Chapitre 5.

Variation locale d'une fonction

Chapitre 5.
Variation locale d'une fonction

4. Concavité, convexité

Concavité, convexité

Définitions :

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$,

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I,

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe,

Concavité, convexité

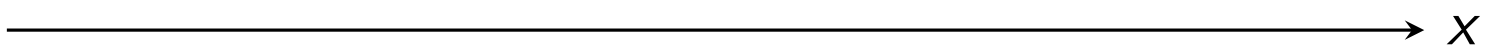
Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I .

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I , on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).



Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I .

i) Si $f''(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I , on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).

Concavité, convexité

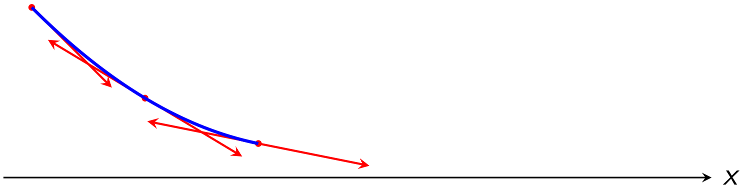
Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

i) Si $f''(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I .

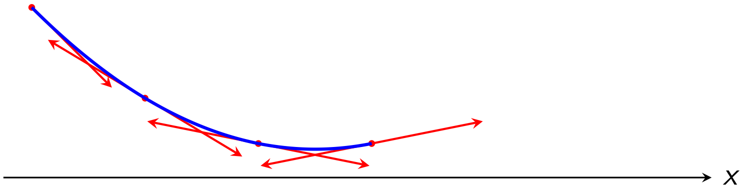
i) Si $f''(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement croissante sur I , on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).



Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

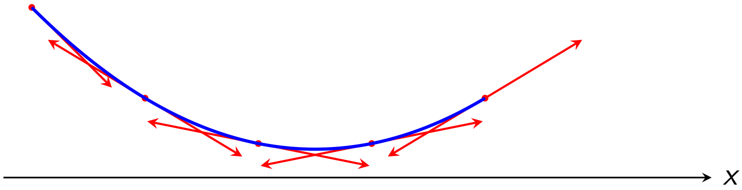
i) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).



Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

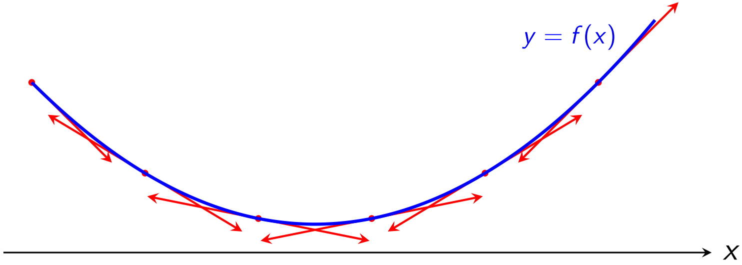
i) Si $f''(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).



Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

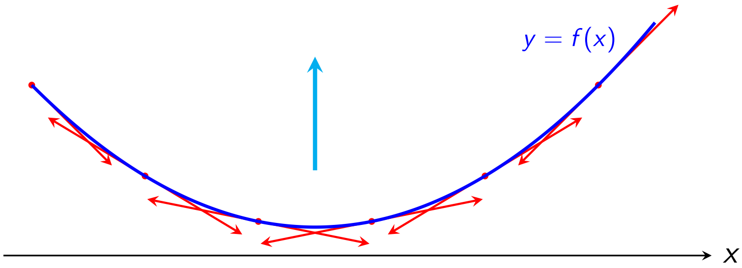
i) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).



Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

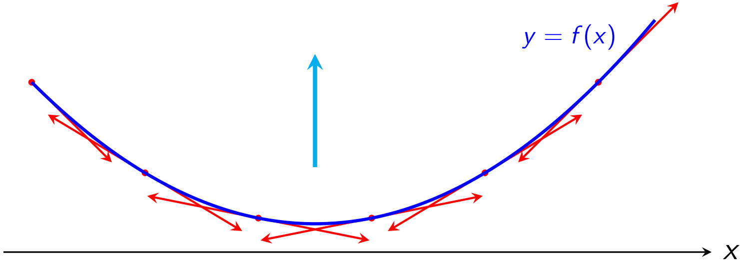
i) Si $f''(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).



Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I .

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I , on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).

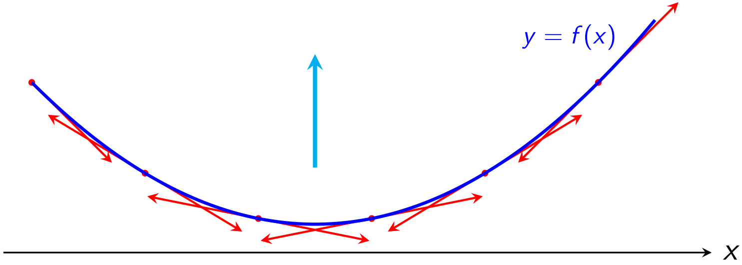


Le graphe de f

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).

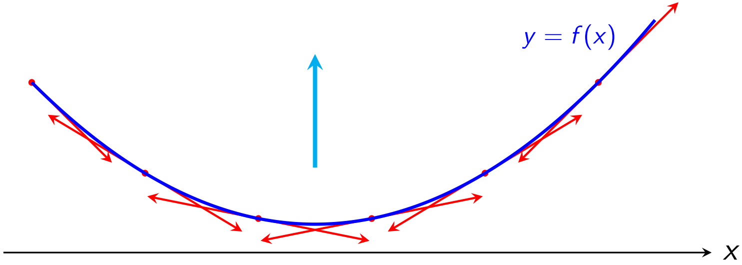


Le graphe de f est situé

Concavité, convexité

Définitions : Soit f une fonction deux fois dérivables sur I.

i) Si $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, alors f' est strictement croissante sur I, on dit que le graphe de f est convexe, (concavité orientée dans le sens des y positifs).



Le graphe de f est situé "au-dessus" des tangentes.

Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$

Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I,

Concavité, convexité

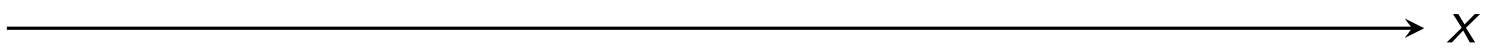
ii) Si $f''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement décroissante sur $I\,,$ on dit que le graphe de f est concave,

Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement décroissante sur $I\,,$ on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).

Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement décroissante sur $I\,,$ on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).

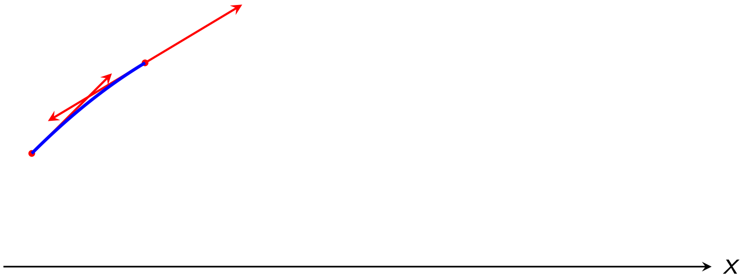


Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I, on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).

