Calcul Intégral

Calcul Intégral

2. L'intégrale indéfinie

2.2 Recherche de primitives

2.2 Recherche de primitives

2.2.2 Intégration par parties

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

On rappelle la règle de dérivation d'un produit :

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

On rappelle la règle de dérivation d'un produit : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

On rappelle la règle de dérivation d'un produit : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Et en intégrant les deux membres de cette identité, on obtient

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

On rappelle la règle de dérivation d'un produit : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Et en intégrant les deux membres de cette identité, on obtient

$$\int (u \cdot v)' \, dx = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx$$

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

On rappelle la règle de dérivation d'un produit : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Et en intégrant les deux membres de cette identité, on obtient

$$\int (u \cdot v)'\, dx = \int u' \cdot v\, dx + \int u \cdot v'\, dx \quad \Leftrightarrow \quad u \cdot v = \int u' \cdot v\, dx + \int u \cdot v'\, dx\,,$$

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

On rappelle la règle de dérivation d'un produit : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Et en intégrant les deux membres de cette identité, on obtient

$$\int (u \cdot v)'\, dx = \int u' \cdot v\, dx + \int u \cdot v'\, dx \quad \Leftrightarrow \quad u \cdot v = \int u' \cdot v\, dx + \int u \cdot v'\, dx\,,$$

(la constante d'intégration est ici inutile, car elle est contenue dans les intégrales indéfinies qui suivent).

Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions de x.

On rappelle la règle de dérivation d'un produit : $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Et en intégrant les deux membres de cette identité, on obtient

$$\int (u \cdot v)' \, dx = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx \quad \Leftrightarrow \quad u \cdot v = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx \,,$$

(la constante d'intégration est ici inutile, car elle est contenue dans les intégrales indéfinies qui suivent). En d'autres termes, on a donc

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx \,.$$

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int u' \cdot v \, dx$

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int u' \cdot v \, dx$ par l'expression $\displaystyle u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$,

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int u' \cdot v \, dx$ par l'expression $u \cdot v - \displaystyle\int u \cdot v' \, dx$, est intéressante si $u \cdot v'$ est plus facile à intégrer que $u' \cdot v$.

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int u' \cdot v \, dx$ par l'expression $\displaystyle u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$, est intéressante si $u \cdot v'$ est plus facile à intégrer que $u' \cdot v$.

Notation :

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int u' \cdot v \, dx$ par l'expression $\displaystyle u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$, est intéressante si $u \cdot v'$ est plus facile à intégrer que $u' \cdot v$.

Notation : soient F et G des primitives de f et g, on a donc

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\int u' \cdot v \, dx$ par l'expression $u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$, est intéressante si $u \cdot v'$ est plus facile à intégrer que $u' \cdot v$.

Notation : soient F et G des primitives de f et g, on a donc

- $\int \underset{\uparrow}{f(x)} \cdot \underset{\downarrow}{g(x)} \, dx$

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\int u' \cdot v \, dx$ par l'expression $u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$, est intéressante si $u \cdot v'$ est plus facile à intégrer que $u' \cdot v$.

Notation : soient F et G des primitives de f et g, on a donc

- $$\int \underset{\uparrow}{f(x)} \cdot \underset{\downarrow}{g(x)} \, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \, dx \,,$$

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int u' \cdot v\,dx$ par l'expression $\displaystyle u \cdot v - \int u \cdot v'\,dx$, est intéressante si $u \cdot v'$ est plus facile à intégrer que $u' \cdot v$.

Notation : soient F et G des primitives de f et g, on a donc

- $$\int \underset{\uparrow}{f(x)} \cdot \underset{\downarrow}{g(x)}\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx\,,$$
- ou $$\int \underset{\downarrow}{f(x)} \cdot \underset{\uparrow}{g(x)}\,dx$$

Intégration par parties

Cette méthode qui consiste à décrire l'intégrale indéfinie $\int u' \cdot v \, dx$ par l'expression $u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$, est intéressante si $u \cdot v'$ est plus facile à intégrer que $u' \cdot v$.

