Calcul Intégral

Calcul Intégral

3. Applications géométriques du calcul intégral

3.1 Aire géométrique dans le plan

Autre exemple

Exemple 2

Autre exemple

Exemple 2

Déterminer l'aire A du domaine fini du plan,

Autre exemple

Exemple 2

Déterminer l'aire A du domaine fini du plan, limité par les deux courbes d'équation $y_1(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}$

Autre exemple

Exemple 2

Déterminer l'aire A du domaine fini du plan, limité par les deux courbes d'équation $y_1(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}$ et $y_2(x) = \arcsin(x)$.

Autre exemple

Exemple 2

Déterminer l'aire A du domaine fini du plan, limité par les deux courbes d'équation $y_1(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}$ et $y_2(x) = \arcsin(x)$.

- Les deux points d'intersection ont pour abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

Autre exemple

Exemple 2

Déterminer l'aire A du domaine fini du plan, limité par les deux courbes d'équation $y_1(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}$ et $y_2(x) = \arcsin(x)$.

- Les deux points d'intersection ont pour abscisse $x = 0$ et $x = 1$.
- Esquisse du domaine :

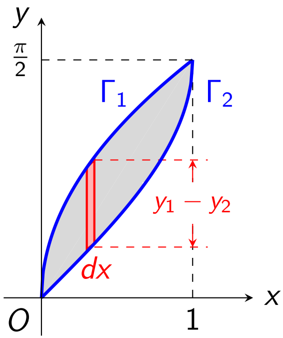
Autre exemple

Exemple 2

Déterminer l'aire A du domaine fini du plan, limité par les deux courbes d'équation $y_1(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}$ et $y_2(x) = \arcsin(x)$.

- Les deux points d'intersection ont pour abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

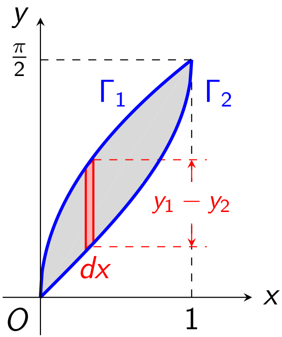
- Esquisse du domaine :



Autre exemple

Exemple 2

Déterminer l'aire A du domaine fini du plan, limité par les deux courbes d'équation $y_1(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}$ et $y_2(x) = \arcsin(x)$.



- Les deux points d'intersection ont pour abscisse $x = 0$ et $x = 1$.
- Esquisse du domaine :
- $A = \displaystyle\int_0^1 [\,y_1(x) - y_2(x)\,]\,dx\,.$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

Exemple 2

- Recherche des primitives :
  - $\int \frac{\pi}{2} \sqrt{x} \, dx$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  * $\displaystyle\int \frac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$

Exemple 2

- Recherche des primitives :
  - $\displaystyle\int \frac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$
  - $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  $*$ $\displaystyle \int \frac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$

  $*$ $\displaystyle \int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  $*$ $\displaystyle\int \frac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$

  $*$ $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  $*$ $\displaystyle\int \tfrac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$

  $*$ $$\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1}\cdot\underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x\cdot\arcsin(x) - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

  $$= x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  $*$ $$\int \tfrac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$$

  $*$ $$\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

  $$= x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

- Evaluation :

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  $*$ $\displaystyle\int \tfrac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$

  $*$ $$\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x\cdot\arcsin(x) - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

  $$= x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

- Evaluation :

$$A = \left[\tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - x\cdot\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  $*$ $\displaystyle\int \tfrac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$

  $*$ $$\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1}\cdot\underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x\cdot\arcsin(x) - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

  $$= x\cdot\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

- Evaluation :

$$A = \left[\tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - x\cdot\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \left[\left(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{2}\right) - (-1)\right]$$

Exemple 2

- Recherche des primitives :

  * $\displaystyle\int \tfrac{\pi}{2}\sqrt{x}\,dx = \tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C\,,$

  * $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\arcsin(x)}\,dx = x \cdot \arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

    $$= x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

- Evaluation :

$$A = \left[\, \tfrac{\pi}{3}\,x^{\frac{3}{2}} - x \cdot \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}\,\right]_0^1 = \left[\,\left(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{2}\right) - (-1)\,\right] = 1 - \tfrac{\pi}{6}\,.$$