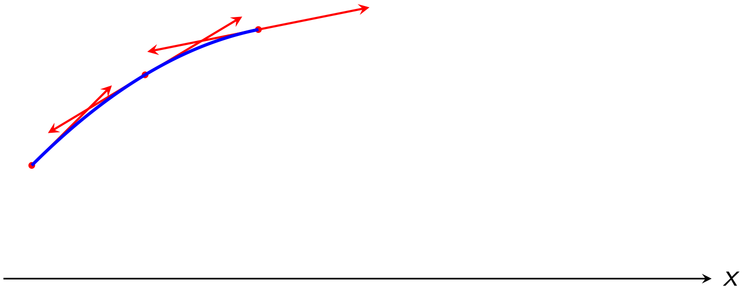
Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I, on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



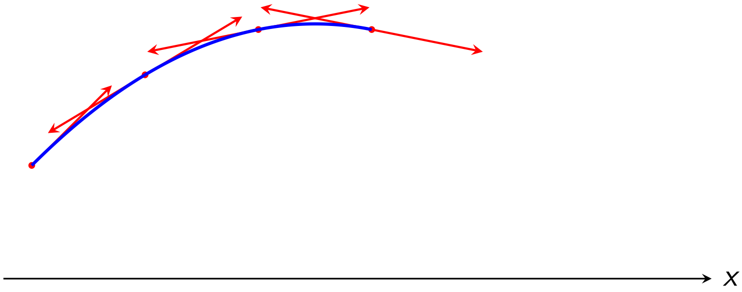
Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement décroissante sur $I\,,$ on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



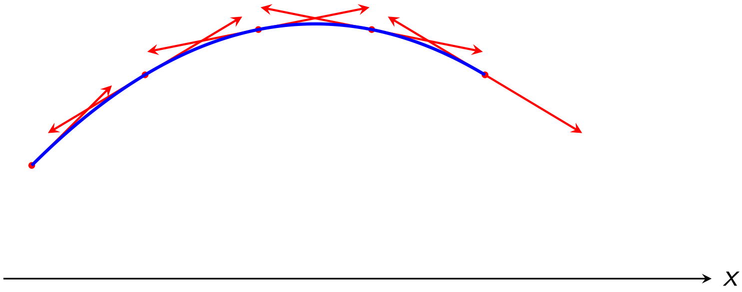
Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement décroissante sur $I\,,$ on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



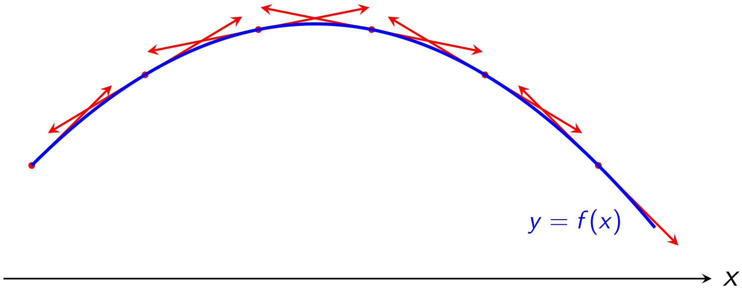
Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f' est strictement décroissante sur $I\,,$ on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



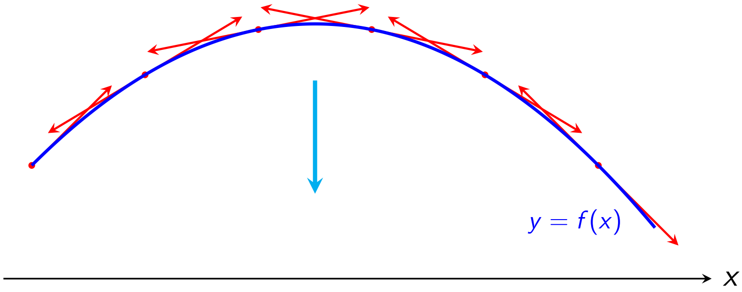
Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I, on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



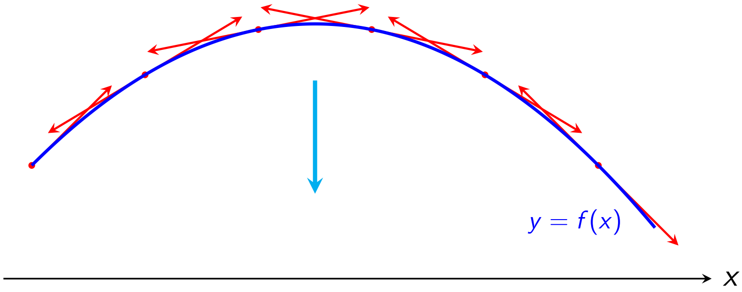
Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I, on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



Concavité, convexité

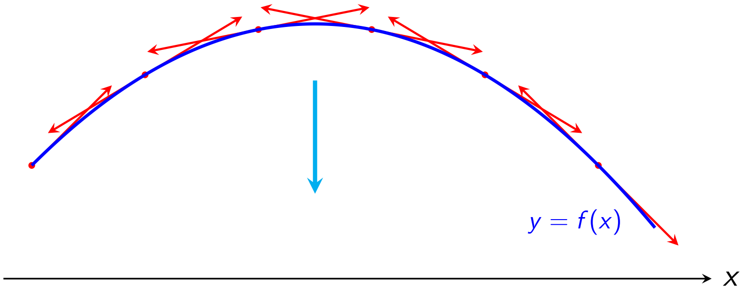
ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I, on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



Le graphe de f

Concavité, convexité

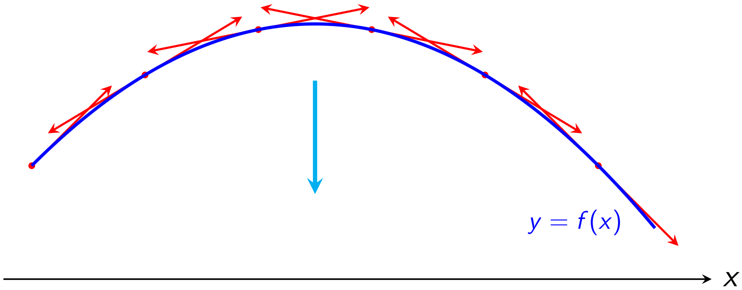
ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I, on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



Le graphe de f est situé

Concavité, convexité

ii) Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, alors f' est strictement décroissante sur I, on dit que le graphe de f est concave, (concavité orientée dans le sens des y négatifs).



Le graphe de f est situé "en-dessous" des tangentes.

Point d'inflexion

Définition :

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

Alors $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$. Alors $(x_0\,, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si la courbe change de concavité en x_0.

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

Alors $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si la courbe change de concavité en x_0.

En d'autres termes, f admet un point d'inflexion en x_0

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.
Alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si la courbe change de concavité en x_0.
En d'autres termes, f admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' change de signe en x_0.

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.
Alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si la courbe change de concavité en x_0.
En d'autres termes, f admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' change de signe en x_0.

Remarque :

Point d'inflexion

Définition :
Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.
Alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si la courbe change de concavité en x_0.
En d'autres termes, f admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' change de signe en x_0.

Remarque : Si f est continûment dérivable en x_0,

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.
Alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si la courbe change de concavité en x_0.
En d'autres termes, f admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' change de signe en x_0.

Remarque : Si f est continûment dérivable en x_0, alors si f admet un point d'inflexion en x_0,

Point d'inflexion

Définition :

Soit f continue sur I et deux fois dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.
Alors $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion du graphe de f si la courbe change de concavité en x_0.
En d'autres termes, f admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' change de signe en x_0.

Remarque : Si f est continûment dérivable en x_0, alors si f admet un point d'inflexion en x_0, le point $(x_0, f'(x_0))$ est un extremum de f'.

