et fin

- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,

alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$,

peut s'écrire sous la forme

$\lambda \cdot \sqrt{z^2 - 1}$, $z \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.



Remarque, suite et fin

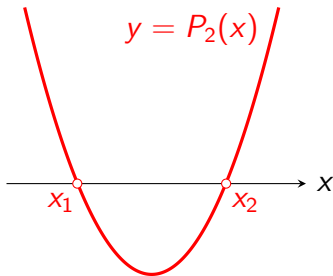
- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,

alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$,

peut s'écrire sous la forme

$\lambda \cdot \sqrt{z^2 - 1}$, $z \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Et on peut poser $z = +\cosh(t)$ pour $z \geq 1$



Remarque, suite et fin

- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$,

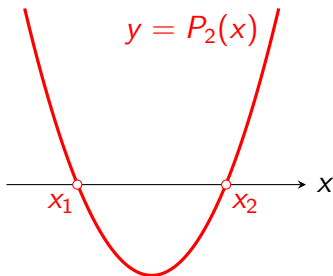
alors $\sqrt{P_2(x)}$, $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$,

peut s'écrire sous la forme

$\lambda \cdot \sqrt{z^2 - 1}$, $z \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Et on peut poser $z = +\cosh(t)$ pour $z \geq 1$

et $z = -\cosh(t)$ pour $z \leq -1$.



Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx .$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx .$

$$D_{\text{def}} =$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx .$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \}$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$\forall x \leq 1$, on a

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\forall x \leq 1, \text{ on a } \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} =$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\forall x \leq 1, \text{ on a } \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{(5-x)(1-x)} =$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\forall x \leq 1, \text{ on a } \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{(5-x)(1-x)} = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\begin{aligned} \forall x \leq 1, \text{ on a } \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} &= \sqrt{(5-x)(1-x)} = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \\ &= \sqrt{(x^2 - 6x + 9) - 4} \end{aligned}$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\begin{aligned} \forall x \leq 1, \text{ on a } \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} &= \sqrt{(5-x)(1-x)} = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \\ &= \sqrt{(x^2 - 6x + 9) - 4} = \sqrt{(x-3)^2 - 4} \end{aligned}$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\begin{aligned} \forall x \leq 1, \text{ on a } \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} &= \sqrt{(5-x)(1-x)} = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \\ &= \sqrt{(x^2 - 6x + 9) - 4} = \sqrt{(x-3)^2 - 4} = 2 \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\begin{aligned} \forall x \leq 1, \text{ on a } \quad \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} &= \sqrt{(5-x)(1-x)} = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \\ &= \sqrt{(x^2 - 6x + 9) - 4} = \sqrt{(x-3)^2 - 4} = 2 \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{On vérifie que } x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} \in]-\infty, -1],$$

Exemple

Exemple : $\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx.$

$$D_{\text{def}} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 5-x \geq 0 \text{ et } 1-x \geq 0 \} =]-\infty, 1].$$

$$\begin{aligned} \forall x \leq 1, \text{ on a } \quad \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} &= \sqrt{(5-x)(1-x)} = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \\ &= \sqrt{(x^2 - 6x + 9) - 4} = \sqrt{(x-3)^2 - 4} = 2 \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

On vérifie que $x \in]-\infty, 1] \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} \in]-\infty, -1]$, on peut donc poser

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t).$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t),$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1,$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0,$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t),$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t),$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx =$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} \, dx =$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} \, dx = 2 \int \sinh(t) [-2 \sinh(t) dt].$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} \, dx = 2 \int \sinh(t) [-2 \sinh(t) dt].$$

Et en exprimant $\sinh^2(t)$ à l'aide de $\cosh(2t)$:

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} \, dx = 2 \int \sinh(t) [-2 \sinh(t) dt].$$

Et en exprimant $\sinh^2(t)$ à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} \, dx = 2 \int \sinh(t) [-2 \sinh(t) dt].$$

Et en exprimant $\sinh^2(t)$ à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) =$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} \, dx = 2 \int \sinh(t) [-2 \sinh(t) dt].$$

Et en exprimant $\sinh^2(t)$ à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 1 + 2 \sinh^2(t)$$

Exemple

$$\frac{x-3}{2} = -\cosh(t), \quad x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad x = 3 - 2 \cosh(t), \quad t = \arg \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right),$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} = \sinh(t), \quad dx = -2 \sinh(t) dt.$$

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} \, dx = 2 \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1} \, dx = 2 \int \sinh(t) [-2 \sinh(t) dt].$$

Et en exprimant $\sinh^2(t)$ à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 1 + 2 \sinh^2(t) \Leftrightarrow \sinh^2(t) = \frac{\cosh(2t) - 1}{2},$$

Exemple

on obtient :

Exemple

on obtient : $2 \int -2 \sinh^2(t) dt =$

Exemple

on obtient : $2 \int -2 \sinh^2(t) dt = 2 \int [1 - \cosh(2t)] dt =$

Exemple

on obtient : $2 \int -2 \sinh^2(t) dt = 2 \int [1 - \cosh(2t)] dt = 2t - \sinh(2t) + C .$

Exemple

$$\begin{aligned}\text{on obtient : } 2 \int -2 \sinh^2(t) dt &= 2 \int [1 - \cosh(2t)] dt = 2t - \sinh(2t) + C . \\ &= 2t - 2 \sinh(t) \cdot \cosh(t) + C\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\text{on obtient : } 2 \int -2 \sinh^2(t) dt &= 2 \int [1 - \cosh(2t)] dt = 2t - \sinh(2t) + C . \\ &= 2t - 2 \sinh(t) \cdot \cosh(t) + C = 2t + [-\cosh(t)] \cdot 2 \sinh(t) + C\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\text{on obtient : } 2 \int -2 \sinh^2(t) dt &= 2 \int [1 - \cosh(2t)] dt = 2t - \sinh(2t) + C . \\ &= 2t - 2 \sinh(t) \cdot \cosh(t) + C = 2t + [-\cosh(t)] \cdot 2 \sinh(t) + C \\ &= 2 \operatorname{arg} \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right) + \frac{x-3}{2} \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 - 1} + C .\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\text{on obtient : } 2 \int -2 \sinh^2(t) dt &= 2 \int [1 - \cosh(2t)] dt = 2t - \sinh(2t) + C . \\ &= 2t - 2 \sinh(t) \cdot \cosh(t) + C = 2t + [-\cosh(t)] \cdot 2 \sinh(t) + C \\ &= 2 \operatorname{arg} \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right) + \frac{x-3}{2} \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 - 1} + C .\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $x \leq 1$, on a

Exemple

$$\begin{aligned}\text{on obtient : } 2 \int -2 \sinh^2(t) dt &= 2 \int [1 - \cosh(2t)] dt = 2t - \sinh(2t) + C . \\ &= 2t - 2 \sinh(t) \cdot \cosh(t) + C = 2t + [-\cosh(t)] \cdot 2 \sinh(t) + C \\ &= 2 \operatorname{arg} \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right) + \frac{x-3}{2} \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{x-3}{2} \right)^2 - 1} + C .\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $x \leq 1$, on a

$$\int \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{1-x} dx = 2 \operatorname{arg} \cosh \left(\frac{3-x}{2} \right) + \frac{x-3}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 5} + C .$$