Chapitre 5.

Variation locale d’une fonction

Chapitre 5.

Variation locale d'une fonction

1. Croissance, décroissance

Croissance, décroissance

Théorème :

Croissance, décroissance

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Croissance, décroissance

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

i) Si $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$,

Croissance, décroissance

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

i) Si $f'(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$ alors f est strictement croissante sur I.

Croissance, décroissance

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

i) Si $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.

ii) Si $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in I$,

Croissance, décroissance

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

i) Si $f'(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.

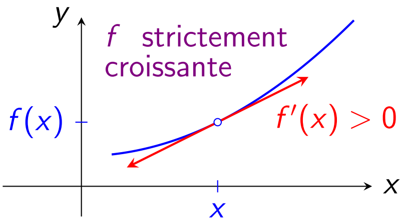
ii) Si $f'(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.

Croissance, décroissance

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

i) Si $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.

ii) Si $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.

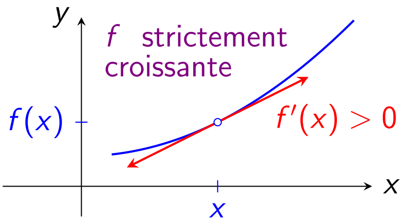


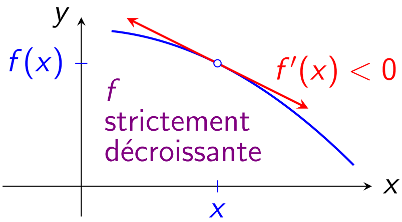
Croissance, décroissance

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

i) Si $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.

ii) Si $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.





Croissance, décroissance

Démonstration :

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$,

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne

l'existence de $c \in]\, a\,,\; b\, [$

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]\,a\,,\ b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]\,a\,,\ b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]\,a\,,\; b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0, \ \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f'(c) > 0$

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne

l'existence de $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0, \forall x \in I \Rightarrow f'(c) > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \Rightarrow f'(c) > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I.

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]\, a\,, \; b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0\,, \; \forall\, x \in I \;\Rightarrow\; f'(c) > 0 \;\Rightarrow\; f(b) - f(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ est strictement croissante sur I .

ii) $f'(x) < 0\,, \; \forall\, x \in I$

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0, \; \forall \, x \in I \;\Rightarrow\; f'(c) > 0 \;\Rightarrow\; f(b) - f(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ est strictement croissante sur I.

ii) $f'(x) < 0, \; \forall \, x \in I \;\Rightarrow\; f'(c) < 0$

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in]\,a\,,\ b\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I \quad \Rightarrow \quad f'(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ est strictement croissante sur I.

ii) $f'(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I \quad \Rightarrow \quad f'(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(b) - f(a) < 0$

Croissance, décroissance

Démonstration :

Pour tous $a, b \in I$, $a < b$, le théorème des Accroissements Finis donne l'existence de $c \in \,]a\,,\ b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Or $(b - a) > 0$, d'où

i) $f'(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I \;\Rightarrow\; f'(c) > 0 \;\Rightarrow\; f(b) - f(a) > 0 \;\Rightarrow\; f$ est strictement croissante sur I.

ii) $f'(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I \;\Rightarrow\; f'(c) < 0 \;\Rightarrow\; f(b) - f(a) < 0 \;\Rightarrow\; f$ est strictement décroissante sur I. $\square$

Croissance, décroissance

Remarque :

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

f strictement croissante sur I

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

f strictement croissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) > 0 \, , \; \forall \, x \in I \, ,$

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

f strictement croissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) > 0\,, \; \forall\, x \in I\,,$

f strictement décroissante sur I

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

f strictement croissante sur I

$\not\Rightarrow\ f'(x) > 0\,,\ \forall\ x \in I\,,$

f strictement décroissante sur I

$\not\Rightarrow\ f'(x) < 0\,,\ \forall\ x \in I\,.$

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

f strictement croissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) > 0\,, \; \forall\, x \in I\,,$

f strictement décroissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) < 0\,, \; \forall\, x \in I\,.$

Contre-exemple :

$f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

f strictement croissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) > 0\,,\ \forall\, x \in I\,,$

f strictement décroissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) < 0\,,\ \forall\, x \in I\,.$

Contre-exemple :

$f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

mais $f'(x) = 0$ en $x = 0$.

Croissance, décroissance

Remarque : La réciproque est fausse.

f strictement croissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) > 0 \,, \; \forall \; x \in I \,,$

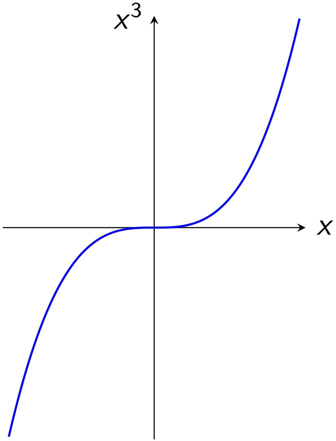
f strictement décroissante sur I

$\not\Rightarrow \; f'(x) < 0 \,, \; \forall \; x \in I \,.$

Contre-exemple :

$f(x) = x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

mais $f'(x) = 0$ en $x = 0$.



2. Extrema

Extrema

Définitions :

Extrema

Définitions : Extrema locaux.

Extrema

Définitions : Extrema locaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

Extrema

Définitions : Extrema locaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

$*$ $f(x_0)$ est un maximum local de f

Extrema

Définitions : Extrema locaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

$*$ $f(x_0)$ est un maximum local de f

si $\exists\, \delta > 0$

Extrema

Définitions : Extrema locaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

* $f(x_0)$ est un maximum local de f

  si $\exists\, \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \,]\, x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta\,[\, \cap D_f$,

Extrema

Définitions : Extrema locaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

$\ast$ $f(x_0)$ est un maximum local de f

si $\exists\, \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \,]\, x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta\,[\, \cap D_f$,

$\ast$ $f(x_0)$ est un minimum local de f

Extrema

Définitions : Extrema locaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

$*$ $f(x_0)$ est un maximum local de f

si $\exists\, \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[\, \cap D_f$,

$*$ $f(x_0)$ est un minimum local de f

si $\exists\, \delta > 0$

Extrema

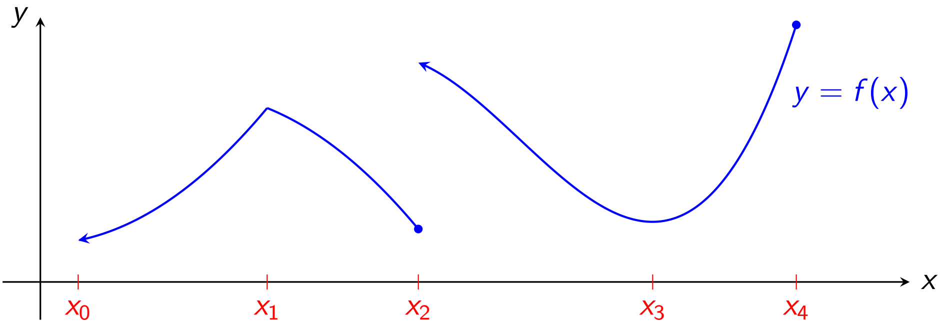
Définitions : Extrema locaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

