Calcul Intégral

Calcul Intégral

3. Applications géométriques du calcul intégral

3.2 Calcul de volume

3.2 Calcul de volume

Volume d'un corps de sections d'aires connues

Volume d'un corps de sections d'aires connues

C'est une généralisation du volume d'un corps de révolution.

Volume d'un corps de sections d'aires connues

C'est une généralisation du volume d'un corps de révolution.

On considère un corps dont les sections par des plans parallèles au plan (xOy) sont d'aire connue.

Volume d'un corps de sections d'aires connues

C'est une généralisation du volume d'un corps de révolution.

On considère un corps dont les sections par des plans parallèles au plan (xOy) sont d'aire connue.

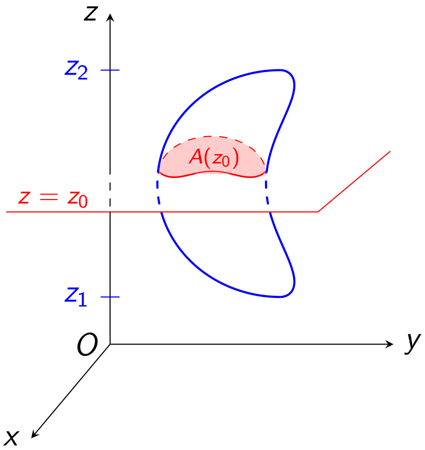
Dans le plan d'équation $z = z_0$, l'aire de cette section vaut $A(z_0)$.

Volume d'un corps de sections d'aires connues

C'est une généralisation du volume d'un corps de révolution.

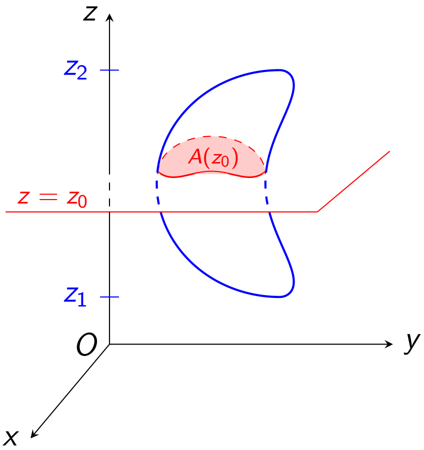
On considère un corps dont les sections par des plans parallèles au plan (xOy) sont d'aire connue.

Dans le plan d'équation $z = z_0$, l'aire de cette section vaut $A(z_0)$.



Volume d'un corps de sections d'aires connues

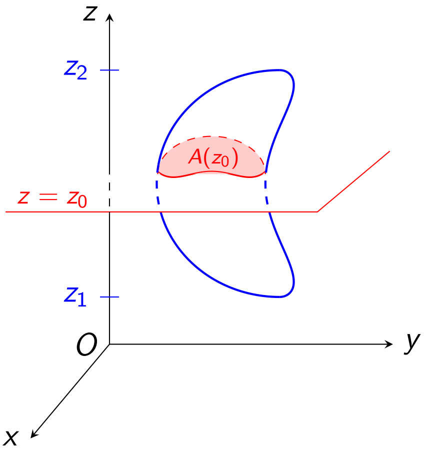
Les volumes élémentaires dV ont donc pour expression