Notation : soient F et G des primitives de f et g, on a donc

- $\int \underset{\uparrow}{f(x)} \cdot \underset{\downarrow}{g(x)} \, dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \, dx$,
- ou $\int \underset{\downarrow}{f(x)} \cdot \underset{\uparrow}{g(x)} \, dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x) \, dx$.

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx\,,$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx$,

l'intégration par parties nous permet ici,

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx$,

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$,

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx$,

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$, de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx$,

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$, de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x \,,$$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx\,,$

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)\,,$ de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x\,, \quad v' = 1$$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx$,

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$, de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x\,, \quad v' = 1 \qquad \text{et} \qquad u' = \sin(x)\,,$$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx\,,$

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)\,,$ de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x\,, \quad v' = 1 \qquad \text{et} \qquad u' = \sin(x)\,, \quad u = -\cos(x)\,,$$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx$,

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$, de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x\,, \quad v' = 1 \qquad \text{et} \qquad u' = \sin(x)\,, \quad u = -\cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(x)}\, dx$$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\, dx$,

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$, de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x\,, \quad v' = 1 \qquad \text{et} \qquad u' = \sin(x)\,, \quad u = -\cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(x)}\, dx = x \cdot [-\cos(x)] - \int 1 \cdot [-\cos(x)]\, dx$$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\,dx\,,$

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$, de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x\,, \quad v' = 1 \qquad \text{et} \qquad u' = \sin(x)\,, \quad u = -\cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(x)}\,dx = x \cdot [-\cos(x)] - \int 1 \cdot [-\cos(x)]\,dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$

Intégration par parties, exemples

1) $\displaystyle\int x \cdot \sin(x)\,dx\,,$

l'intégration par parties nous permet ici, en choisissant de dériver x et d'intégrer $\sin(x)$, de nous ramener à l'intégration d'une fonction cosinus :

$$v = x\,, \quad v' = 1 \qquad \text{et} \qquad u' = \sin(x)\,, \quad u = -\cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(x)}\,dx = x \cdot [-\cos(x)] - \int 1 \cdot [-\cos(x)]\,dx$$

$$= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C\,.$$

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile :

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$.

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx$.

- Si on choisit d'intégrer x^3 et de dériver $\sqrt{x^2+1}$,

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$.

- Si on choisit d'intégrer x^3 et de dériver $\sqrt{x^2+1}$, on se ramène à l'intégration d'une fonction de type $\dfrac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}$,

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$.

- Si on choisit d'intégrer x^3 et de dériver $\sqrt{x^2+1}$, on se ramène à l'intégration d'une fonction de type $\dfrac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui est plus compliqué.

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$.

- Si on choisit d'intégrer x^3 et de dériver $\sqrt{x^2+1}$, on se ramène à l'intégration d'une fonction de type $\dfrac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui est plus compliqué.
- Si on choisit de dériver x^3 ,

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$.

- Si on choisit d'intégrer x^3 et de dériver $\sqrt{x^2+1}$, on se ramène à l'intégration d'une fonction de type $\dfrac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui est plus compliqué.
- Si on choisit de dériver x^3 , il faudrait intégrer $\sqrt{x^2+1}$,

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$.

- Si on choisit d'intégrer x^3 et de dériver $\sqrt{x^2+1}$, on se ramène à l'intégration d'une fonction de type $\dfrac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui est plus compliqué.
- Si on choisit de dériver x^3 , il faudrait intégrer $\sqrt{x^2+1}$, ce qui n'est pas facile.

Exemple 2

2) Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$.

- Si on choisit d'intégrer x^3 et de dériver $\sqrt{x^2+1}$, on se ramène à l'intégration d'une fonction de type $\dfrac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}$, ce qui est plus compliqué.
- Si on choisit de dériver x^3 , il faudrait intégrer $\sqrt{x^2+1}$, ce qui n'est pas facile.
- Alors ...