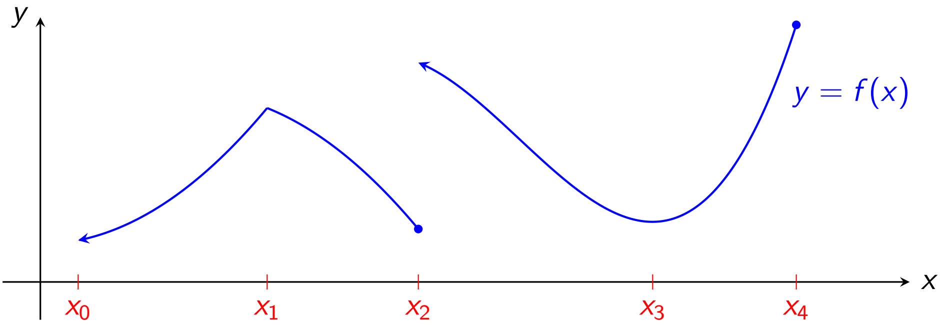
* $f(x_0)$ est un maximum local de f
  si $\exists\, \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[\, \cap D_f$,

* $f(x_0)$ est un minimum local de f
  si $\exists\, \delta > 0$ tel que $f(x) \geq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[\, \cap D_f$.

Extrema

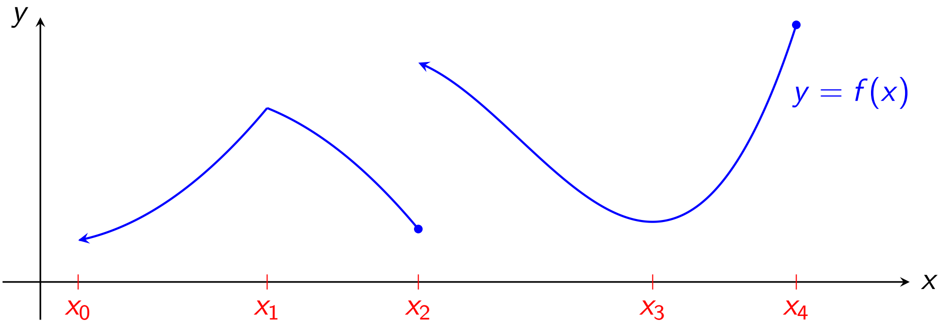


Extrema



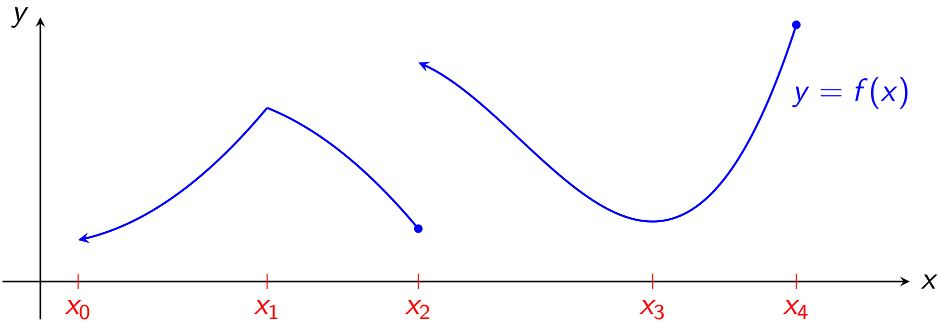
* $f(x_1)$

Extrema



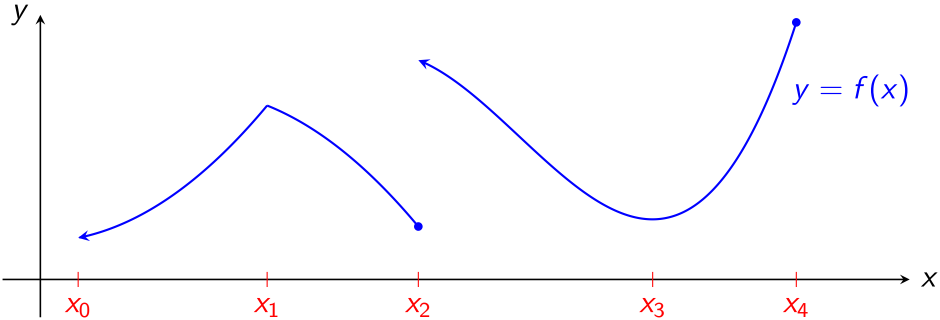
* $f(x_1)$ et $f(x_4)$

Extrema



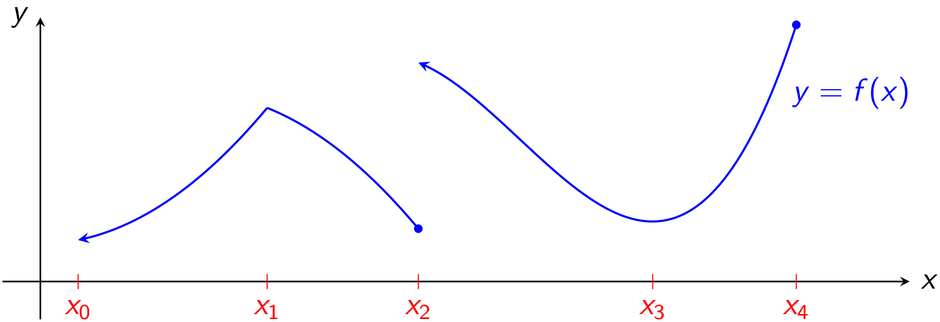
* $f(x_1)$ et $f(x_4)$ sont des maxima locaux de f.

Extrema



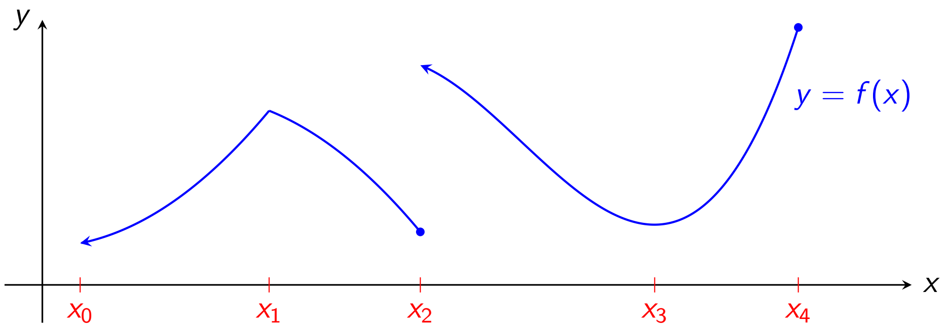
- $f(x_1)$ et $f(x_4)$ sont des maxima locaux de f.
- $f(x_2)$

Extrema



* $f(x_1)$ et $f(x_4)$ sont des maxima locaux de f.
* $f(x_2)$ et $f(x_3)$

Extrema



* $f(x_1)$ et $f(x_4)$ sont des maxima locaux de f.
* $f(x_2)$ et $f(x_3)$ sont des minima locaux de f.