Trois exemples

Exemple 1 :

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.$

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[\,. \qquad f'(x) = \cos(x)$

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[\,.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.\quad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

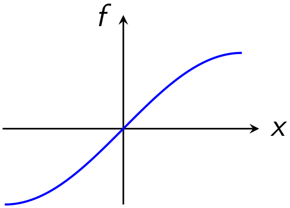
La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

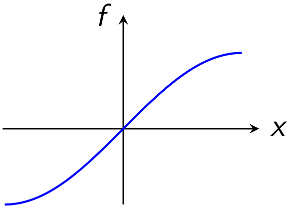


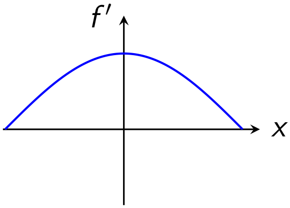
Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$



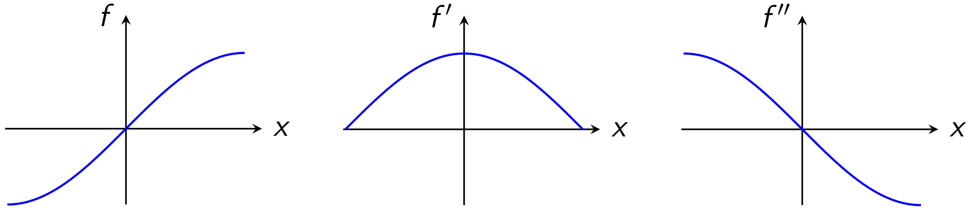


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.\quad f'(x) = \cos(x)\quad$ et $\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

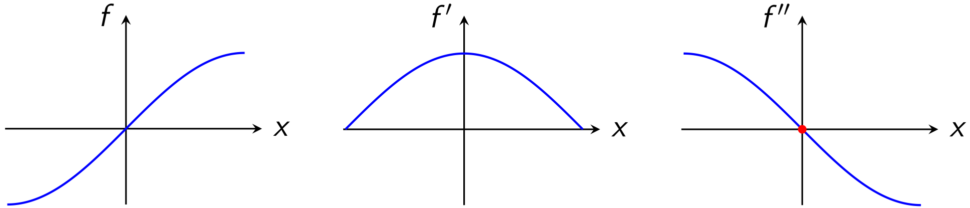


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[\,.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

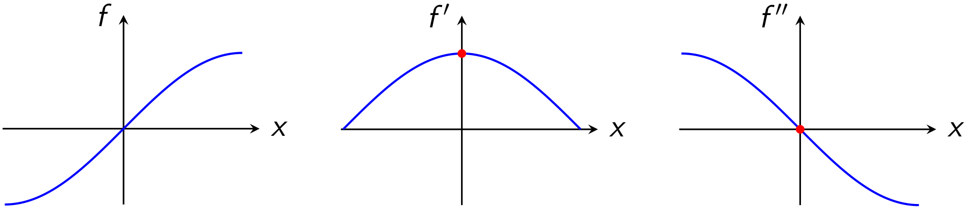


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\,.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

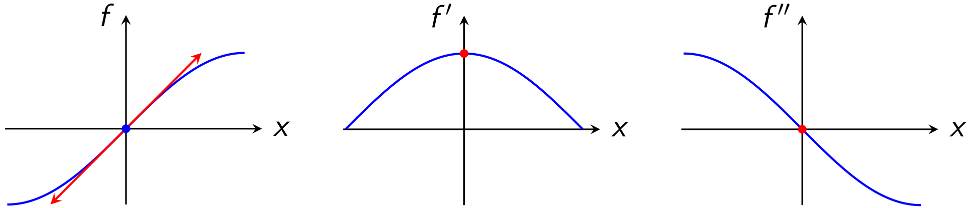


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

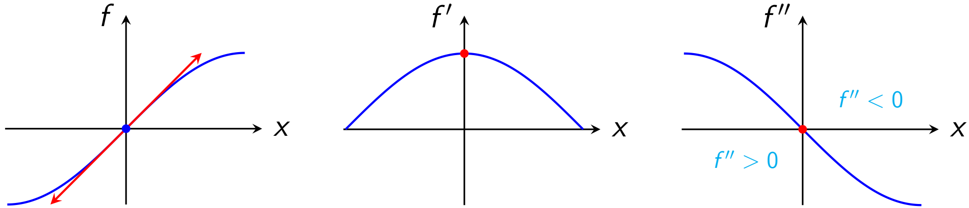


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \,]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,[\,.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

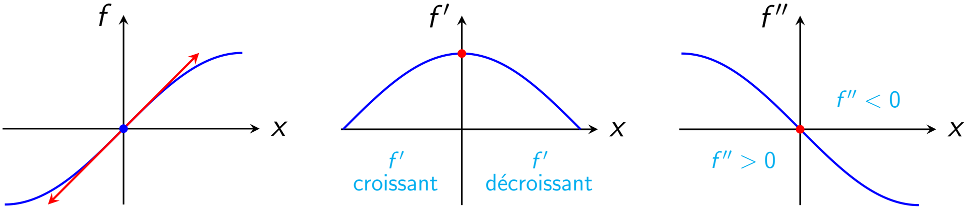


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\,.\quad f'(x) = \cos(x)$ et $f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

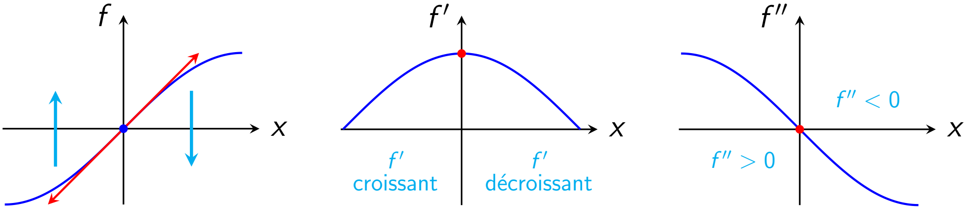


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\;\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\,. \qquad f'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$

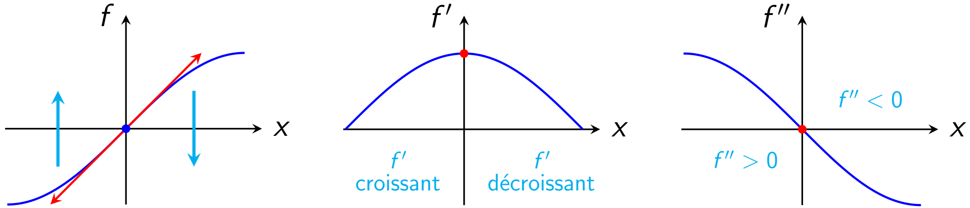


Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\;\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\,.\qquad f'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$



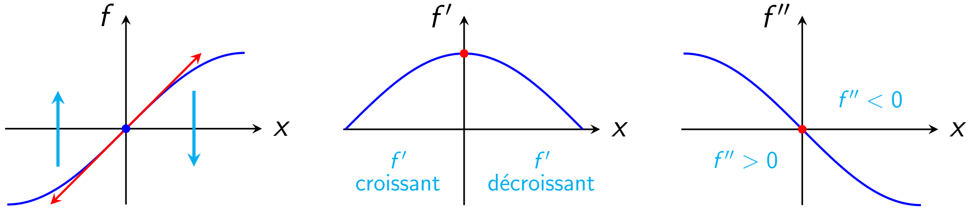
L'origine O

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,,\;\; x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\,.\qquad f'(x) = \cos(x)\quad \text{et}\quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$



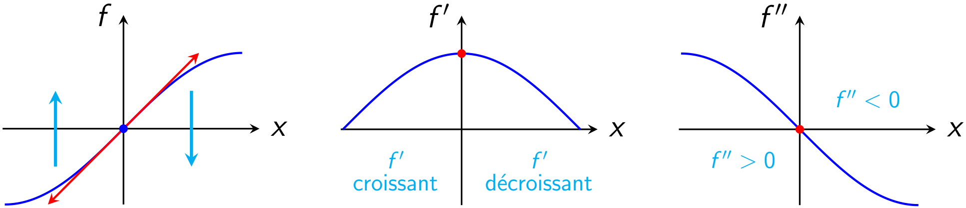
L'origine O est un point d'inflexion du graphe de f

Trois exemples

Exemple 1 :

$f(x) = \sin(x)\,, \; x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right[\,. \quad f'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = -\sin(x)\,.$

La dérivée seconde f'' change de signe en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1\,.$



L'origine O est un point d'inflexion du graphe de f à tangente oblique.