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,,$$

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,, \quad v' = 2x$$

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,, \quad v' = 2x \qquad \text{et} \qquad u' = x \cdot \sqrt{x^2+1}\,,$$

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,, \quad v' = 2x \qquad \text{et} \qquad u' = x \cdot \sqrt{x^2+1}\,, \quad u = \frac{1}{3}\,\sqrt{(x^2+1)^3}\,,$$

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,, \quad v' = 2x \qquad \text{et} \qquad u' = x \cdot \sqrt{x^2+1}\,, \quad u = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x^2} \cdot \left[\underset{\uparrow}{x \cdot \sqrt{x^2+1}}\right] dx$$

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,, \quad v' = 2x \qquad \text{et} \qquad u' = x \cdot \sqrt{x^2+1}\,, \quad u = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x^2} \cdot \left[x \cdot \underset{\uparrow}{\sqrt{x^2+1}} \right] dx =$$

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,, \quad v' = 2x \qquad \text{et} \qquad u' = x \cdot \sqrt{x^2+1}\,, \quad u = \frac{1}{3}\,\sqrt{(x^2+1)^3}\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x^2} \cdot \left[x \cdot \underset{\uparrow}{\sqrt{x^2+1}} \right] dx = x^2 \cdot \left[\frac{1}{3}\,\sqrt{(x^2+1)^3} \right] - \int 2x \cdot \left[\frac{1}{3}\,\sqrt{(x^2+1)^3} \right] dx\,,$$

$$\text{avec} \qquad \int x \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}\,dx =$$

Exemple 2

La bonne idée consiste à dériver x^2 et à intégrer $x \cdot \sqrt{x^2+1}$:

$$v = x^2\,, \quad v' = 2x \qquad \text{et} \qquad u' = x \cdot \sqrt{x^2+1}\,, \quad u = \frac{1}{3}\,\sqrt{(x^2+1)^3}\,,$$

$$\int \underset{\downarrow}{x^2} \cdot \left[x \cdot \underset{\uparrow}{\sqrt{x^2+1}} \right] dx = x^2 \cdot \left[\frac{1}{3}\,\sqrt{(x^2+1)^3} \right] - \int 2x \cdot \left[\frac{1}{3}\,\sqrt{(x^2+1)^3} \right] dx\,,$$

$$\text{avec} \quad \int x \cdot \sqrt{(x^2+1)^3}\, dx = \frac{1}{5}\,\sqrt{(x^2+1)^5} + C\,.$$

Exemple 2

$$\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx \quad =$$

Exemple 2

$$\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\,x^2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\,\sqrt{(x^2+1)^5} + C$$

Exemple 2

$$\begin{aligned}
\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx &= \frac{1}{3}\, x^2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\, \sqrt{(x^2+1)^5} + C \\
&= \sqrt{(x^2+1)^3}\, \left[\frac{1}{3}\, x^2 - \frac{2}{15}\, (x^2+1) \right] + C
\end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{aligned}
\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{3}\,x^2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\,\sqrt{(x^2+1)^5} + C \\
&= \sqrt{(x^2+1)^3}\,\left[\frac{1}{3}\,x^2 - \frac{2}{15}\,(x^2+1)\right] + C \\
&= \frac{1}{15}\,\sqrt{(x^2+1)^3}\,\left[5x^2 - 2\,(x^2+1)\right] + C
\end{aligned}$$

Exemple 2

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{3}\,x^2 \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\,\sqrt{(x^2+1)^5} + C \\
&= \sqrt{(x^2+1)^3}\,\left[\frac{1}{3}\,x^2 - \frac{2}{15}\,(x^2+1)\right] + C \\
&= \frac{1}{15}\,\sqrt{(x^2+1)^3}\,\left[5x^2 - 2\,(x^2+1)\right] + C \\
&= \frac{1}{15}\,\sqrt{(x^2+1)^3}\,\left[3x^2 - 2\right] + C\,.
\end{aligned}
$$

Exemple 3

3) Un exemple du même genre :

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

$\cos[\,u(x)\,]$ est facile à intégrer

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\,\right)\, dx$.