Volume d'un corps de sections d'aires connues

Les volumes élémentaires dV ont donc pour expression

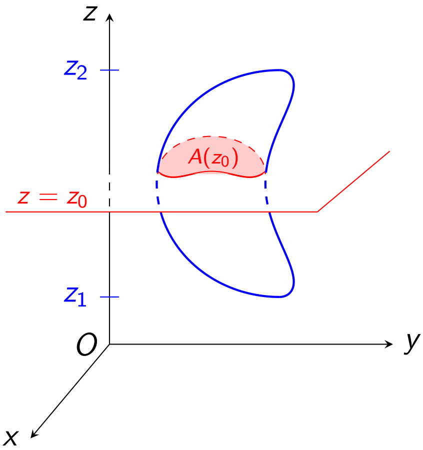
$$dV = A(z) \cdot dz \,,$$



Volume d'un corps de sections d'aires connues

Les volumes élémentaires dV ont donc pour expression

$$dV = A(z) \cdot dz \,, \qquad z_1 \leq z \leq z_2 \,.$$

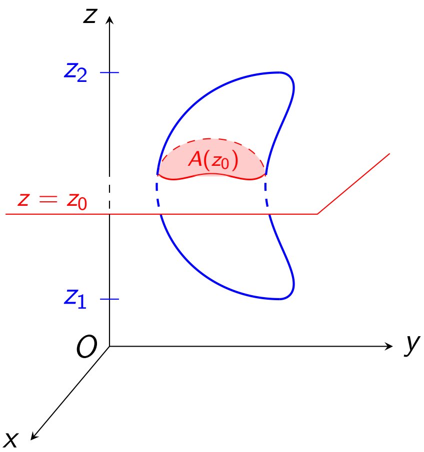


Volume d'un corps de sections d'aires connues

Les volumes élémentaires dV ont donc pour expression

$$dV = A(z) \cdot dz \,, \qquad z_1 \leq z \leq z_2 \,.$$

On en déduit le volume de ce corps en sommant tous ces volumes élémentaires :



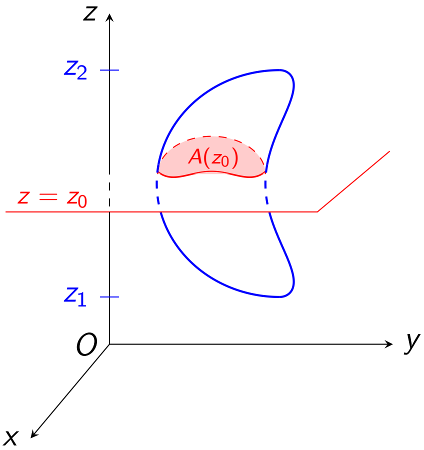
Volume d'un corps de sections d'aires connues

Les volumes élémentaires dV ont donc pour expression

$$dV = A(z) \cdot dz\,, \qquad z_1 \leq z \leq z_2\,.$$

On en déduit le volume de ce corps en sommant tous ces volumes élémentaires :

$$V = \int_{z_1}^{z_2} A(z) \cdot dz\,.$$



Exemples

Exemple 1 :

Exemples

Exemple 1 :

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$,

Exemples

Exemple 1 :

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC

Exemples

Exemple 1 :

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC tels que A est sur l'axe Oy,

Exemples

Exemple 1 :

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC tels que A est sur l'axe Oy, B, dans le plan Oxy, appartient à la droite d

Exemples

Exemple 1 :

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC tels que A est sur l'axe Oy, B, dans le plan Oxy, appartient à la droite d

$$d : \begin{cases} y = x \\ z = 0 \, , \end{cases}$$

Exemples

Exemple 1 :

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC tels que A est sur l'axe Oy, B, dans le plan Oxy, appartient à la droite d et C, dans le plan Oyz, appartient au quart de cercle Γ :

$$d : \begin{cases} y = x \\ z = 0 \,, \end{cases}$$

Exemples

Exemple 1 :

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC tels que A est sur l'axe Oy, B, dans le plan Oxy, appartient à la droite d et C, dans le plan Oyz, appartient au quart de cercle Γ :

$$d : \begin{cases} y = x \\ z = 0 \, , \end{cases} \qquad \Gamma : \begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \, , \end{cases} \qquad y \in [0\,,\,2]\,, \quad z \geq 0\,.$$

Exemple 1 :

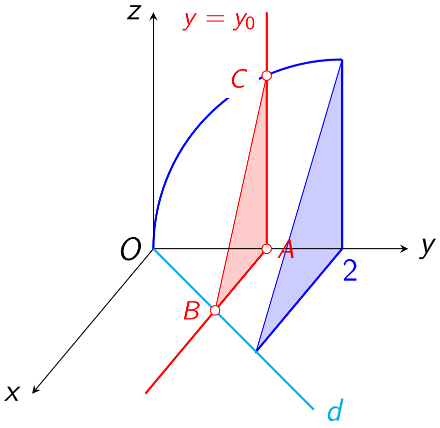
Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des triangles ABC tels que A est sur l'axe Oy, B, dans le plan Oxy, appartient à la droite d et C, dans le plan Oyz, appartient au quart de cercle Γ :

$$d: \begin{cases} y = x \\ z = 0, \end{cases} \qquad \Gamma: \begin{cases} (y-2)^2 + z^2 = 4 \\ x = 0, \end{cases} \qquad y \in [0\,,\,2], \quad z \geq 0\,.$$

Calculer le volume V de ce corps.