Extrema

Définitions :

Extrema

Définitions : Extrema globaux.

Extrema

Définitions : Extrema globaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

Extrema

Définitions : Extrema globaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

$*$ $f(x_0)$ est un maximum global de f

Extrema

Définitions : Extrema globaux.

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

* $f(x_0)$ est un maximum global de f si $f(x) \leq f(x_0)\, ,\ \forall\, x \in D_f$,

Extrema

Définitions : Extrema globaux.

Soient $f: D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

* $f(x_0)$ est un maximum global de f si $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall\, x \in D_f$,

* $f(x_0)$ est un minimum global de f

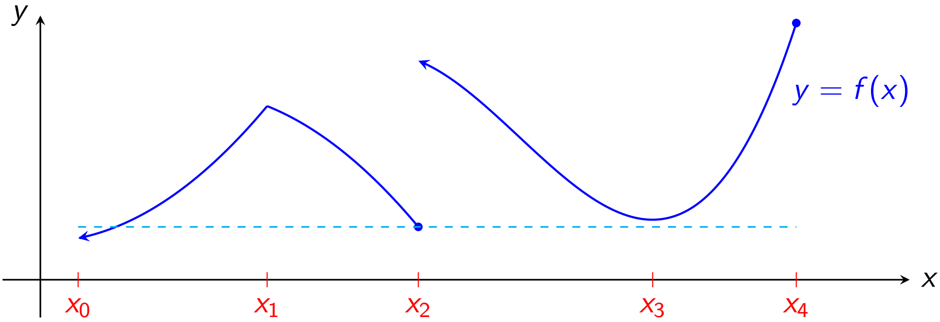
Extrema

Définitions : Extrema globaux.

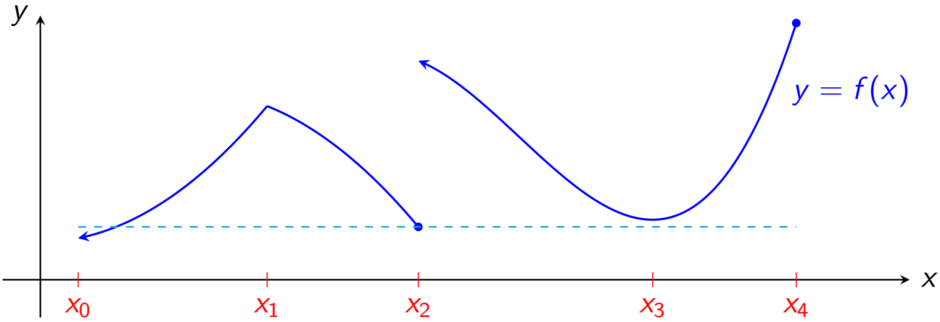
Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$,

* $f(x_0)$ est un maximum global de f si $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in D_f$,
* $f(x_0)$ est un minimum global de f si $f(x) \geq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in D_f$.

Extrema

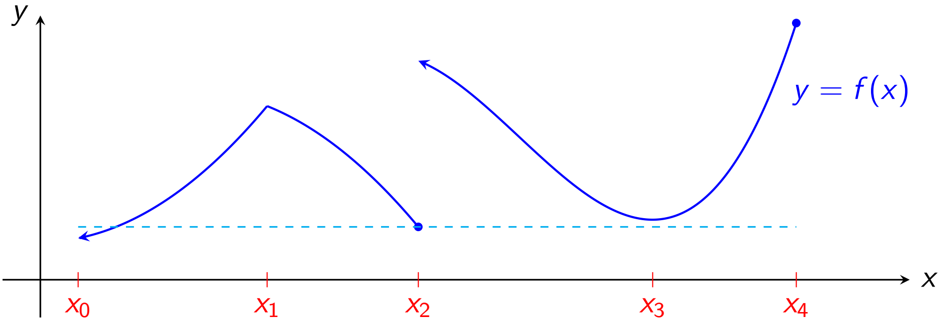


Extrema



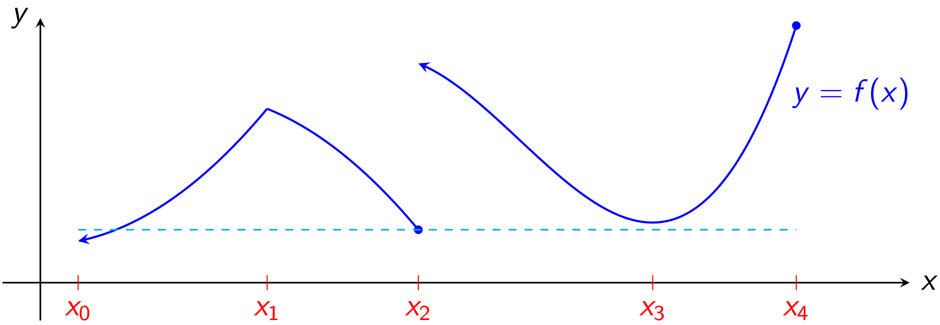
* $f(x_4)$ est le maximum global de f.

Extrema



* $f(x_4)$ est le maximum global de f.
* f n'admet pas de minimum global.

Extrema



* $f(x_4)$ est le maximum global de f.
* f n'admet pas de minimum global.

Extrema

Théorème :

Extrema

Théorème :

Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0.

Extrema

Théorème :

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0.

Si $f(x_0)$ est un extremum de f,

Extrema

Théorème :

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0.

Si $f(x_0)$ est un extremum de f,

alors $f'(x_0) = 0$.

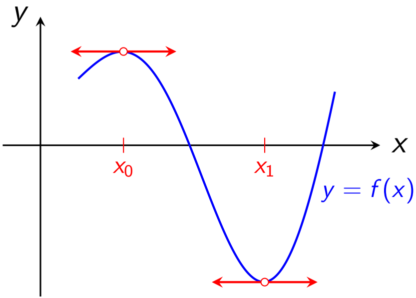
Extrema

Théorème :

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0 .

Si $f(x_0)$ est un extremum de f,

alors $f'(x_0) = 0$.