$\cos\left[\,u(x)\,\right]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

$\cos\left[\, u(x)\,\right]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx =$$

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

$\cos[\,u(x)\,]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \underset{\downarrow}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underset{\uparrow}{\cos}\left(\sqrt{x}\right)\right] dx ,$$

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

$\cos[\,u(x)\,]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \underset{\downarrow}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underset{\uparrow}{\cos}\left(\sqrt{x}\right)\right] dx\,,$$

$u = \sqrt{x}\,,$

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,dx$.

$\cos[\,u(x)\,]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,dx = \int \underset{\downarrow}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underset{\uparrow}{\cos\left(\sqrt{x}\right)}\right] dx\,,$$

$$u = \sqrt{x}\,, \qquad u' = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}$$

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

$\cos[\,u(x)\,]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \sqrt{x} \cdot \left[\, \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right) \right] dx \,,$$

$$u = \sqrt{x}\,, \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right) \,,$$

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

$\cos[\,u(x)\,]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \underset{\downarrow}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underset{\uparrow}{\cos\left(\sqrt{x}\right)}\right] dx\,,$$

$$u = \sqrt{x}\,, \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right)\,, \quad v = 2\sin\left(\sqrt{x}\right)\,,$$

Exemple 3

3) Un exemple du même genre : $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$.

$\cos[\,u(x)\,]$ est facile à intégrer s'il est multiplié par la dérivée intérieure $u'(x)$.

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \underset{\downarrow}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \underset{\uparrow}{\cos\left(\sqrt{x}\right)}\right] dx\,,$$

$$u = \sqrt{x}\,, \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right)\,, \quad v = 2\sin\left(\sqrt{x}\right)\,,$$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x} \cdot \sin\left(\sqrt{x}\right) - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sin\left(\sqrt{x}\right)\, dx\,.$$

Exemple 3

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x} \cdot \sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left[-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right]\, dx\,,$$

Exemple 3

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x}\cdot \sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left[-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right]\, dx\,,$$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x}\cdot \sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right) + C\,.$$

Exemple 3

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\ dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left[-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right]\ dx\,,$$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\ dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right) + C\,.$$

Nous verrons dans le prochain cours,

Exemple 3

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left[-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right]\, dx\,,$$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right) + C\,.$$

Nous verrons dans le prochain cours, consacré à l'intégration par changement de variable,

Exemple 3

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left[-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right]\, dx\,,$$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = 2\sqrt{x}\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right) + C\,.$$

Nous verrons dans le prochain cours, consacré à l'intégration par changement de variable, qu'on pourra formaliser cette technique de façon un peu différente.

Exemple 4

4) Cet exemple

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag :

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx$$

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right]\,dx$$

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\, dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\, dx\,.$$

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,,$$

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx$, peut-on en déduire que $0 = 1$?

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx$, peut-on en déduire que $0 = 1$? Bien sûr que non !

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx$, peut-on en déduire que $0 = 1$? Bien sûr que non !

Soit $F(x)$ une primitive de $\dfrac{1}{x}$,

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,,$ peut-on en déduire que $0 = 1$? Bien sûr que non !

Soit $F(x)$ une primitive de $\dfrac{1}{x}$, par exemple $F(x) = \ln|x|$.

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx$, peut-on en déduire que $0 = 1$? Bien sûr que non !

Soit $F(x)$ une primitive de $\dfrac{1}{x}$, par exemple $F(x) = \ln|x|$. Alors

$$\int \frac{1}{x}\,dx = F(x) + C$$

Exemple 4

4) Cet exemple est un gag : essayons d'intégrer par parties la fonction $\dfrac{1}{x}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{1}{x}}\,dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\right] dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx$, peut-on en déduire que $0 = 1$? Bien sûr que non !