Exemple 1

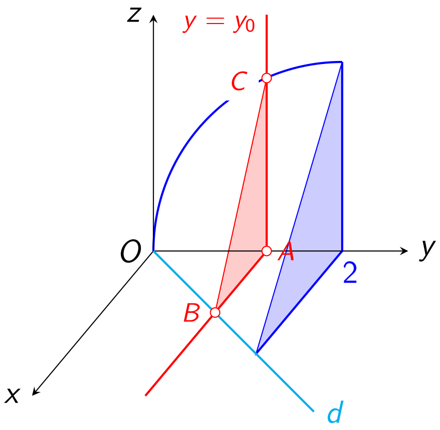
Illustration :



Exemple 1

Illustration :

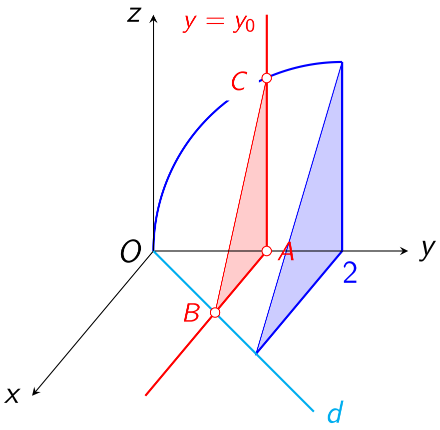
La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$, $(0 \leq y_0 \leq 2)$



Exemple 1

Illustration :

La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$, $(0 \leq y_0 \leq 2)$ est un triangle rectangle dont les sommets A, B, C ont pour coordonnées :

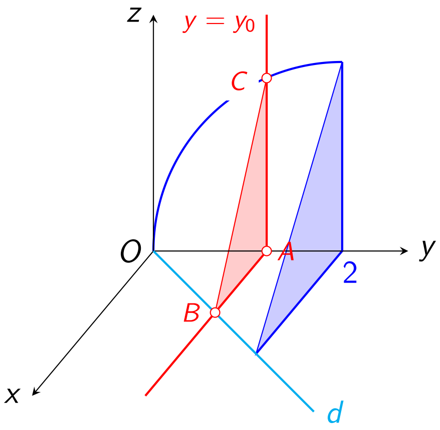


Exemple 1

Illustration :

La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$, $(0 \leq y_0 \leq 2)$ est un triangle rectangle dont les sommets A, B, C ont pour coordonnées :

$A(0, y_0, 0)$,

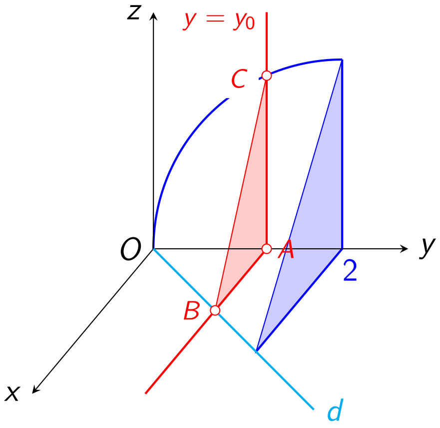


Exemple 1

Illustration :

La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$, $(0 \leq y_0 \leq 2)$ est un triangle rectangle dont les sommets A, B, C ont pour coordonnées :

$A(0, y_0, 0)$, $B(y_0, y_0, 0)$,



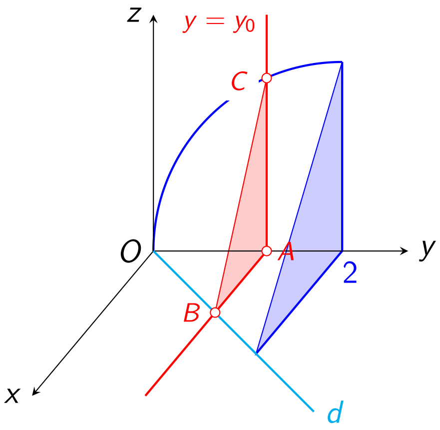
Exemple 1

Illustration :

La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$, $(0 \leq y_0 \leq 2)$ est un triangle rectangle dont les sommets A, B, C ont pour coordonnées :

$A(0, y_0, 0)$, $B(y_0, y_0, 0)$,

$C\left(0, y_0, \sqrt{4-(y_0-2)^2}\right)$.



Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4 - (y_0 - 2)^2}\,.$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4 - (y_0 - 2)^2}\,.$

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4 - (y_0 - 2)^2}\,.$

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 \mathcal{A}(y)\, dy$$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4 - (y_0 - 2)^2}$.

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, y \cdot \sqrt{4 - (y - 2)^2}\, dy$$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4 - (y_0 - 2)^2}$.

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, y \cdot \sqrt{4 - (y-2)^2}\, dy = \int_0^2 y \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4 - (y_0 - 2)^2}\,.$

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, y \cdot \sqrt{4 - (y-2)^2}\, dy = \int_0^2 y \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$$

$$= -2 \int_0^2 - \left(\tfrac{y-2}{2}\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy + 2 \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy\,.$$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4-(y_0-2)^2}$.

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, y \cdot \sqrt{4-(y-2)^2}\, dy = \int_0^2 y \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$$

$$= -2\int_0^2 -\left(\tfrac{y-2}{2}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy + 2\int_0^2 \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy\,.$$

- $\displaystyle\int_0^2 -\left(\tfrac{y-2}{2}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4-(y_0-2)^2}\,$.

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, y \cdot \sqrt{4-(y-2)^2}\, dy = \int_0^2 y \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$$

$$= -2\int_0^2 -\left(\tfrac{y-2}{2}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy + 2\int_0^2 \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy\,.$$

- $\displaystyle\int_0^2 -\left(\tfrac{y-2}{2}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy = \frac{2}{3}\, \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}^{\,3}\,\Bigg|_0^2$

Exemple 1

L'aire de cette section vaut $\mathcal{A}(y_0) = \frac{1}{2}\, x_B \cdot z_C = \frac{1}{2}\, y_0 \cdot \sqrt{4-(y_0-2)^2}$.

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 \mathcal{A}(y)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}\, y \cdot \sqrt{4-(y-2)^2}\, dy = \int_0^2 y \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$$

$$= -2\int_0^2 -\left(\tfrac{y-2}{2}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy + 2\int_0^2 \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy\,.$$

- $\displaystyle\int_0^2 -\left(\tfrac{y-2}{2}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\, dy = \frac{2}{3}\, \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}^{\,3}\,\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}\,.$

Exemple 1

- Et on intègre $\int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)$, $\quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t)$,

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)\,,\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t)\,, \qquad dy = 2\cos(t)\,dt\,,$$

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t)\,, \qquad dy = 2\cos(t)\,dt\,,$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = -1 \Leftrightarrow t = -\tfrac{\pi}{2}\,,$$

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\, dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)$, $\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\,]$:

$\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t)\,, \qquad dy = 2\,\cos(t)\,dt\,,$

$y = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(t) = -1 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad y = 2 \;\Leftrightarrow\; \sin(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0\,,$

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t)\,, \qquad dy = 2\cos(t)\,dt\,,$$

$$y=0 \Leftrightarrow \sin(t)=-1 \Leftrightarrow t=-\frac{\pi}{2}\,, \qquad y=2 \Leftrightarrow \sin(t)=0 \Leftrightarrow t=0\,,$$

$$\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2\cos^2(t)\,dt$$

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t), \qquad dy = 2\cos(t)\,dt,$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \qquad y = 2 \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,$$

$$\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2\cos^2(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 [1+\cos(2t)]\,dt$$