Intégration par rapport à la variable y

Remarque :

Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\, x_P \, , \, x_Q \,]$,

Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\,x_P\,,\,x_Q\,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D

Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\,x_P\,,\,x_Q\,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D en l'intégrant par rapport à la variable y de la façon suivante :

Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\, x_P\, ,\, x_Q\,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D en l'intégrant par rapport à la variable y de la façon suivante :

$*$ $y = y_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1(y)\,,$

Intégration par rapport à la variable y

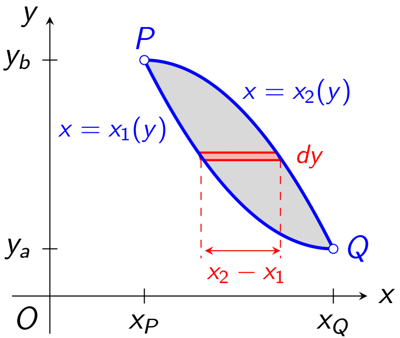
Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\, x_P \,,\, x_Q \,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D en l'intégrant par rapport à la variable y de la façon suivante :

* $y = y_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1(y)\,,$
* $y = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_2(y)\,.$

Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\,x_P\,,\,x_Q\,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D en l'intégrant par rapport à la variable y de la façon suivante :

* $y = y_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1(y)\,,$
* $y = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_2(y)\,.$

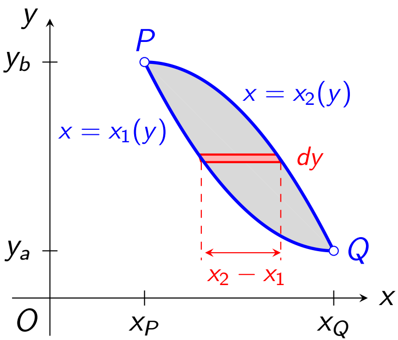


Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\, x_P \, , \, x_Q \,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D en l'intégrant par rapport à la variable y de la façon suivante :

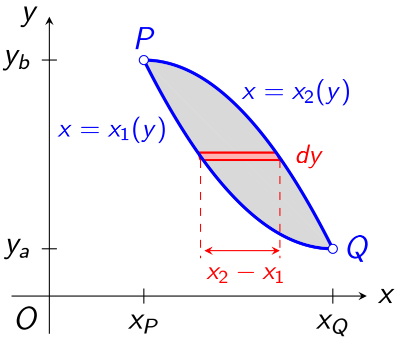
* $y = y_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1(y)\,,$
* $y = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_2(y)\,.$

Et $\quad A = \displaystyle\int_{y_a}^{y_b} |\, x_2 - x_1 \,|\, dy$



Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\,x_P\,,\;x_Q\,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D en l'intégrant par rapport à la variable y de la façon suivante :



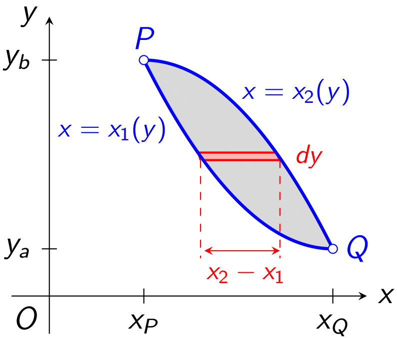
* $y = y_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1(y)\,,$

* $y = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_2(y)\,.$

Et $\quad A = \displaystyle\int_{y_a}^{y_b} |\,x_2 - x_1\,|\,dy = \int_{y_a}^{y_b} |\,x_2(y) - x_1(y)\,|\,dy\,,$

Intégration par rapport à la variable y

Remarque : Si les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont bijectives sur $[\,x_P\,,\,x_Q\,]$, alors on peut calculer l'aire A du domaine D en l'intégrant par rapport à la variable y de la façon suivante :



* $y = y_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1(y)\,,$
* $y = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_2(y)\,.$