Soit $F(x)$ une primitive de $\dfrac{1}{x}$, par exemple $F(x) = \ln|x|$. Alors

$$\int \frac{1}{x}\,dx = F(x) + C \quad \text{où} \quad C \quad \text{est une constante arbitraire.}$$

Exemple 4

On a donc

$$\int \frac{1}{x}\, dx = 1 + \int \frac{1}{x}\, dx \qquad \Leftrightarrow$$

Exemple 4

On a donc

$$\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x) + C = 1 + F(x) + C'$$

Exemple 4

On a donc

$$\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x) + C = 1 + F(x) + C'$$
$$\Leftrightarrow \quad C - C' = 1\,.$$

Exemple 4

On a donc

$$\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x) + C = 1 + F(x) + C'$$
$$\Leftrightarrow \quad C - C' = 1\,.$$

Nous n'avons rien montré,

Exemple 4

On a donc

$$\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x) + C = 1 + F(x) + C'$$
$$\Leftrightarrow \quad C - C' = 1\,.$$

Nous n'avons rien montré, si ce n'est que 1 est une fonction constante

Exemple 4

On a donc

$$\int \frac{1}{x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x) + C = 1 + F(x) + C'$$
$$\Leftrightarrow \quad C - C' = 1\,.$$

Nous n'avons rien montré, si ce n'est que 1 est une fonction constante (sur chaque intervalle du domaine de continuité de $\frac{1}{x}$).

Exemple 5

5) $I = \int e^x \cdot \sin(x)\, dx \,,$

Exemple 5

5) $I = \displaystyle\int e^x \cdot \sin(x)\, dx$,

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

Exemple 5

5) $I = \int e^x \cdot \sin(x)\, dx\,,$

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,,$$

Exemple 5

5) $I = \int e^x \cdot \sin(x)\, dx$,

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \qquad u = e^x$$

Exemple 5

5) $I = \displaystyle\int e^x \cdot \sin(x)\, dx\,,$

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \quad u = e^x \qquad \text{et} \qquad v = \sin(x)\,,$$

Exemple 5

5) $I = \int e^x \cdot \sin(x)\, dx\,,$

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \quad u = e^x \qquad \text{et} \qquad v = \sin(x)\,, \quad v' = \cos(x)\,,$$

Exemple 5

5) $I = \int e^x \cdot \sin(x)\, dx$,

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \quad u = e^x \qquad \text{et} \qquad v = \sin(x)\,, \quad v' = \cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(x)}\, dx$$

Exemple 5

5) $I = \int e^x \cdot \sin(x)\, dx\,,$

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \quad u = e^x \qquad \text{et} \qquad v = \sin(x)\,, \quad v' = \cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(x)}\, dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\, dx\,.$$

Exemple 5

5) $I = \displaystyle\int e^x \cdot \sin(x)\, dx$,

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \quad u = e^x \qquad \text{et} \qquad v = \sin(x)\,, \quad v' = \cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(x)}\, dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\, dx\,.$$

On a pas l'impression d'avoir beaucoup progressé,

Exemple 5

5) $I = \int e^x \cdot \sin(x)\,dx$,

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \quad u = e^x \qquad \text{et} \qquad v = \sin(x)\,, \quad v' = \cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(x)}\,dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\,dx\,.$$

On a pas l'impression d'avoir beaucoup progressé, car il nous reste à intégrer $e^x \cdot \cos(x)$

Exemple 5

5) $I = \displaystyle\int e^x \cdot \sin(x)\, dx$,

choisissons, par exemple, de dériver $\sin(x)$ et d'intégrer e^x :

$$u' = e^x\,, \quad u = e^x \qquad \text{et} \qquad v = \sin(x)\,, \quad v' = \cos(x)\,,$$

$$\int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\sin(x)}\, dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\, dx\,.$$

On a pas l'impression d'avoir beaucoup progressé, car il nous reste à intégrer $e^x \cdot \cos(x)$ qui est de même difficulté que l'intégrale indéfinie I .