Exemple 1

- Et on intègre $\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\frac{y-2}{2} = \sin(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t), \qquad dy = 2\cos(t)\,dt,$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2}, \qquad y = 2 \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,$$

$$\int_0^2 \sqrt{1-\left(\frac{y-2}{2}\right)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2\cos^2(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} [1+\cos(2t)]\,dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\tfrac{y-2}{2} = \sin(t)$, $\quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t), \qquad dy = 2\cos(t)\,dt,$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = -1 \Leftrightarrow t = -\tfrac{\pi}{2}, \qquad y = 2 \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,$$

$$\int_0^2 \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2\cos^2(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 [1+\cos(2t)]\,dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple 1

- Et on intègre $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\,dy$ en posant $\tfrac{y-2}{2} = \sin(t)$, $\quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$:

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2} = \cos(t)\,, \qquad dy = 2\cos(t)\,dt\,,$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = -1 \Leftrightarrow t = -\tfrac{\pi}{2}\,, \qquad y = 2 \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0\,,$$

$$\int_0^2 \sqrt{1-\left(\tfrac{y-2}{2}\right)^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 2\cos^2(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 [1+\cos(2t)]\,dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

On en déduit donc que $V = \pi - \dfrac{4}{3}$.

Exemple 2

Exemple 2

On considère un cône de hauteur

h

Exemple 2

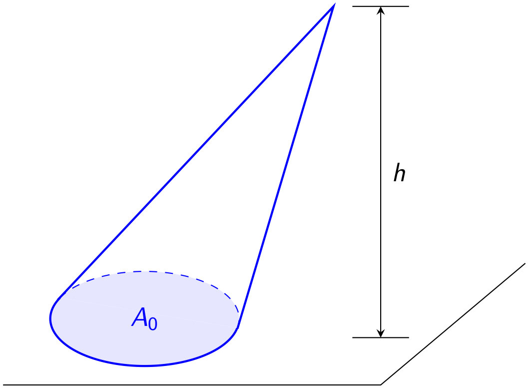
Exemple 2

On considère un cône de hauteur h et dont la base est une courbe plane fermée quelconque définissant une aire A_0 .

Exemple 2

Exemple 2

On considère un cône de hauteur h et dont la base est une courbe plane fermée quelconque définissant une aire A_0 .

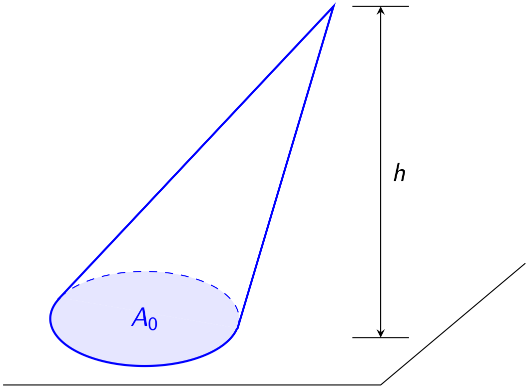


Exemple 2

Exemple 2

On considère un cône de hauteur h et dont la base est une courbe plane fermée quelconque définissant une aire A_0.

Montrons que le volume de ce cône est égal à



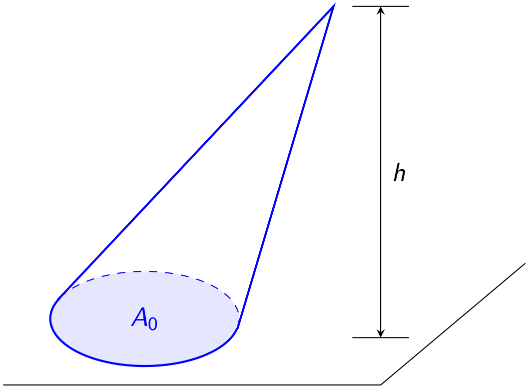
Exemple 2

Exemple 2

On considère un cône de hauteur h et dont la base est une courbe plane fermée quelconque définissant une aire A_0.