Et $\quad A = \displaystyle\int_{y_a}^{y_b} |\,x_2 - x_1\,|\,dy = \int_{y_a}^{y_b} |\,x_2(y) - x_1(y)\,|\,dy\,,\quad$ avec $\;y_a < y_b\,.$

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales"

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy

Reprise de l'exemple 2

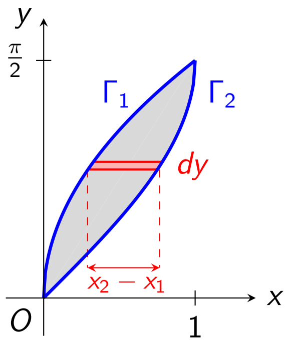
Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$,

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$,

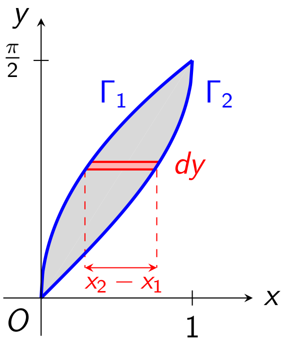


Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$, avec

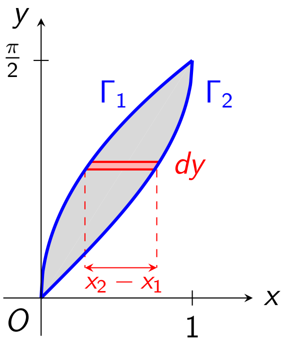
* $\Gamma_1 : \ y = \frac{\pi}{2}\sqrt{x}$



Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$, avec

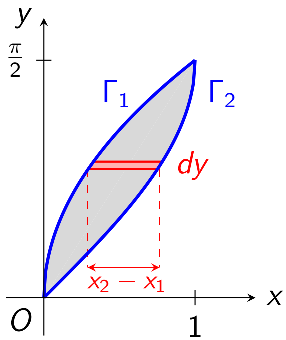


$*$ $\Gamma_1 : \; y = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; x = x_1(y) = \frac{4}{\pi^2}\, y^2,$

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$, avec



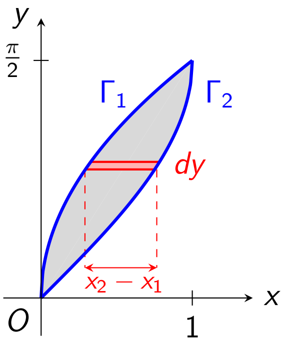
$*$ $\Gamma_1 : \ y = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \ \Leftrightarrow \ x = x_1(y) = \frac{4}{\pi^2}\, y^2,$

$*$ $\Gamma_2 : \ y = \arcsin(x)$

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$, avec



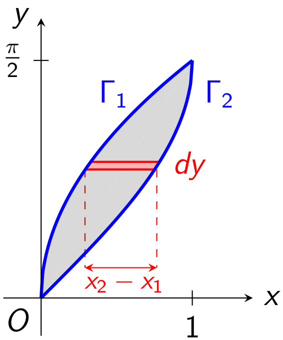
* $\Gamma_1 : \; y = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; x = x_1(y) = \frac{4}{\pi^2}\, y^2,$

* $\Gamma_2 : \; y = \arcsin(x) \;\Leftrightarrow\; x = x_2(y) = \sin(y)\,.$

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$, avec



$*$ Γ_1 : $y = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \Leftrightarrow x = x_1(y) = \frac{4}{\pi^2}\, y^2$,

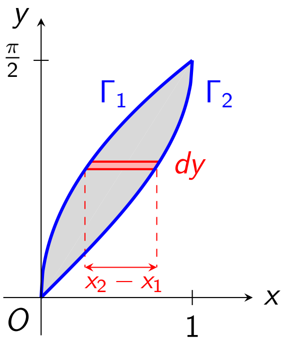
$*$ Γ_2 : $y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = x_2(y) = \sin(y)$.

On en déduit l'expression de l'aire A en fonction de y :

Reprise de l'exemple 2

Exemple 2

On découpe le domaine D en "tranches horizontales" d'épaisseur dy et de longueur $x_2 - x_1$, avec



* Γ_1 : $y = \frac{\pi}{2}\sqrt{x} \Leftrightarrow x = x_1(y) = \frac{4}{\pi^2}\, y^2$,
* Γ_2 : $y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = x_2(y) = \sin(y)$.