Extrema

La démonstration de ce théorème

Extrema

La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

Extrema

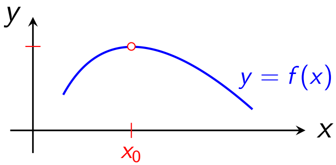
La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

Extrema

La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

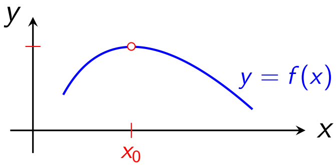


Extrema

La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

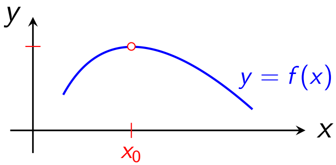
$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$,



Extrema

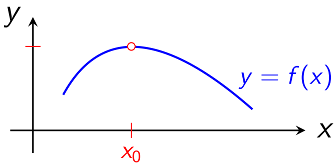
La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :



$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[\, \cap\, D_f$.

Extrema



La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

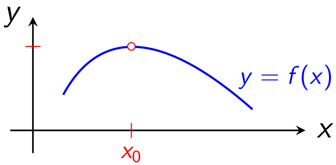
Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[\ \cap\ D_f\ .$

Soit h suffisamment petit,

Extrema

La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

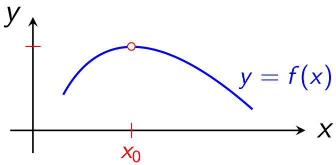


Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[\, \cap D_f\,.$

Soit h suffisamment petit, tel que $|h| < \delta$

Extrema



La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

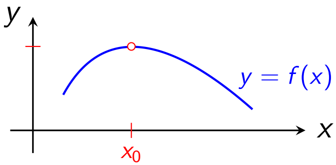
Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\, [\, \cap\, D_f$.

Soit h suffisamment petit, tel que $|h| < \delta$ et $x_0 + h \in D_f$.

Extrema

La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

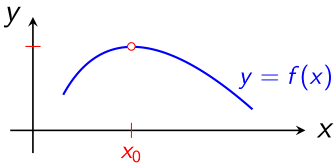


Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \left]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta \,\right[\,\cap\, D_f\,.$

Soit h suffisamment petit, tel que $|h| < \delta$ et $x_0 + h \in D_f$. f étant dérivable en x_0, on a

Extrema



La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.

Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

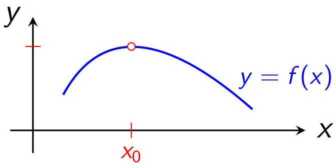
$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \,]\,x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[\, \cap\ D_f$.

Soit h suffisamment petit, tel que $|h| < \delta$ et $x_0 + h \in D_f$. f étant dérivable en x_0 , on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)\,,$$

Extrema

La démonstration de ce théorème reprend l'argument de la démonstration du théorème de Rolle.



Supposons que $f(x_0)$ est un maximum local de f :

$\exists\ \delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta\, [\, \cap\, D_f$.

Soit h suffisamment petit, tel que $|h| < \delta$ et $x_0 + h \in D_f$. f étant dérivable en x_0 , on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h)\,, \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} r(h) = 0\,.$$

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$,

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta\,[$,

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta\,[$,

donc $\quad f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0)$

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0 - \delta \,,\, x_0 + \delta \,[$,

donc $\quad f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq 0$

Extrema

Or $f(x_0+h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0-\delta\,,\, x_0+\delta\,[$,

$$\text{donc} \quad f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h\cdot [\, f'(x_0)+r(h)\,] \leq 0\,,$$

Extrema

Or $f(x_0+h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\,x_0-\delta\,,\,x_0+\delta\,[$,

$$\text{donc} \quad f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h\cdot[\,f'(x_0)+r(h)\,] \leq 0\,,$$

$*$ si $h<0$,

.

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0 - \delta\,, \, x_0 + \delta\,[$,

$$\text{donc} \quad f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h \cdot [\, f'(x_0) + r(h)\,] \leq 0\,,$$

$*$ si $h < 0\,, \quad f'(x_0) + r(h) \geq 0$

.

Extrema

Or $f(x_0+h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\,x_0-\delta\,,\,x_0+\delta\,[$,

$$\text{donc} \quad f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h\cdot[\,f'(x_0)+r(h)\,] \leq 0\,,$$

$*$ si $h<0$, $\quad f'(x_0)+r(h) \geq 0 \underset{h\to 0}{\Longrightarrow} f'(x_0) \geq 0$

.

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0 - \delta\, , \, x_0 + \delta\, [$,

$$\text{donc} \quad f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h \cdot [\, f'(x_0) + r(h)\,] \leq 0\,,$$

$*$ si $h < 0$, $\quad f'(x_0) + r(h) \geq 0 \underset{h \to 0}{\Longrightarrow} f'(x_0) \geq 0$

$*$ si $h > 0$,

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta\,[$,

$$\text{donc} \quad f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h \cdot [\, f'(x_0) + r(h)\,] \leq 0\,,$$

$*$ si $h < 0\,,\quad f'(x_0) + r(h) \geq 0 \underset{h \to 0}{\Longrightarrow} f'(x_0) \geq 0$

$*$ si $h > 0\,,\quad f'(x_0) + r(h) \leq 0$

.

Extrema

Or $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0 - \delta\, ,\, x_0 + \delta\, [$,

$$\text{donc} \quad f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot f'(x_0) + h \cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h \cdot [\, f'(x_0) + r(h)\,] \leq 0\,,$$

$$\begin{cases} * \ \text{si } h < 0\,, & f'(x_0) + r(h) \geq 0 \underset{h \to 0}{\Longrightarrow} f'(x_0) \geq 0 \\ * \ \text{si } h > 0\,, & f'(x_0) + r(h) \leq 0 \underset{h \to 0}{\Longrightarrow} f'(x_0) \leq 0 \end{cases}.$$

Extrema

Or $f(x_0+h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\,x_0-\delta\,,\,x_0+\delta\,[$,

$$\text{donc} \quad f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h\cdot[\,f'(x_0)+r(h)\,] \leq 0\,,$$

$$\left.\begin{array}{llll} * & \text{si } h<0\,, & f'(x_0)+r(h) \geq 0 \underset{h\to 0}{\Longrightarrow} & f'(x_0) \geq 0 \\ * & \text{si } h>0\,, & f'(x_0)+r(h) \leq 0 \underset{h\to 0}{\Longrightarrow} & f'(x_0) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0)=0\,.$$

Extrema

Or $f(x_0+h) \leq f(x_0)$, car $f(x_0)$ est le maximum de f sur $]\, x_0-\delta\,,\, x_0+\delta\,[$,

$$\text{donc} \quad f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad h\cdot f'(x_0)+h\cdot r(h) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h\cdot[\,f'(x_0)+r(h)\,] \leq 0\,,$$

$$\left.\begin{array}{llll} * & \text{si } h<0\,, & f'(x_0)+r(h) \geq 0 \underset{h\to 0}{\Longrightarrow} & f'(x_0) \geq 0 \\ * & \text{si } h>0\,, & f'(x_0)+r(h) \leq 0 \underset{h\to 0}{\Longrightarrow} & f'(x_0) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0)=0\,. \qquad \square$$

Extrema

Remarque :

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple :

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple : $f(x) = x^3$.