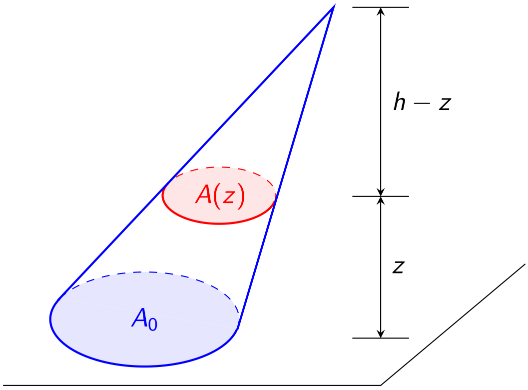
Montrons que le volume de ce cône est égal à

$$V = \frac{1}{3} A_0 \cdot h\,.$$



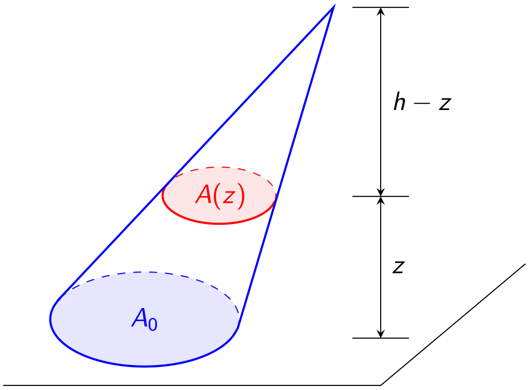
Exemple 2

La section de ce cône par un plan parallèle au plan de base



Exemple 2

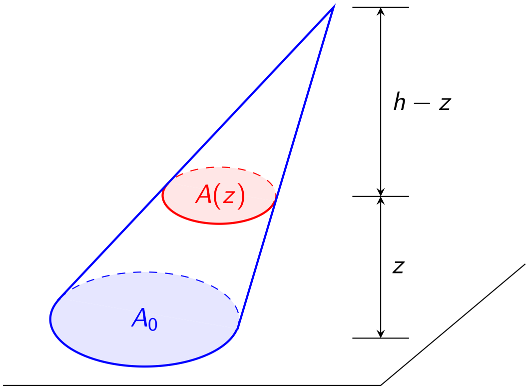
La section de ce cône par un plan parallèle au plan de base est homothétique à la base.



Exemple 2

La section de ce cône par un plan parallèle au plan de base est homothétique à la base.

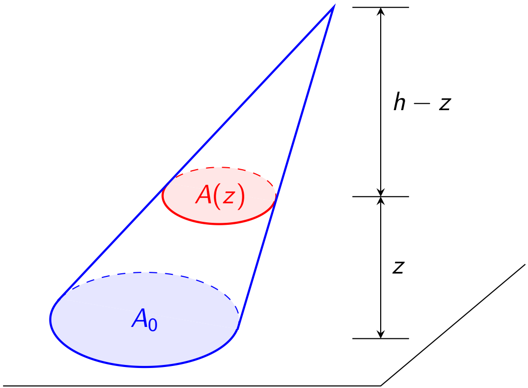
Par Thalès, le rapport des aires



Exemple 2

La section de ce cône par un plan parallèle au plan de base est homothétique à la base.

Par Thalès, le rapport des aires est égal au rapport des carrés des hauteurs correspondantes :

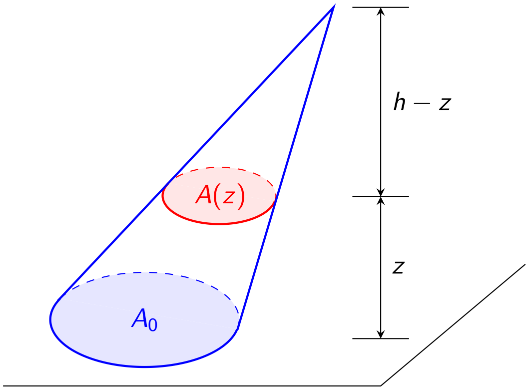


Exemple 2

La section de ce cône par un plan parallèle au plan de base est homothétique à la base.

Par Thalès, le rapport des aires est égal au rapport des carrés des hauteurs correspondantes :

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{(h-z)^2}{h^2}.$$



Exemple 2

On obtient le volume du cône en sommant les volumes élémentaires $A(z) \cdot dz$.

Exemple 2

On obtient le volume du cône en sommant les volumes élémentaires $A(z) \cdot dz$.

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{(h-z)^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A(z) \cdot dz = \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz\,.$$

Exemple 2

On obtient le volume du cône en sommant les volumes élémentaires $A(z) \cdot dz$.