On en déduit l'expression de l'aire A en fonction de y :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, x_2(y) - x_1(y)\,]\, dy\,.$$

Suite de l'exemple 2

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, x_2(y) - x_1(y) \,] \, dy$$

Suite de l'exemple 2

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, x_2(y) - x_1(y)\,]\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\, \sin(y) - \tfrac{4}{\pi^2}\, y^2 \,\right] dy$$

Suite de l'exemple 2

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\,\sin(y) - \tfrac{4}{\pi^2}\; y^2\,\right] dy$$

$$= \left[-\cos(y) - \tfrac{4}{3\,\pi^2}\; y^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Suite de l'exemple 2

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\,\sin(y) - \tfrac{4}{\pi^2}\,y^2\,\right] dy$$

$$= \left[-\cos(y) - \tfrac{4}{3\,\pi^2}\,y^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\,0 - \tfrac{\pi}{6}\,\right) - (\,-1 + 0\,)$$

Suite de l'exemple 2

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, x_2(y) - x_1(y) \,]\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\, \sin(y) - \tfrac{4}{\pi^2}\, y^2 \,\right] dy$$

$$= \left[-\cos(y) - \tfrac{4}{3\,\pi^2}\, y^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(0 - \tfrac{\pi}{6} \right) - \left(-1 + 0 \right) = 1 - \tfrac{\pi}{6}\,.$$

Intégration par rapport à la variable y

Remarque :

Intégration par rapport à la variable y

Remarque :

De façon analogue,

Intégration par rapport à la variable y

Remarque :

De façon analogue, si le domaine D se décrit plus agréablement en le découpant en tranches horizontales,

Intégration par rapport à la variable y

Remarque :

De façon analogue, si le domaine D se décrit plus agréablement en le découpant en tranches horizontales, plutôt qu'en tranches verticales,

Intégration par rapport à la variable y

Remarque :

De façon analogue, si le domaine D se décrit plus agréablement en le découpant en tranches horizontales, plutôt qu'en tranches verticales, on intègrera par rapport à la variable y.

Intégration par rapport à la variable y

Remarque :

De façon analogue, si le domaine D se décrit plus agréablement en le découpant en tranches horizontales, plutôt qu'en tranches verticales, on intègrera par rapport à la variable y.

On illustre cette idée dans l'exemple qui suit.

Autre exemple

Exemple 3

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0$$

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Indication :

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Indication : les deux arcs de paraboles se coupent en $(-2\,,\,2)$.

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Indication : les deux arcs de paraboles se coupent en $(-2\,,\,2)$.

Dans les équations des deux arcs Γ_1 et Γ_2,

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Indication : les deux arcs de paraboles se coupent en $(-2\,,\,2)$.

Dans les équations des deux arcs Γ_1 et Γ_2, on peut expliciter y en fonction de x

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Indication : les deux arcs de paraboles se coupent en $(-2\,,\,2)$.

Dans les équations des deux arcs Γ_1 et Γ_2, on peut expliciter y en fonction de x ou x en fonction de y.

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Indication : les deux arcs de paraboles se coupent en $(-2\,,\,2)$.

Dans les équations des deux arcs Γ_1 et Γ_2, on peut expliciter y en fonction de x ou x en fonction de y. On peut donc calculer l'aire de ce domaine en intégrant par rapport à x ou à y.

Autre exemple

Exemple 3

Calculons l'aire du domaine limité par l'axe Ox et par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \quad x^2 - 2y = 0\,, \quad x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad y^2 + x - 2 = 0\,, \quad y \geq 0\,.$$

Indication : les deux arcs de paraboles se coupent en $(-2\,,\,2)$.

Dans les équations des deux arcs Γ_1 et Γ_2, on peut expliciter y en fonction de x ou x en fonction de y. On peut donc calculer l'aire de ce domaine en intégrant par rapport à x ou à y.