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple : $f(x) = x^3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple : $f(x) = x^3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = 0$ en $x = 0$.

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple : $f(x) = x^3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = 0$ en $x = 0$.

Mais $f(0)$ n'est pas un extremum de f .

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

Contre-exemple : $f(x) = x^3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = 0$ en $x = 0$.

Mais $f(0)$ n'est pas un extremum de f .

(f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$) .

Extrema

Remarque : La réciproque est fausse.

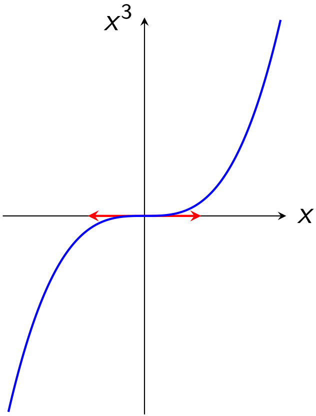
Contre-exemple : $f(x) = x^3$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = 0$ en $x = 0$.

Mais $f(0)$ n'est pas un extremum de f.

(f n'admet pas d'extremum sur $\mathbb{R}$).



Extrema

Théorème :

Extrema

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I

Extrema

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

Extrema

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

Alors $f(x_0)$ est un extremum (local) de f

Extrema

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

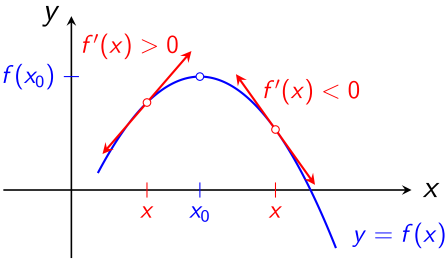
Alors $f(x_0)$ est un extremum (local) de f si f' change de signe en x_0.

Extrema

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et dérivable sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

Alors $f(x_0)$ est un extremum (local) de f si f' change de signe en x_0.

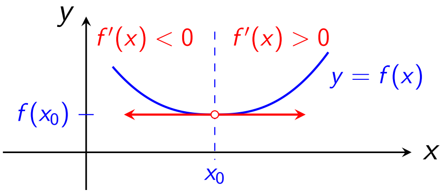


Extrema

Illustrations :

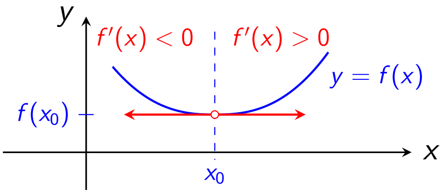
Extrema

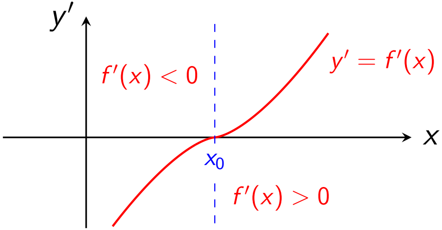
Illustrations :



Extrema

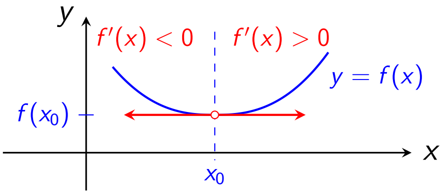
Illustrations :

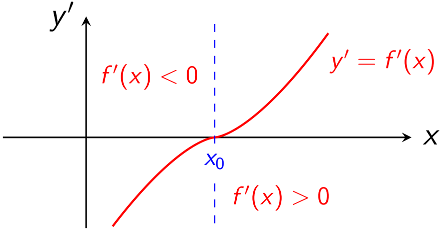


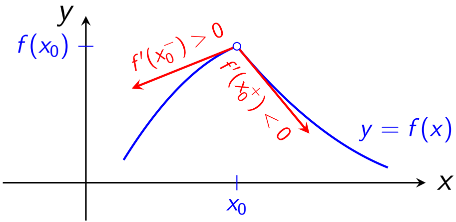


Extrema

Illustrations :

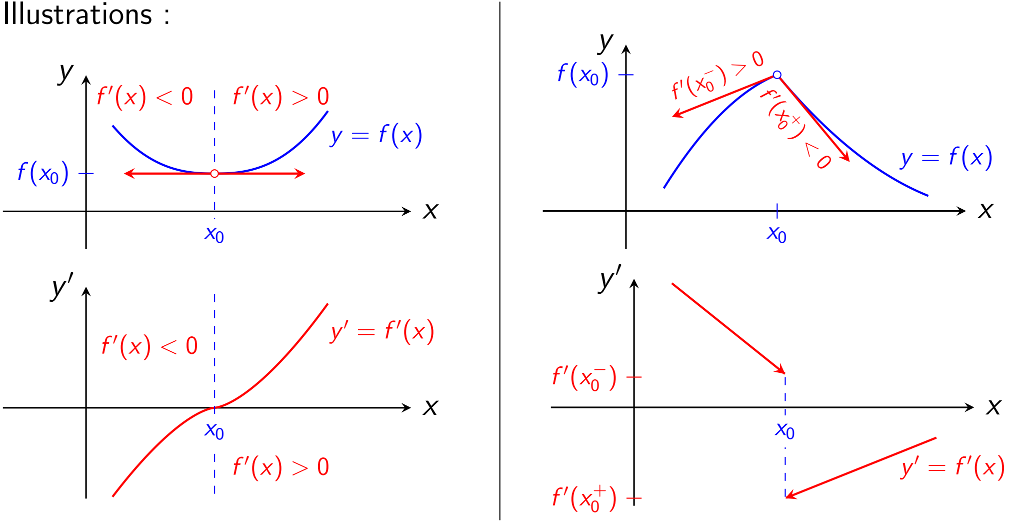






Extrema

Illustrations :



Extrema

Démonstration :

Extrema

Démonstration :

$\exists\, \delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\, [$

Extrema

Démonstration :

$\exists\, \delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\, x_0 - \delta\,,\; x_0 + \delta\,[$ et dérivable sur $]\, x_0 - \delta\,,\; x_0\,[\, \cup\,]\, x_0\,,\; x_0 + \delta\,[$.

Extrema

Démonstration :

$\exists\, \delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[$ et dérivable sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\, \cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$.

Soit $x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\, \cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$.

Extrema

Démonstration :

$\exists\, \delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\, x_0 - \delta\,,\; x_0 + \delta\,[$ et dérivable sur $]\, x_0 - \delta\,,\; x_0\,[\, \cup\,]\, x_0\,,\; x_0 + \delta\,[$.

Soit $x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\; x_0\,[\, \cup\,]\, x_0\,,\; x_0 + \delta\,[$. Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe c entre x et x_0 tel que

Extrema

Démonstration :

$\exists\, \delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\, [$ et dérivable sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\, [\, \cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\, [$.

Soit $x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\, [\, \cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\, [$. Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe c entre x et x_0 tel que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$

Extrema

Démonstration :

$\exists\, \delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[$ et dérivable sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\,\cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$.