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial (dériver la fonction trigonométrique et intégrer l'exponentielle),

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial (dériver la fonction trigonométrique et intégrer l'exponentielle), on obtient :

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial (dériver la fonction trigonométrique et intégrer l'exponentielle), on obtient :

$$I = e^x \cdot \sin(x) - \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)}\, dx$$

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial (dériver la fonction trigonométrique et intégrer l'exponentielle), on obtient :

$$
\begin{aligned}
I &= e^x \cdot \sin(x) - \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)}\, dx \\
&= e^x \cdot \sin(x) - \left[e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot [-\sin(x)]\ dx \right]
\end{aligned}
$$

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial (dériver la fonction trigonométrique et intégrer l'exponentielle), on obtient :

$$I = e^x \cdot \sin(x) - \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)}\, dx$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - \left[e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot [-\sin(x)]\ dx \right]$$

$$\Rightarrow \quad I = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - I$$

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial (dériver la fonction trigonométrique et intégrer l'exponentielle), on obtient :

$$I = e^x \cdot \sin(x) - \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)}\, dx$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - \left[e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot [-\sin(x)]\, dx \right]$$

$$\Rightarrow \quad I = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - I \quad \Rightarrow \quad 2I = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) + \textcolor{red}{\mathsf{Cste}}$$

Exemple 5

Mais en intégrant une deuxième fois par parties et en respectant le choix initial (dériver la fonction trigonométrique et intégrer l'exponentielle), on obtient :

$$I = e^x \cdot \sin(x) - \int \underset{\uparrow}{e^x} \cdot \underset{\downarrow}{\cos(x)}\, dx$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - \left[e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot [\,-\sin(x)\,]\ dx \right]$$

$$\Rightarrow \quad I = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - I \quad \Rightarrow \quad 2I = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) + \text{Cste}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{e^x}{2} \cdot [\,\sin(x) - \cos(x)\,] + C\,.$$

Exemple 6

6) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx\,,$

Exemple 6

6) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$,

l'intégrant $\ln(x)$ n'apparaît pas comme un produit,

Exemple 6

6) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$,

l'intégrant $\ln(x)$ n'apparaît pas comme un produit, mais on peut l'intégrer par parties en l'écrivant sous la forme $1 \cdot \ln(x)$:

Exemple 6

6) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$,

l'intégrant $\ln(x)$ n'apparaît pas comme un produit, mais on peut l'intégrer par parties en l'écrivant sous la forme $1 \cdot \ln(x)$:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(x)}\,dx$$

Exemple 6

6) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx\,,$

l'intégrant $\ln(x)$ n'apparaît pas comme un produit, mais on peut l'intégrer par parties en l'écrivant sous la forme $1 \cdot \ln(x)$:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(x)}\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx\,,$$

Exemple 6

6) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx\,,$

l'intégrant $\ln(x)$ n'apparaît pas comme un produit, mais on peut l'intégrer par parties en l'écrivant sous la forme $1 \cdot \ln(x)$:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(x)}\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx\,,$$

$$\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C\,.$$

Exemple 7

7) $\displaystyle\int \arcsin(x)\, dx$,

Exemple 7

7) $\displaystyle\int \arcsin(x)\, dx$,

on intègre par parties comme dans l'exemple précédent :

Exemple 7

7) $\displaystyle\int \mathrm{arcsin}(x)\, dx$,

on intègre par parties comme dans l'exemple précédent :

$$\int \mathrm{arcsin}(x)\, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\mathrm{arcsin}(x)}\, dx$$

Exemple 7

7) $\displaystyle\int \arcsin(x)\, dx$,

on intègre par parties comme dans l'exemple précédent :

$$\int \arcsin(x)\, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\, dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,,$$

Exemple 7

7) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx\,,$

on intègre par parties comme dans l'exemple précédent :

$$\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$$

$$= x \cdot \arcsin(x) + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Exemple 7

7) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx\,,$

on intègre par parties comme dans l'exemple précédent :

$$\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$$

$$= x \cdot \arcsin(x) + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$