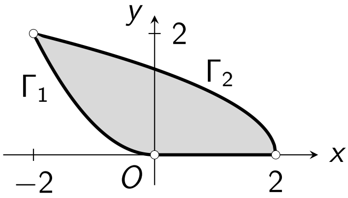
Voici ces deux méthodes.

Première méthode : intégration par rapport à x

- Esquisse du domaine

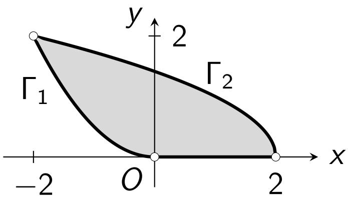
Première méthode : intégration par rapport à x

- Esquisse du domaine



Première méthode : intégration par rapport à x

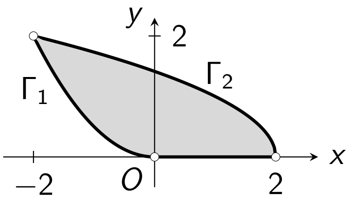
- Esquisse du domaine



- Expression de son aire

Première méthode : intégration par rapport à x

- Esquisse du domaine

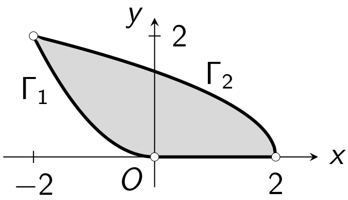


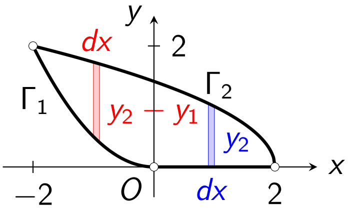
- Expression de son aire

  L'intégration par rapport à x exige de distinguer deux cas, car les tranches verticales ne sont pas de même type à gauche et à droite de $x = 0$:

Première méthode : intégration par rapport à x

- Esquisse du domaine



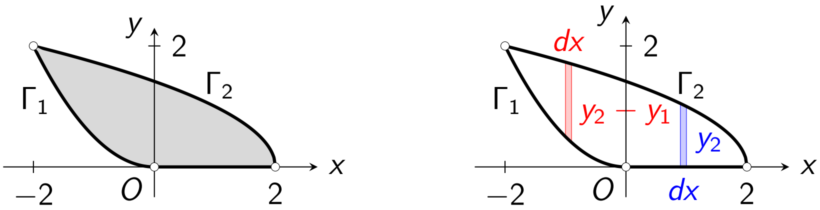


- Expression de son aire

  L'intégration par rapport à x exige de distinguer deux cas, car les tranches verticales ne sont pas de même type à gauche et à droite de $x = 0$:

Première méthode : intégration par rapport à x

- Esquisse du domaine



- Expression de son aire

  L'intégration par rapport à x exige de distinguer deux cas, car les tranches verticales ne sont pas de même type à gauche et à droite de $x = 0$:

$$A = \int_{-2}^{0} [\, y_2(x) - y_1(x)\,]\, dx + \int_{0}^{2} y_2(x)\, dx\,.$$

Première méthode : intégration par rapport à x

$$A = \int_{-2}^{0} [\, y_2(x) - y_1(x) \,] \, dx + \int_{0}^{2} y_2(x) \, dx \, ,$$

Première méthode : intégration par rapport à x

$$A = \int_{-2}^{0} [\, y_2(x) - y_1(x) \,]\, dx + \int_{0}^{2} y_2(x)\, dx \,,$$

avec $\quad y_1(x) = \dfrac{x^2}{2}$

Première méthode : intégration par rapport à x

$$A = \int_{-2}^{0} [\, y_2(x) - y_1(x) \,] \, dx + \int_{0}^{2} y_2(x) \, dx \,,$$

avec $\quad y_1(x) = \dfrac{x^2}{2} \quad$ et $\quad y_2(x) = \sqrt{2 - x}\,,\;$ car $\; y_2 \geq 0\,.$