Trois exemples

Exemple 2 :

Trois exemples

Exemple 2 :

$f(x) = \sqrt[3]{x}\,,$

Trois exemples

Exemple 2 :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

Trois exemples

Exemple 2 :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\,,$$

Trois exemples

Exemple 2 :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}, \quad D_{f''} = \mathbb{R}^*,$$

Trois exemples

Exemple 2 :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\,, \quad D_{f''} = \mathbb{R}^*,$$

mais f'' change de signe en $x_0 = 0\,.$

Trois exemples

Exemple 2 :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad f'(x) = \frac{1}{3\,\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\,\sqrt[3]{x^5}}\,, \quad D_{f''} = \mathbb{R}^*,$$

mais f'' change de signe en $x_0 = 0\,.$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty\,.$$

Trois exemples

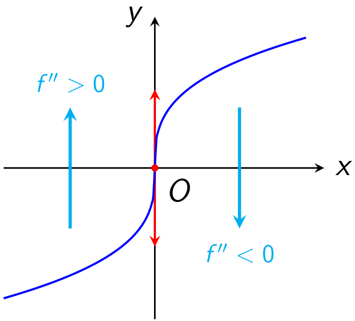
Exemple 2 :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\,, \qquad D_{f''} = \mathbb{R}^*,$$

mais f'' change de signe en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty\,.$$



Trois exemples

Exemple 2 :

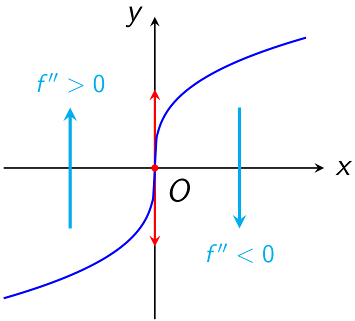
$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \qquad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\,, \qquad D_{f''} = \mathbb{R}^*,$$

mais f'' change de signe en $x_0 = 0\,.$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty\,.$$

L'origine O est un point d'inflexion du graphe de f



Trois exemples

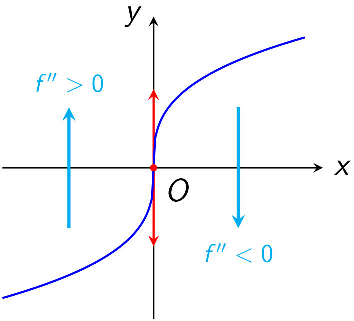
Exemple 2 :

$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$

$f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\,, \quad D_{f''} = \mathbb{R}^*,$

mais f'' change de signe en $x_0 = 0\,.$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty\,.$



L'origine O est un point d'inflexion du graphe de f à tangente verticale.

Trois exemples

Exemple 3 :

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)(2|x| - x)$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)(2|x| - x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si } x < 0 \\ & \end{cases}$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \; = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \; = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \;\; x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \;\; x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \;\; x < 0 \\ & \end{cases}$$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)(2|x| - x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \;=\begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f''(x) =$$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)(2|x| - x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ & \end{cases}$$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \; = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \;\; x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \;\; x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \;\; x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \;\; x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si} \;\; x < 0 \\ 2 & \text{si} \;\; x > 0\,. \end{cases}$$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \ = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \ \ x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \ \ x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \ \ x < 0 \\ \ 2x + 1 & \text{si} \ \ x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si} \ \ x < 0 \\ \ 2 & \text{si} \ \ x > 0\,. \end{cases}$$

f est continue et f'' change de signe en $x_0 = 0\,.$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \; = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \;\; x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \;\; x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \;\; x < 0 \\ \;\; 2x + 1 & \text{si} \;\; x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si} \;\; x < 0 \\ \;\; 2 & \text{si} \;\; x > 0\,. \end{cases}$$

f est continue et f'' change de signe en $x_0 = 0$. L'origine est donc un point d'inflexion de f.

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)(2|x| - x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

f est continue et f'' change de signe en $x_0 = 0$. L'origine est donc un point d'inflexion de f.

De plus, f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$,

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \; = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \;\; x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \;\; x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \;\; x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \;\; x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si} \;\; x < 0 \\ 2 & \text{si} \;\; x > 0\,. \end{cases}$$

f est continue et f'' change de signe en $x_0 = 0$. L'origine est donc un point d'inflexion de f.

De plus, f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, mais $f'(0^-) = -3$

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) \; = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si} \;\; x < 0 \\ x^2 + x & \text{si} \;\; x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si} \;\; x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \;\; x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si} \;\; x < 0 \\ 2 & \text{si} \;\; x > 0\,. \end{cases}$$

f est continue et f'' change de signe en $x_0 = 0$. L'origine est donc un point d'inflexion de f.

De plus, f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, mais $f'(0^-) = -3$ et $f'(0^+) = 1$.

Trois exemples

Exemple 3 : $f(x) = (x+1)\,(2\,|x| - x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x & \text{si } \; x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } \; x \geq 0\,. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si } \; x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } \; x > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } \; x < 0 \\ 2 & \text{si } \; x > 0\,. \end{cases}$$

f est continue et f'' change de signe en $x_0 = 0$. L'origine est donc un point d'inflexion de f.

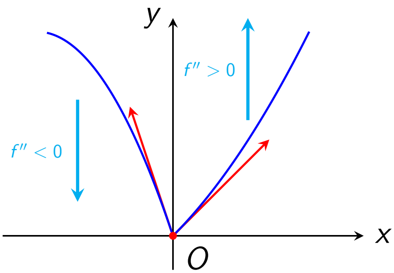
De plus, f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, mais $f'(0^-) = -3$ et $f'(0^+) = 1$. L'origine est donc aussi un point anguleux.

Exemple 3

Esquisse du graphe de f au voisinage de $x_0 = 0$.

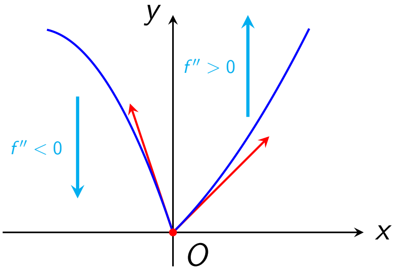
Exemple 3

Esquisse du graphe de f au voisinage de $x_0 = 0$.



Exemple 3

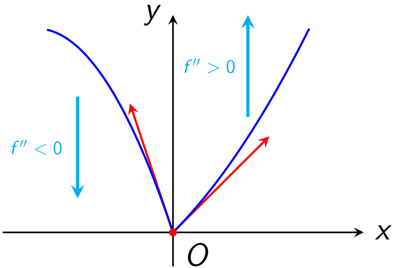
Esquisse du graphe de f au voisinage de $x_0 = 0$.



L'origine est donc un minimum,

Exemple 3

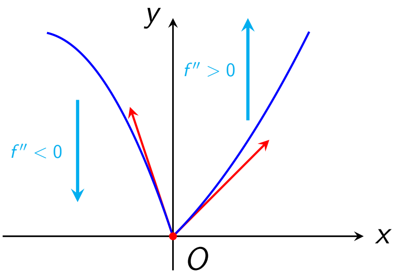
Esquisse du graphe de f au voisinage de $x_0 = 0$.



L'origine est donc un minimum, un point anguleux

Exemple 3

Esquisse du graphe de f au voisinage de $x_0 = 0$.