Soit $x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\,\cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$. Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe c entre x et x_0 tel que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) = f(x_0) + f'(c)\ [x - x_0\,].$$

Extrema

Démonstration :

$\exists\, \delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[$ et dérivable sur $]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\, \cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$.

Soit $x \in\,]\, x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\, \cup\,]\, x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$. Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe c entre x et x_0 tel que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) = f(x_0) + f'(c)\ [x - x_0\,].$$

Par hypothèse, $f'(x)$ change de signe en x_0.

Extrema

Démonstration :

$\exists\,\delta > 0$ tel que f soit continue sur $]\,x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,[$ et dérivable sur $]\,x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\,\cup\,]\,x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$.

Soit $x \in\,]\,x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\,\cup\,]\,x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$. Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe c entre x et x_0 tel que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \qquad \text{d'où} \qquad f(x) = f(x_0) + f'(c)\,[x - x_0\,].$$

Par hypothèse, $f'(x)$ change de signe en x_0. Distinguons deux cas.

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$,

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0}$$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - ∗ si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\,.$$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)\,.$$
  - si $x - x_0 > 0$,

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - $*$ si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)\,.$$
  - $*$ si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \leq 0$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - $*$ si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\,.$$
  - $*$ si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0}$$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[\,x - x_0\,]}_{\leq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)\,.$$
  - si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[\,x - x_0\,]}_{\leq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)\,.$$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :

  * si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)\,.$$

  * si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0)\,.$$

  Donc $f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in\,]\,x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\, \cup\,]\,x_0\,,\ x_0 + \delta\,[\,,$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs positives à gauche et négatives à droite de x_0 :

  * si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et
  $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\,.$$
  * si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et
  $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\leq 0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)\,.$$

  Donc $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall\, x \in\,]\,x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\,\cup\,]\,x_0\,,\ x_0 + \delta\,[$, $f(x_0)$ est un maximum (local) de f.

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$,

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :

  * si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0}$$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et
    $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :

  * si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0)\,.$$

  * si $x - x_0 > 0$,

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :
  - ∗ si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0)\,.$$
  - ∗ si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \geq 0$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :

  * si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0)\,.$$

  * si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0}$$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :
  - si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$
  - si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et
    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :

  $*$ si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et

  $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0)\,.$$

  $*$ si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et

  $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0)\,.$$

  Donc $f(x) \geq f(x_0)\,,\ \forall\, x \in \,]\,x_0 - \delta\,,\ x_0\,[\, \cup \,]\,x_0\,,\ x_0 + \delta\,[\,,$

Extrema

- $f'(x)$ prend des valeurs négatives à gauche et positives à droite de x_0 :
  - $*$ si $x - x_0 < 0$, alors $f'(c) \leq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0)\,.$$

  - $*$ si $x - x_0 > 0$, alors $f'(c) \geq 0$ et

    $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(c)\,[x - x_0]}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0)\,.$$

  Donc $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall\, x \in \,]\,x_0 - \delta\,,\; x_0\,[\, \cup \,]\,x_0\,,\; x_0 + \delta\,[$, $f(x_0)$ est un minimum (local) de f. $\square$

Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$

Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1 - (x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}\,,$

Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}\,,\; x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}\,,\ x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

On considère les trois points $P\,(2,0)\,,$

Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}\,,\ x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

On considère les trois points $P\,(2,0)\,,\ R\,(x_0,0)$

Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}\,,\ x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

On considère les trois points $P\,(2,0)\,,\ R\,(x_0,0)$

et $Q \in \Gamma$ d'abscisse x_0 ,

Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}\,,\ x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

On considère les trois points $P\,(2,0)\,,\ R\,(x_0,0)$

et $Q \in \Gamma$ d'abscisse $x_0\,,\ x_0 \in \,]\,0\,,\,2\,[\,.$

Exemple

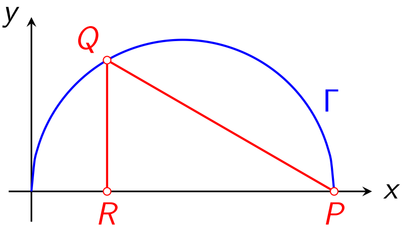
Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}\,,\ x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

On considère les trois points $P\,(2,0)\,,\ R\,(x_0,0)$

et $Q \in \Gamma$ d'abscisse $x_0\,,\ x_0 \in\,]\,0\,,\,2\,[\,.$



Exemple

Exemple :

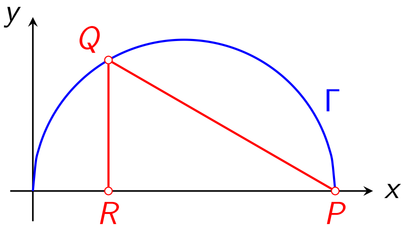
Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}\,,\ x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

On considère les trois points $P\,(2,0)\,,\ R\,(x_0,0)$

et $Q \in \Gamma$ d'abscisse $x_0\,,\ x_0 \in \,]\,0\,,\,2\,[\,.$

Déterminer l'abscisse x_0 des points Q et R



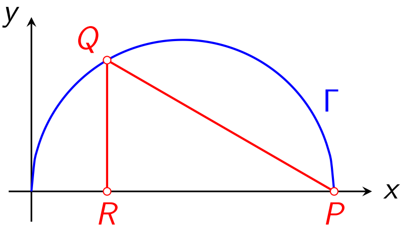
Exemple

Exemple :

Soit Γ le demi-cercle d'équation

$y = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}\,,\ x \in [\,0\,,\,2\,]\,.$

On considère les trois points $P\,(2,0)$, $R\,(x_0,0)$ et $Q \in \Gamma$ d'abscisse x_0, $x_0 \in \,]\,0\,,\,2\,[\,.$



Déterminer l'abscisse x_0 des points Q et R se sorte que l'aire du triangle PQR soit maximale.

Exemple

Posons $x = x_0$

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de x,

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de $x\,,\; x \in \,]\,0\,,\,2\,[\,.$

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de x, $x \in]\,0\,,\,2\,[$.

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(x_P - x_R)\,(y_Q - y_R)$$

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de x, $x \in]\,0\,,\,2\,[$.

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(x_P - x_R)\,(y_Q - y_R) = \frac{1}{2}\,(2 - x)\,\sqrt{2x - x^2}\,.$$

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de x, $x \in]\,0\,,\,2\,[$.

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(x_P - x_R)\,(y_Q - y_R) = \frac{1}{2}\,(2-x)\,\sqrt{2x-x^2}\,.$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2x-x^2} + (2-x)\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right]$$

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de x, $x \in \,]\,0\,,\,2\,[$.

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(x_P - x_R)\,(y_Q - y_R) = \frac{1}{2}\,(2-x)\,\sqrt{2x - x^2}\,.$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2x-x^2} + (2-x)\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right] = \frac{(x^2-2x) + (2-x)\,(1-x)}{2\,\sqrt{2x-x^2}}$$

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de x, $x \in \left]0\,,\,2\right[$.