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{(h-z)^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A(z) \cdot dz = \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$V = \int_0^h A(z) \cdot dz = \int_0^h \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz$$

Exemple 2

On obtient le volume du cône en sommant les volumes élémentaires $A(z) \cdot dz$.

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{(h-z)^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A(z) \cdot dz = \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$V = \int_0^h A(z) \cdot dz = \int_0^h \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz = \frac{A_0}{h^2}\int_0^h (h-z)^2 \cdot dz\,.$$

Exemple 2

On obtient le volume du cône en sommant les volumes élémentaires $A(z) \cdot dz$.

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{(h-z)^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A(z) \cdot dz = \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$V = \int_0^h A(z) \cdot dz = \int_0^h \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz = \frac{A_0}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$= \frac{A_0}{h^2}\left[-\frac{1}{3}\,(h-z)^3\right]_0^h$$

Exemple 2

On obtient le volume du cône en sommant les volumes élémentaires $A(z) \cdot dz$.

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{(h-z)^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A(z) \cdot dz = \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$V = \int_0^h A(z) \cdot dz = \int_0^h \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz = \frac{A_0}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$= \frac{A_0}{h^2}\left[-\frac{1}{3}\,(h-z)^3\right]_0^h = \frac{A_0}{h^2}\left[-\frac{1}{3}\,(0^3-h^3)\right]$$

Exemple 2

On obtient le volume du cône en sommant les volumes élémentaires $A(z) \cdot dz$.

$$\frac{A(z)}{A_0} = \frac{(h-z)^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad A(z) \cdot dz = \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$V = \int_0^h A(z) \cdot dz = \int_0^h \frac{A_0}{h^2}\,(h-z)^2 \cdot dz = \frac{A_0}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 \cdot dz\,.$$

$$= \frac{A_0}{h^2}\left[-\frac{1}{3}\,(h-z)^3\right]_0^h = \frac{A_0}{h^2}\left[-\frac{1}{3}\,(0^3 - h^3)\right] = \frac{1}{3}\,A_0 \cdot h\,.$$

Exemple 3

Exemple 3

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$,

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles ABC

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles ABC isocèles de base AB

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles ABC isocèles de base AB tels que A est sur l'axe Ox,

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles ABC isocèles de base AB tels que A est sur l'axe Ox, B est dans le plan xOy

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles ABC isocèles de base AB tels que A est sur l'axe Ox, B est dans le plan xOy et C appartient à l'arc de courbe Γ :

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles ABC isocèles de base AB tels que A est sur l'axe Ox, B est dans le plan xOy et C appartient à l'arc de courbe Γ :

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \sin^3(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [0\,,\,\tfrac{\pi}{2}]\,.$$

Exemple 3

Exemple 3

Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles ABC isocèles de base AB tels que A est sur l'axe Ox, B est dans le plan xOy et C appartient à l'arc de courbe Γ :

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = 1 - \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \sin^3(t), \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Calculer le volume V de ce corps.

Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation

$x = x_0$

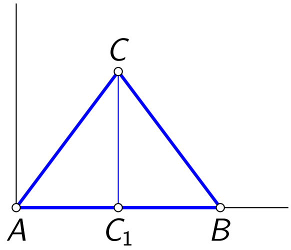
Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation

$x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle

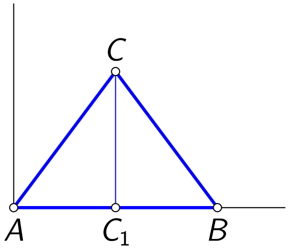
Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation
$x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle



Exemple 3

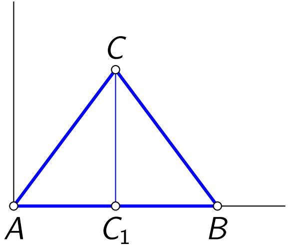
La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle dont l'aire vaut $\mathcal{A} = AC_1 \times CC_1$,



Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle dont l'aire vaut $\mathcal{A} = AC_1 \times CC_1$, avec

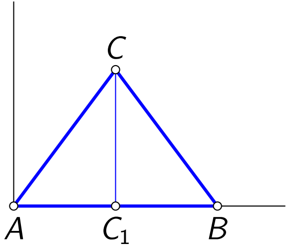
$A\,(x(t_0)\,,\,0\,,\,0)\,,$



Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle dont l'aire vaut $\mathcal{A} = AC_1 \times CC_1$, avec