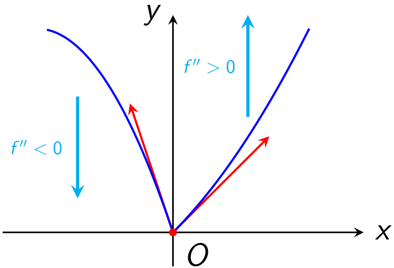


L'origine est donc un minimum, un point anguleux de demi-tangentes de pentes

$m_- = -3$

Exemple 3

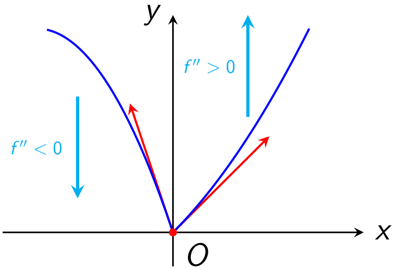
Esquisse du graphe de f au voisinage de $x_0 = 0$.



L'origine est donc un minimum, un point anguleux de demi-tangentes de pentes $m_- = -3$ et $m_+ = 1$

Exemple 3

Esquisse du graphe de f au voisinage de $x_0 = 0$.



L'origine est donc un minimum, un point anguleux de demi-tangentes de pentes $m_- = -3$ et $m_+ = 1$ et un point d'inflexion du graphe de f.

5. Branches infinies

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f,

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f lorsque une des variables : x

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f lorsque une des variables : x ou y,

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f lorsque une des variables : x ou y, ou les deux,

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f lorsque une des variables : x ou y, ou les deux, tendent vers l'infini.

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f lorsque une des variables : x ou y, ou les deux, tendent vers l'infini.

C'est donc aux "points frontières" du domaine de définition

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f lorsque une des variables : x ou y, ou les deux, tendent vers l'infini.

C'est donc aux "points frontières" du domaine de définition et du domaine de continuité de f

Branches infinies

L'étude des branches infinies du graphe de f, consiste à étudier le comportement de f lorsque une des variables : x ou y, ou les deux, tendent vers l'infini.

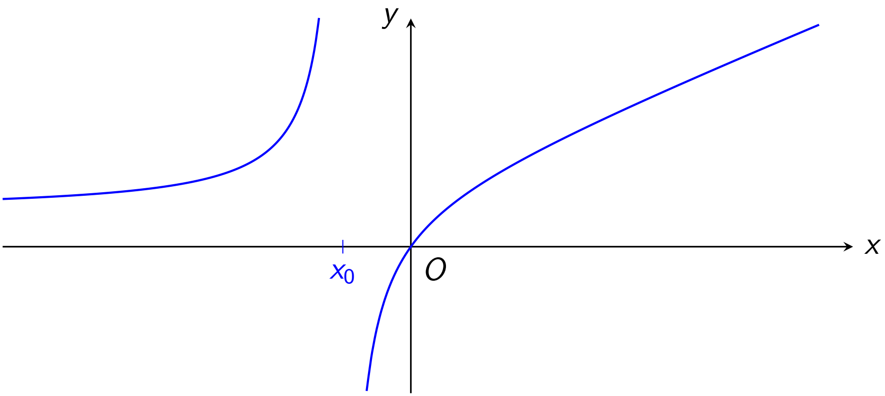
C'est donc aux "points frontières" du domaine de définition et du domaine de continuité de f que l'on va étudier le comportement de la fonction.

Branches infinies

Voici l'esquisse du graphe d'une fonction admettant trois branches infinies :

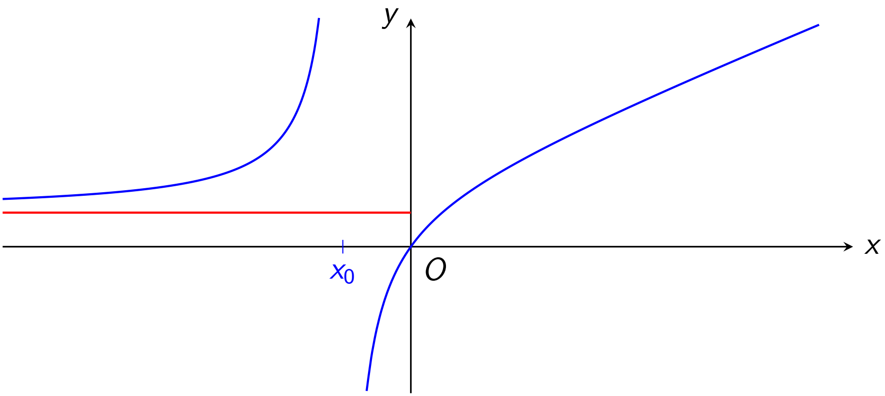
Branches infinies

Voici l'esquisse du graphe d'une fonction admettant trois branches infinies :



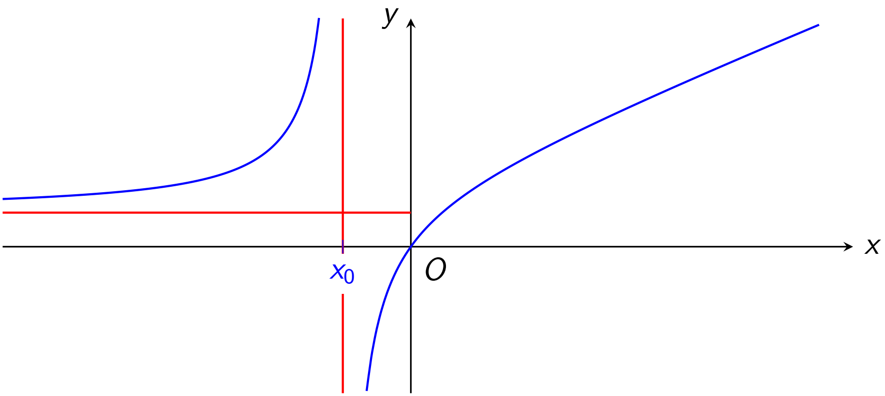
Branches infinies

Voici l'esquisse du graphe d'une fonction admettant trois branches infinies :



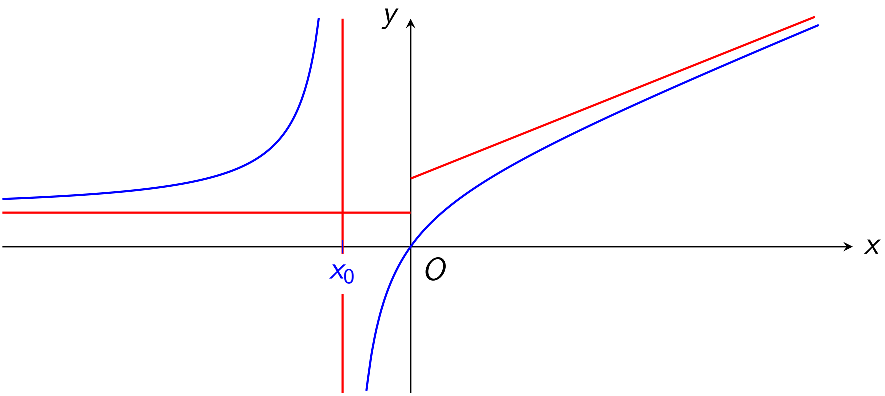
Branches infinies

Voici l'esquisse du graphe d'une fonction admettant trois branches infinies :



Branches infinies

Voici l'esquisse du graphe d'une fonction admettant trois branches infinies :



Asymptote verticale

Définition :

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0 ,

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).
La droite verticale d'équation $x = x_0$

Asymptote verticale

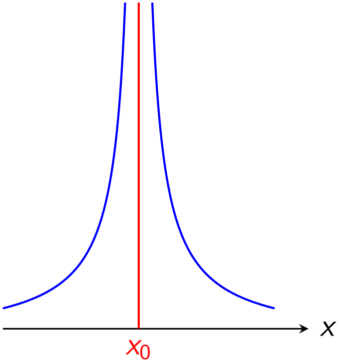
Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).
La droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale du graphe de f

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).
La droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale du graphe de f si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).
La droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale du graphe de f si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

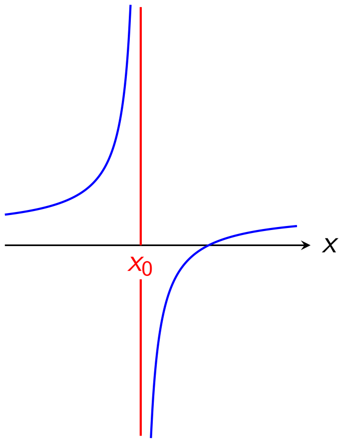


Exemples :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).
La droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale du graphe de f si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.