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(x_P - x_R)\,(y_Q - y_R) = \frac{1}{2}\,(2-x)\sqrt{2x-x^2}\,.$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2x-x^2} + (2-x)\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right] = \frac{(x^2-2x)+(2-x)\,(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \frac{(x-2)\,[\,x-(1-x)\,]}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

Exemple

Posons $x = x_0$ et $A(x)$ l'aire du triangle PQR en fonction de x, $x \in \,]\,0\,,\,2\,[\,$.

$$A(x) = \frac{1}{2}\,(x_P - x_R)\,(y_Q - y_R) = \frac{1}{2}\,(2 - x)\sqrt{2x - x^2}\,.$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2x - x^2} + (2 - x)\cdot\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}\right] = \frac{(x^2 - 2x) + (2 - x)\,(1 - x)}{2\sqrt{2x - x^2}}$$

$$= \frac{(x - 2)\,[\,x - (1 - x)\,]}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{(x - 2)\,(2x - 1)}{2\sqrt{2x - x^2}}\,.$$

Exemple

Pour déterminer les extrema de $A(x)$,

Exemple

Pour déterminer les extrema de $A(x)$, on étudie le signe de sa dérivée :

Exemple

Pour déterminer les extrema de $A(x)$, on étudie le signe de sa dérivée :

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$A'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$

La fonction $A(x)$ est donc croissante à gauche de $x_0 = \frac{1}{2}$

Exemple

Pour déterminer les extrema de $A(x)$, on étudie le signe de sa dérivée :

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$A'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$

La fonction $A(x)$ est donc croissante à gauche de $x_0 = \frac{1}{2}$ et décroissante à droite.

Exemple

Pour déterminer les extrema de $A(x)$, on étudie le signe de sa dérivée :

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$A'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$

La fonction $A(x)$ est donc croissante à gauche de $x_0 = \frac{1}{2}$ et décroissante à droite.

L'aire du triangle PQR est maximale

Exemple

Pour déterminer les extrema de $A(x)$, on étudie le signe de sa dérivée :

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$A'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$

La fonction $A(x)$ est donc croissante à gauche de $x_0 = \frac{1}{2}$ et décroissante à droite.

L'aire du triangle PQR est maximale lorsque l'abscisse de R vaut $x_0 = \frac{1}{2}$.

Remarques

Remarques :

Remarques

Remarques :

a) Attention !

Remarques

Remarques :

a) Attention ! $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x_0) \text{ extremum de } f \, , \\ \\ \end{array} \right.$

Remarques

Remarques :

a) Attention ! $\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x_0) \text{ extremum de } f\,, \\ f(x_0) \text{ extremum de } f \quad \not\Leftarrow \quad f'(x_0) = 0\,. \end{array} \right.$

Remarques

Remarques :

a) Attention ! $$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x_0) \text{ extremum de } f\,, \\ f(x_0) \text{ extremum de } f \quad \not\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0\,. \end{cases}$$

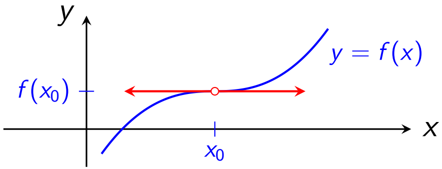
Contre-exemples :

Remarques

Remarques :

a) Attention ! $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x_0) \text{ extremum de } f\,, \\ f(x_0) \text{ extremum de } f \quad \not\Leftarrow \quad f'(x_0) = 0\,. \end{cases}$

Contre-exemples :

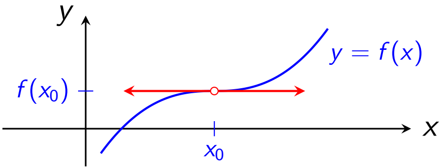


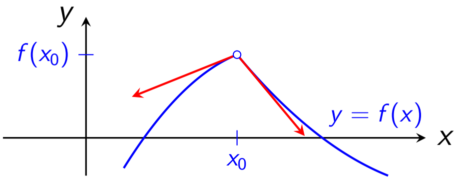
Remarques

Remarques :

a) Attention !
$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x_0) \text{ extremum de } f\,, \\ f(x_0) \text{ extremum de } f \quad \not\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0\,. \end{cases}$$

Contre-exemples :





Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

   i) les points frontières des domaines de définition

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

i) les points frontières des domaines de définition et de continuité de f ,

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

i) les points frontières des domaines de définition et de continuité de f,

ii) les points du domaine de continuité où f n'est pas dérivable,

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

i) les points frontières des domaines de définition et de continuité de f,

ii) les points du domaine de continuité où f n'est pas dérivable,

iii) les points du domaine de dérivabilité de f à tangente horizontale.

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

i) les points frontières des domaines de définition et de continuité de f,

ii) les points du domaine de continuité où f n'est pas dérivable,

iii) les points du domaine de dérivabilité de f à tangente horizontale.

L'ensemble de ces points constitue les points remarquables de f.

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

i) les points frontières des domaines de définition et de continuité de f,

ii) les points du domaine de continuité où f n'est pas dérivable,

iii) les points du domaine de dérivabilité de f à tangente horizontale.

L'ensemble de ces points constitue les points remarquables de f.

Parmi ces "candidats-extrema",

Extrema

b) L'abscisse x_0 des extrema de f est à chercher dans les situations suivantes :

i) les points frontières des domaines de définition et de continuité de f,

ii) les points du domaine de continuité où f n'est pas dérivable,

iii) les points du domaine de dérivabilité de f à tangente horizontale.

L'ensemble de ces points constitue les points remarquables de f.

Parmi ces "candidats-extrema", on détermine les extrema de f à l'aide du tableau de signe de la dérivée.

Exemple

Exemple :

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2\left(x^3-1\right) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2\,(x^3-1) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$= \frac{5x^5 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2(x^3-1)+2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$= \frac{5x^5-3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{x^2(5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}},$$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2\,(x^3-1) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$= \frac{5x^5 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{x^2\,(5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,, \quad D_{f'} = D_f \setminus \{1\}\,.$$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2(x^3-1)+2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$= \frac{5x^5-3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{x^2(5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \quad D_{f'} = D_f \setminus \{1\}.$$

Il y a donc trois points remarquables,

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2\,(x^3-1) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$= \frac{5x^5 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{x^2\,(5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,, \quad D_{f'} = D_f \setminus \{1\}\,.$$

Il y a donc trois points remarquables, en $x = 0$,

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2(x^3-1)+2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$= \frac{5x^5-3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{x^2(5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}, \quad D_{f'} = D_f \setminus \{1\}.$$

Il y a donc trois points remarquables, en $x = 0$, $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

Exemple

Exemple : Déterminer les extrema de $f(x) = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2}$.