$A\,(x(t_0)\,,\,0\,,\,0)\,,\quad C\,(x(t_0)\,,\,y(t_0)\,,\,z(t_0))\,,$

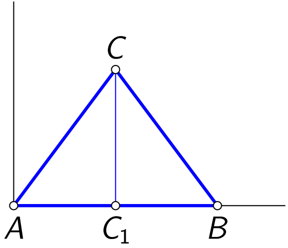


Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle dont l'aire vaut $\mathcal{A} = AC_1 \times CC_1$, avec

$A\,(x(t_0)\,,\,0\,,\,0)\,, \quad C\,(x(t_0)\,,\,y(t_0)\,,\,z(t_0))\,,$

$$C_1\,(x(t_0)\,,\,y(t_0)\,,\,0)\,.$$

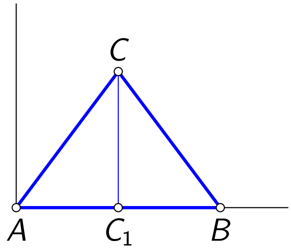


Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle dont l'aire vaut $\mathcal{A} = AC_1 \times CC_1$, avec

$A\,(x(t_0)\,,\,0\,,\,0)\,,\quad C\,(x(t_0)\,,\,y(t_0)\,,\,z(t_0))\,,$

$$C_1\,(x(t_0)\,,\,y(t_0)\,,\,0)\,.$$



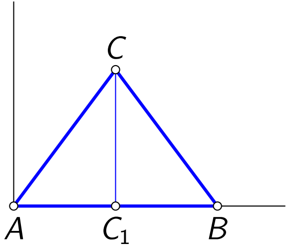
D'où l'expression de l'aire de la section :

Exemple 3

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0 = x(t_0)$ est un triangle isocèle dont l'aire vaut $\mathcal{A} = AC_1 \times CC_1$, avec

$$A\,(x(t_0)\,,\,0\,,\,0)\,,\qquad C\,(x(t_0)\,,\,y(t_0)\,,\,z(t_0))\,,$$

$$C_1\,(x(t_0)\,,\,y(t_0)\,,\,0)\,.$$



D'où l'expression de l'aire de la section : $\mathcal{A}(t_0) = y(t_0) \cdot z(t_0) = \sin^4(t_0)\,.$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps :

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $V = \int_\Gamma \mathcal{A} \, dx$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $\quad V = \displaystyle\int_\Gamma \mathcal{A}\; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,.$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $V = \int_\Gamma \mathcal{A}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,.$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \cdot \sin(t)\, dt$$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $V = \int_\Gamma \mathcal{A}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,.$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \cdot \sin(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos^2(t)\right]^2 \cdot \sin(t)\, dt$$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $\quad V = \int_\Gamma \mathcal{A} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}(t) \cdot \dot{x}(t) \, dt \, .$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \cdot \sin(t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos^2(t) \right]^2 \cdot \sin(t) \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2 \cos^2(t) + \cos^4(t) \right] \cdot \sin(t) \, dt$$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $V = \int_\Gamma \mathcal{A}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,.$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \cdot \sin(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos^2(t)\right]^2 \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2\cos^2(t) + \cos^4(t)\right] \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= \left[-\cos(t) + \frac{2}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{5}\cos^5(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $\quad V = \int_\Gamma \mathcal{A}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,.$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \cdot \sin(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\, 1 - \cos^2(t) \,\big]^2 \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\, 1 - 2\,\cos^2(t) + \cos^4(t) \,\big] \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= \left[-\cos(t) + \frac{2}{3}\,\cos^3(t) - \frac{1}{5}\cos^5(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[0 - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) \right]$$

Exemple 3

On en déduit le volume V de ce corps : $V = \int_\Gamma \mathcal{A}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{A}(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,.$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(t) \cdot \sin(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \cos^2(t)\right]^2 \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2\cos^2(t) + \cos^4(t)\right] \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= \left[-\cos(t) + \frac{2}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{5}\cos^5(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[0 - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{8}{15}\,.$$