Exemples :

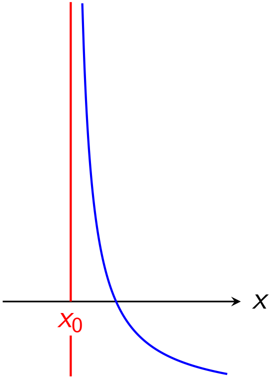
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$,

Asymptote verticale

Définition : Soit f définie sur un voisinage épointé de x_0, (éventuellement voisinage à gauche ou à droite de x_0).
La droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale du graphe de f si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Exemples :

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.



Asymptote horizontale

Définition :

Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.

Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.

La droite horizontale d'équation $y = y_0$

Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.

La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale du graphe de f

Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.
La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale du graphe de f si $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$.

Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.
La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale du graphe de f si $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$.

Exemple :

Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.
La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale du graphe de f si $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$.

Exemple : Le graphe de $\arctan(x)$

Asymptote horizontale

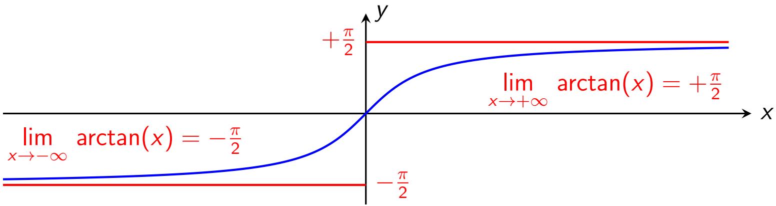
Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.
La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale du graphe de f si $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$.

Exemple : Le graphe de $\arctan(x)$ admet deux asymptotes horizontales :

Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini.
La droite horizontale d'équation $y = y_0$ est une asymptote horizontale du graphe de f si $\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$.

Exemple : Le graphe de $\arctan(x)$ admet deux asymptotes horizontales :



Asymptote oblique

Définition :

Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini,

Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini, telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini, telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

La droite oblique d'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$,

Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini, telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

La droite oblique d'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$, est une asymptote oblique du graphe de f

Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini, telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

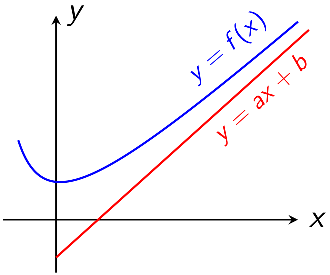
La droite oblique d'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$, est une asymptote oblique du graphe de f si $\lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - (ax+b)\,] = 0$.

Asymptote oblique

Définition :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de l'infini, telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

La droite oblique d'équation $y = ax + b$, $a \neq 0$, est une asymptote oblique du graphe de f si $\lim_{x \to \infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$.



Asymptote oblique

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f ,

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f, alors $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - (ax + b) \,] = 0$.

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f, alors $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$.

On pose $r(x) = f(x) - (ax + b)$,

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f, alors $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - (ax + b) \,] = 0$.

On pose $r(x) = f(x) - (ax + b)$, on a donc $\lim\limits_{x \to \infty} r(x) = 0$.

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f, alors $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

On pose $r(x) = f(x) - (ax + b)$, on a donc $\lim\limits_{x \to \infty} r(x) = 0$.

$f(x) = ax + b + r(x)$

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f , alors $\lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$.

On pose $r(x) = f(x) - (ax + b)$, on a donc $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$.

$$f(x) = ax + b + r(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{r(x)}{x}$$

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [\,f(x) - (ax+b)\,] = 0$.

On pose $r(x) = f(x) - (ax+b)$, on a donc $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$.

$$f(x) = ax + b + r(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{r(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a\,.$$

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - (ax+b)\,] = 0$.

On pose $r(x) = f(x) - (ax+b)$, on a donc $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$.

$$f(x) = ax + b + r(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{r(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a\,.$$

Et $f(x) - ax = b + r(x)$

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, si $y = ax + b$ est l'équation d'une asymptote oblique de f, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$.

On pose $r(x) = f(x) - (ax + b)$, on a donc $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$.

$$f(x) = ax + b + r(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{r(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a\,.$$

Et $\quad f(x) - ax = b + r(x) \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - ax\,] = b$.

Asymptote oblique

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

Asymptote oblique

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on cherche à déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, en calculant :

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on cherche à déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, en calculant :

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Asymptote oblique

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on cherche à déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, en calculant :

- $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe,

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on cherche à déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, en calculant :

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe, on la note a et on calcule :

Asymptote oblique

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on cherche à déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, en calculant :

- $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe, on la note a et on calcule :
- $\lim_{x \to \infty} [\, f(x) - a \cdot x\,]$.

Asymptote oblique

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on cherche à déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, en calculant :

- $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe, on la note a et on calcule :
- $\lim_{x \to \infty} [f(x) - a \cdot x]$. Si cette limite existe, on la note b

Asymptote oblique

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, on cherche à déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, en calculant :

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Si cette limite existe, on la note a et on calcule :
- $\lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - a \cdot x\,]$. Si cette limite existe, on la note b et on en déduit que le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$, lorsque $x \to \infty$.

Asymptote oblique

Exemple :

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$.

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty .$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty .$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty \,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty\,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} = -\infty$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty\,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty .$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

On recherche donc une éventuelle asymptote oblique :

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

On recherche donc une éventuelle asymptote oblique :

$$* \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}{x}$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty .$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \tfrac{2}{x}} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

On recherche donc une éventuelle asymptote oblique :

$$* \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 + \tfrac{2}{x}}$$

Asymptote oblique

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Il y a donc deux "points frontières" :

$$x \to -\infty \qquad \text{et} \qquad x \to +\infty\,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 + \tfrac{2}{x}} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

On recherche donc une éventuelle asymptote oblique :

$$* \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 + \tfrac{2}{x}} = 1\,.$$

Exemple

* $\lim_{x \to \pm\infty} [\, f(x) - 1 \cdot x \,]$

Exemple

* $\lim_{x \to \pm\infty} [\, f(x) - 1 \cdot x \,] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \right]$

Exemple

$*$ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\,f(x)-1\cdot x\,\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\,\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\,\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^3+2x^2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)^2+x\,\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}$$

Exemple

$*$ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^3+2x^2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+1}$$

Exemple

$$* \quad \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - 1 \cdot x \right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+2x^2} - x \right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3+2x^2) - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)^2 + x\,\sqrt[3]{x^3+2x^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{3}\,.$$

Exemple

$*$ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^3+2x^2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{3}\,.$$

Le graphe de f admet donc lorsque $x\to-\infty$

Exemple

$*$ $$\lim_{x\to\pm\infty}[\,f(x)-1\cdot x\,] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^3+2x^2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)^2+x\,\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{3}\,.$$

Le graphe de f admet donc lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$,

Exemple

$$* \quad \lim_{x\to\pm\infty} [\,f(x) - 1 \cdot x\,] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3 + 2x^2) - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2}\right)^2 + x\,\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}\right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{3}\,.$$

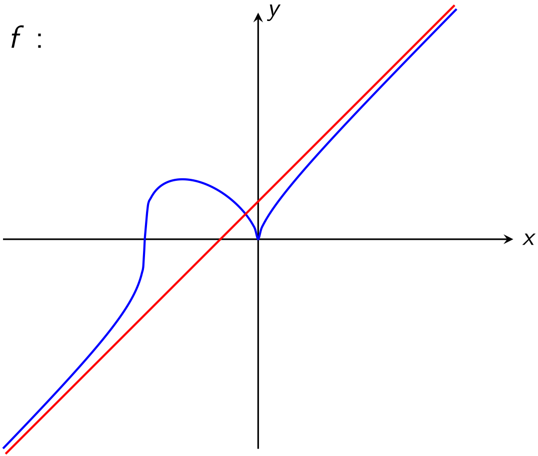
Le graphe de f admet donc lorsque $x \to -\infty$ et lorsque $x \to +\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{2}{3}$.