$D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{(x^3-1)^2} + x^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{3x^2\,(x^3-1) + 2x^5}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

$$= \frac{5x^5 - 3x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \frac{x^2\,(5x^3-3)}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,, \quad D_{f'} = D_f \setminus \{1\}\,.$$

Il y a donc trois points remarquables, en $x = 0$, $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ et $x = 1$.

Exemple

Tableau de signe de $f'(x)$:

Exemple

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	

Il y a deux changements de signe de la dérivée,

Exemple

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	$-\infty \parallel +\infty$	$+$	

Il y a deux changements de signe de la dérivée, f admet donc deux extrema :

Exemple

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	$-\infty \Vert +\infty$	$+$	

Il y a deux changements de signe de la dérivée, f admet donc deux extrema :

un maximum en $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

Exemple

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	$-\infty \Vert +\infty$	$+$	

Il y a deux changements de signe de la dérivée, f admet donc deux extrema :

un maximum en $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ et un minimum en $x = 1$.

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

$*$ en $x = 0$,

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

* en $x = 0$, pas d'extremum,

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

* en $x = 0$, pas d'extremum, mais une tangente horizontale,

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

* en $x = 0$, pas d'extremum, mais une tangente horizontale,
* en $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$,

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

* en $x = 0$, pas d'extremum, mais une tangente horizontale,
* en $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, un maximum à tangente horizontale,

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

* en $x = 0$, pas d'extremum, mais une tangente horizontale,
* en $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, un maximum à tangente horizontale,
* en $x = 1$,

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

* en $x = 0$, pas d'extremum, mais une tangente horizontale,
* en $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, un maximum à tangente horizontale,
* en $x = 1$, un minimum à demi-tangentes verticales

Exemple

Caractérisation des points remarquables du graphe de f :

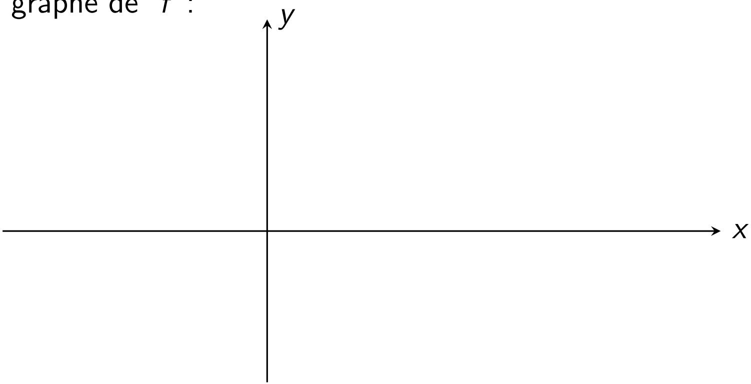
* en $x = 0$, pas d'extremum, mais une tangente horizontale,
* en $x = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, un maximum à tangente horizontale,
* en $x = 1$, un minimum à demi-tangentes verticales (point de rebroussement).

Exemple

Esquisse du graphe de f :

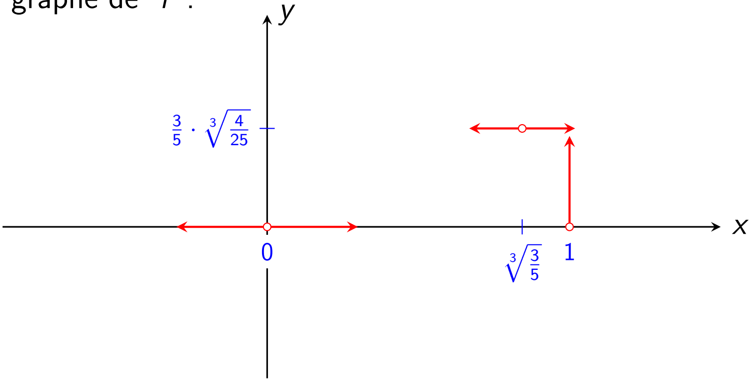
Exemple

Esquisse du graphe de f :



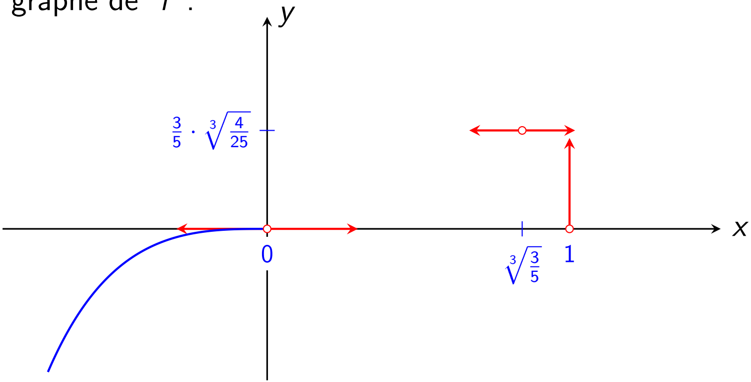
Exemple

Esquisse du graphe de f :



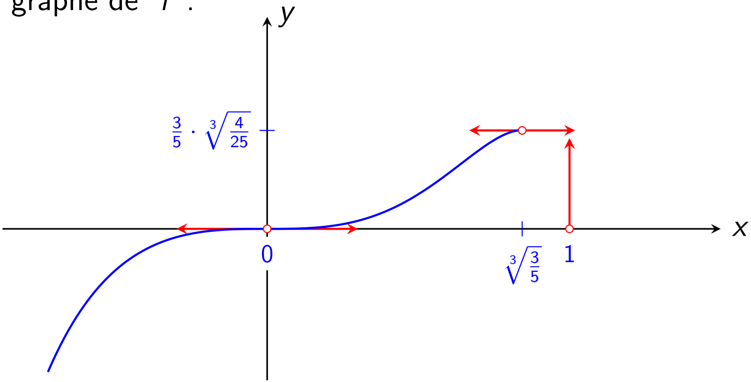
Exemple

Esquisse du graphe de f :



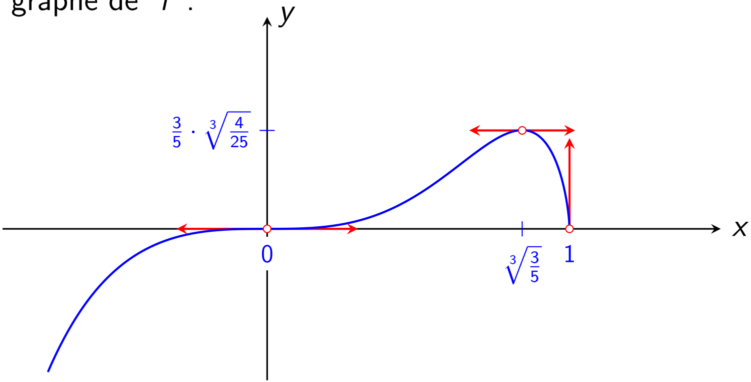
Exemple

Esquisse du graphe de f :



Exemple

Esquisse du graphe de f :



Exemple

Esquisse du graphe de f :