Exemple

Esquisse du graphe de f :

Exemple

Esquisse du graphe de f :



Branche parabolique

Définition :

Branche parabolique

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini

Branche parabolique

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty .$$

Branche parabolique

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$,

Branche parabolique

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, alors f admet une direction asymptotique de pente a.

Branche parabolique

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, alors f admet une direction asymptotique de pente a.

Et si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - a\,x] = \infty$,

Branche parabolique

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, alors f admet une direction asymptotique de pente a.

Et si $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - a\,x] = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique de direction de pente a.

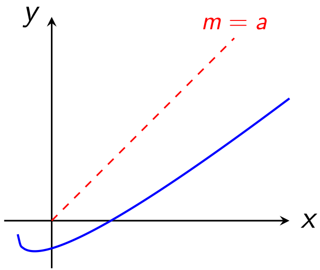
Branche parabolique

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$, alors f admet une direction asymptotique de pente a.

Et si $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - a\,x \,] = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique de direction de pente a.



Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty\,[$.

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty\,[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty\,[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

$*$ $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,, +\infty\,[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

* $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty\,[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

$*$ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -2$,

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty\,[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

$*$ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -2\,,$

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty\,[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

$*$ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -2$,

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left[\sqrt{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right]$

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

$*$ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -2$,

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left[\sqrt{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right] = +\infty$.

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\,+\infty\,[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

* $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -2$,

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left[\sqrt{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right] = +\infty$.

f admet donc une unique branche infinie.

Exemple

Exemple : Etudier les branches infinies de $f(x) = x - \sqrt{x+2}$.

$D_f = [-2\,,\, +\infty[$. On détermine les limites aux "points frontières" de D_f :

$*$ $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -2$,

$*$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left[\sqrt{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right] = +\infty$.

f admet donc une unique branche infinie. On l'étudie en commençant par déterminer une éventuelle direction asymptotique.

Exemple

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Exemple

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right]$

Exemple

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right] = 1\,,$

Exemple

* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right] = 1$, le graphe de f admet donc une direction asymptotique de pente $m = 1$, lorsque $x \to +\infty$.

Exemple

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\,\right] = 1$, le graphe de f admet donc une direction asymptotique de pente $m = 1$, lorsque $x \to +\infty$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} [\, f(x) - x\,]$

Exemple

$*$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right] = 1$, le graphe de f admet donc une direction asymptotique de pente $m = 1$, lorsque $x \to +\infty$.

$*$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [\, f(x) - x\,] = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x+2}$

Exemple

* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right] = 1$, le graphe de f admet donc une direction asymptotique de pente $m=1$, lorsque $x\to+\infty$.

* $\lim_{x\to+\infty} [\,f(x)-x\,] = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x+2} = -\infty$.

Exemple

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right] = 1$, le graphe de f admet donc une direction asymptotique de pente $m = 1$, lorsque $x \to +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - x \,] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x + 2} = -\infty$.

  Il n'y a donc pas d'asymptote oblique, lorsque $x \to +\infty$,

Exemple

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \right] = 1$, le graphe de f admet donc une direction asymptotique de pente $m = 1$, lorsque $x \to +\infty$.

* $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - x \,] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x+2} = -\infty$.

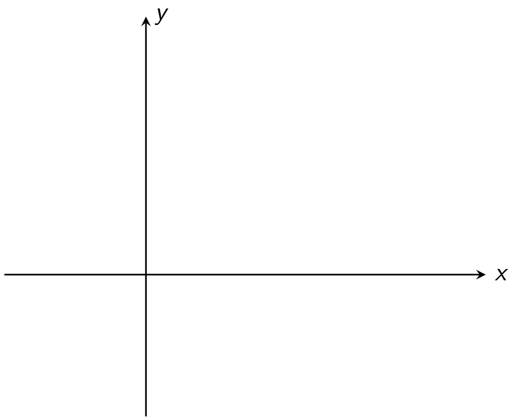
  Il n'y a donc pas d'asymptote oblique, lorsque $x \to +\infty$, mais une branche parabolique de direction de pente $m = 1$.

Exemple

Esquisse du graphe de f :

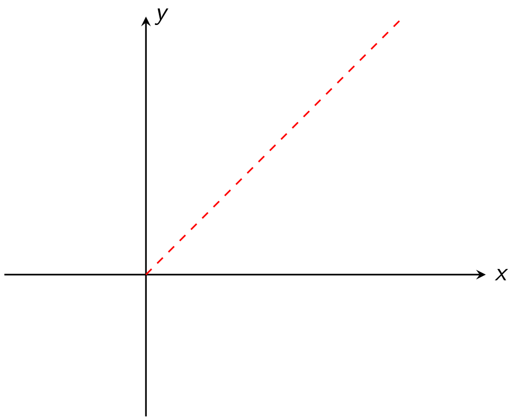
Exemple

Esquisse du graphe de f :



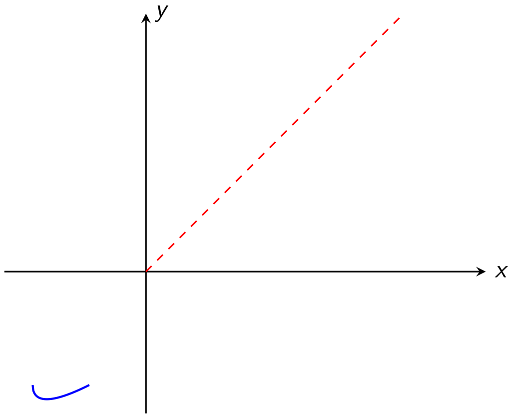
Exemple

Esquisse du graphe de f :



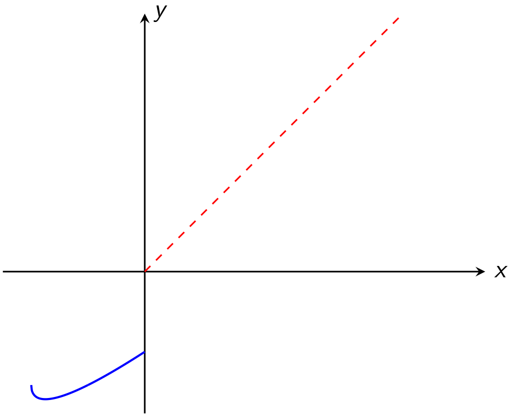
Exemple

Esquisse du graphe de f :



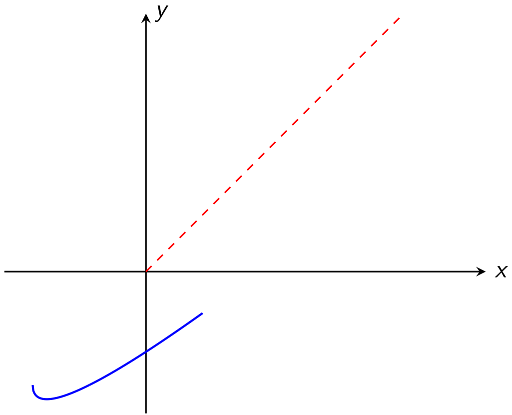
Exemple

Esquisse du graphe de f :



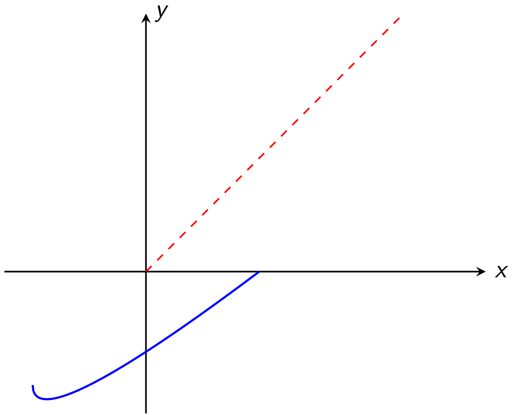
Exemple

Esquisse du graphe de f :



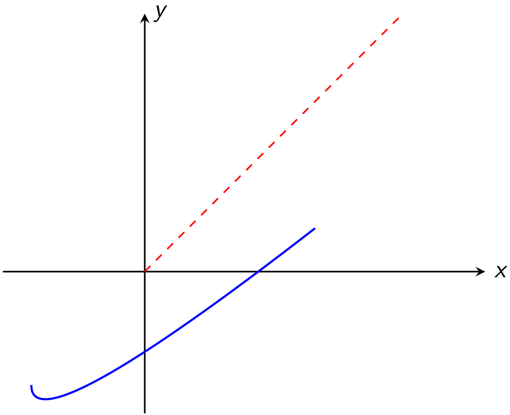
Exemple

Esquisse du graphe de f :



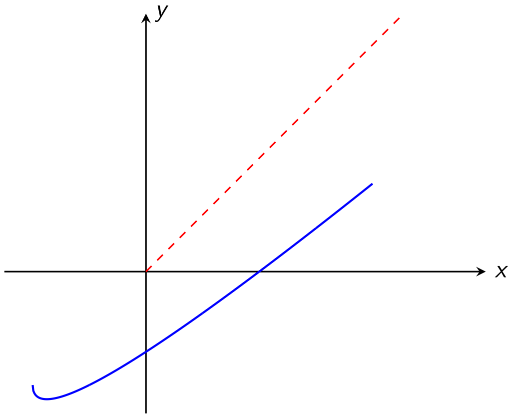
Exemple

Esquisse du graphe de f :



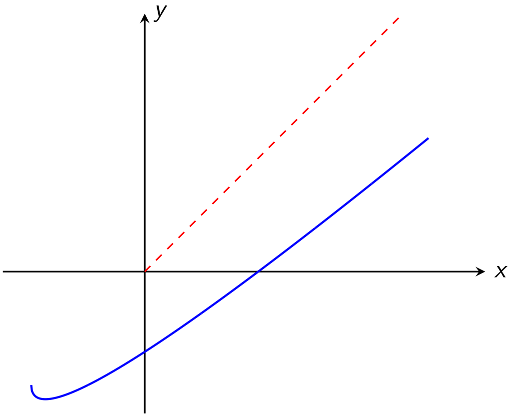
Exemple

Esquisse du graphe de f :



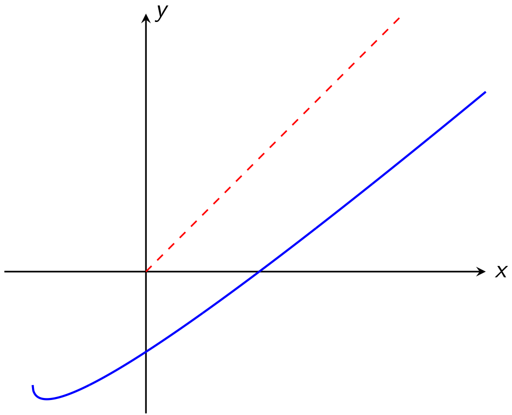
Exemple

Esquisse du graphe de f :



Exemple

Esquisse du graphe de f :



Branche parabolique

Remarque :

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$,

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - 0\,x\,]$

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [\, f(x) - 0\, x\,] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [\,f(x) - 0\,x\,] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim_{x \to \infty} [\, f(x) - 0\, x\,] = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

f admet donc une branche parabolique

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - 0\, x\,] = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

f admet donc une branche parabolique horizontale.

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim_{x \to \infty} [f(x) - 0x] = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

f admet donc une branche parabolique horizontale.

Exemple :

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - 0\,x] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

f admet donc une branche parabolique horizontale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = \sqrt{x}$:

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - 0\,x] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

f admet donc une branche parabolique horizontale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - 0\, x \,] = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

f admet donc une branche parabolique horizontale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = \sqrt{x}$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 0$.

Branche parabolique

Remarque : Soit f telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

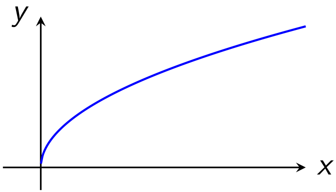
Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors $\lim_{x\to\infty} [f(x) - 0\,x] = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

f admet donc une branche parabolique horizontale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = \sqrt{x}$:

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$.



Branche parabolique verticale

Définition :

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$,

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Exemple :

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = x^2$:

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = x^2$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = x^2$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$,

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = x^2$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = x^2$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty.$$

Branche parabolique verticale

Définition :

Soit f définie sur un voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

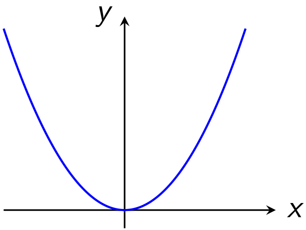
Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, on dit que f admet une branche parabolique verticale.

Exemple :

C'est le cas de $f(x) = x^2$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty,$$

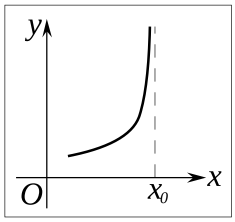
$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty.$$



Branches infinies

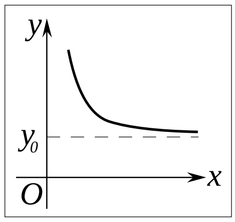
Et voici, pour finir, un résumé de la démarche de l'étude des branches infinies du graphe d'une fonction.

Branches infinies de la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.



- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,

  Γ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.



- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$,

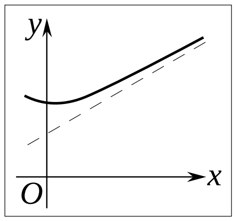
  Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.

- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, trois cas peuvent se présenter :

  ∘ si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$,

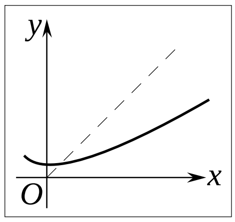
  Γ admet une direction asymptotique de pente $m = a$,

  trois cas peuvent se présenter :



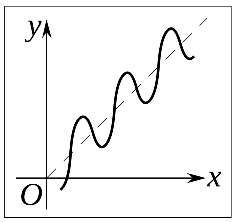
  ∗ si $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - a\,x\,] = b$,

  Γ admet une asymptote oblique d'équation
  $y = a\,x + b$.



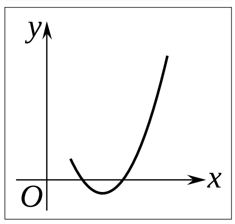
  ∗ si $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - a\,x\,] = \infty$,

  Γ admet une branche parabolique de direction
  de pente $m = a$.



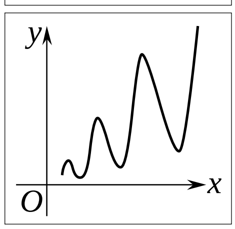
  ∗ si $\lim\limits_{x \to \infty} [\, f(x) - a\,x\,]$ n'existe pas,

  Γ n'admet ni asymptote, ni branche parabolique.



  ∘ si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$,

  Γ admet une branche parabolique de direction
  verticale.



  ∘ si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ n'existe pas,

  Γ n'admet aucune direction asymptotique.