Première méthode : intégration par rapport à x

$$A = \int_{-2}^{0} [\, y_2(x) - y_1(x) \,] \, dx + \int_{0}^{2} y_2(x) \, dx \,,$$

avec $\quad y_1(x) = \dfrac{x^2}{2} \quad$ et $\quad y_2(x) = \sqrt{2-x}\,,\;$ car $\; y_2 \geq 0\,.$

$$A = \int_{-2}^{0} \left[\sqrt{2-x} - \tfrac{x^2}{2} \right] dx + \int_{0}^{2} \sqrt{2-x} \, dx$$

Première méthode : intégration par rapport à x

$$A = \int_{-2}^{0} [\,y_2(x) - y_1(x)\,]\,dx + \int_{0}^{2} y_2(x)\,dx\,,$$

avec $\quad y_1(x) = \dfrac{x^2}{2} \quad$ et $\quad y_2(x) = \sqrt{2-x}\,,\;$ car $\; y_2 \geq 0\,.$

$$A = \int_{-2}^{0} \left[\sqrt{2-x} - \tfrac{x^2}{2}\right] dx + \int_{0}^{2} \sqrt{2-x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\,(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{2}{3}\,(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2}$$

Première méthode : intégration par rapport à x

$$A = \int_{-2}^{0} [\, y_2(x) - y_1(x)\,]\, dx + \int_{0}^{2} y_2(x)\, dx\,,$$

avec $\quad y_1(x) = \dfrac{x^2}{2} \quad$ et $\quad y_2(x) = \sqrt{2-x}\,,\;$ car $\; y_2 \geq 0\,.$

$$A = \int_{-2}^{0} \left[\sqrt{2-x} - \tfrac{x^2}{2} \right] dx + \int_{0}^{2} \sqrt{2-x}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\,(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6} \right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{2}{3}\,(2-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{2} = 4\,.$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

Il est ici plus simple de calculer l'aire

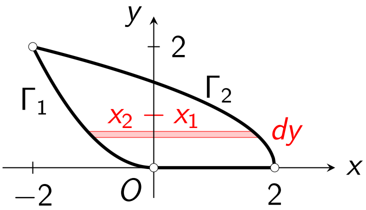
A de ce domaine,

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

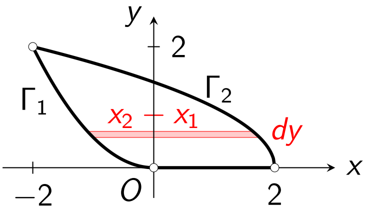
Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :



Deuxième méthode : intégration par rapport à y

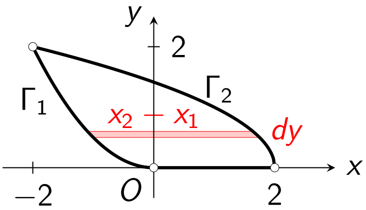
Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :

$$x^2 - 2y = 0\,,\ \ x \leq 0$$



Deuxième méthode : intégration par rapport à y

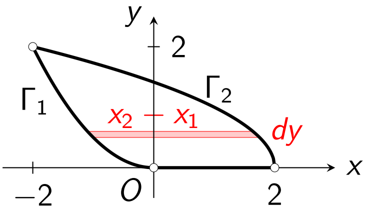
Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :



$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \leq 0 \iff x_1(y) = -\sqrt{2y}$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

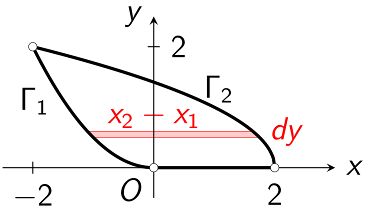
Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :



$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \le 0 \ \Leftrightarrow\ x_1(y) = -\sqrt{2y} \quad \text{et} \quad y^2 + x - 2 = 0$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

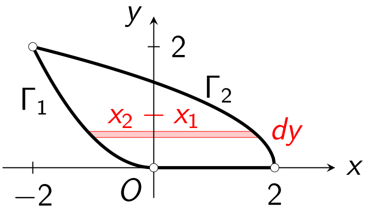
Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :



$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \leq 0 \ \Leftrightarrow\ x_1(y) = -\sqrt{2y} \quad \text{et} \quad y^2 + x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x_2(y) = 2 - y^2.$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :

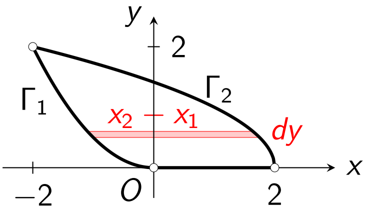


$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \leq 0 \ \Leftrightarrow\ x_1(y) = -\sqrt{2y} \quad \text{et} \quad y^2 + x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x_2(y) = 2 - y^2.$$

$$A = \int_0^2 [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :

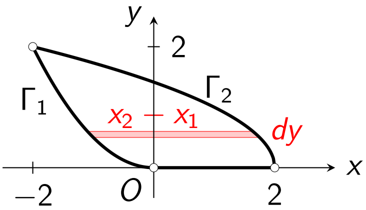


$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \leq 0 \iff x_1(y) = -\sqrt{2y} \quad \text{et} \quad y^2 + x - 2 = 0 \iff x_2(y) = 2 - y^2.$$

$$A = \int_0^2 [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy \;=\; \int_0^2 \Big[\,(2 - y^2) - (-\sqrt{2y}\,)\Big]\,dy$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :



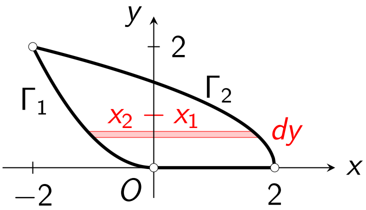
$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \leq 0 \iff x_1(y) = -\sqrt{2y} \quad \text{et} \quad y^2 + x - 2 = 0 \iff x_2(y) = 2 - y^2.$$

$$A = \int_0^2 [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy = \int_0^2 \Big[(2 - y^2) - (-\sqrt{2y}\,)\Big]\,dy$$

$$= \left[2y - \frac{y^3}{3} + \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{y}^{\,3}\right]_0^2$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :



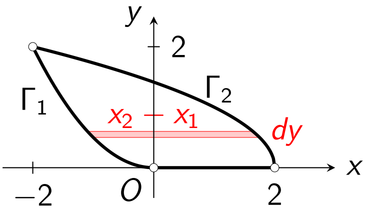
$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \leq 0 \ \Leftrightarrow\ x_1(y) = -\sqrt{2y} \quad \text{et} \quad y^2 + x - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x_2(y) = 2 - y^2.$$

$$A = \int_0^2 [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy \ = \int_0^2 \Big[(2 - y^2) - (-\sqrt{2y}\,) \Big]\,dy$$

$$= \left[2y - \frac{y^3}{3} + \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{y}^{\,3} \right]_0^2 = \left[\left(4 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \right) - 0 \right]$$

Deuxième méthode : intégration par rapport à y

Il est ici plus simple de calculer l'aire A de ce domaine, en intégrant par rapport à la variable y :



$$x^2 - 2y = 0\,,\ x \leq 0 \iff x_1(y) = -\sqrt{2y} \quad \text{et} \quad y^2 + x - 2 = 0 \iff x_2(y) = 2 - y^2.$$

$$A = \int_0^2 [\,x_2(y) - x_1(y)\,]\,dy = \int_0^2 \left[(2 - y^2) - (-\sqrt{2y}\,)\right] dy$$

$$= \left[2y - \frac{y^3}{3} + \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{y}^{\,3}\right]_0^2 = \left[\left(4 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right) - 0\right] = 4\,.$$

Encore un exemple

Exemple 4

Encore un exemple

Exemple 4

Dans le plan, on considère la droite d et l'arc d'ellipse Γ :

Encore un exemple

Exemple 4

Dans le plan, on considère la droite d et l'arc d'ellipse Γ :

$$d: \quad y = x - 1$$

Encore un exemple

Exemple 4

Dans le plan, on considère la droite d et l'arc d'ellipse Γ :

$$d : \quad y = x - 1 \qquad \text{et} \qquad \Gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{3}\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad -\tfrac{\pi}{2} \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Encore un exemple

Exemple 4

Dans le plan, on considère la droite d et l'arc d'ellipse Γ :

$$d: \quad y = x - 1 \qquad \text{et} \qquad \Gamma: \begin{cases} x(t) = \sqrt{3}\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

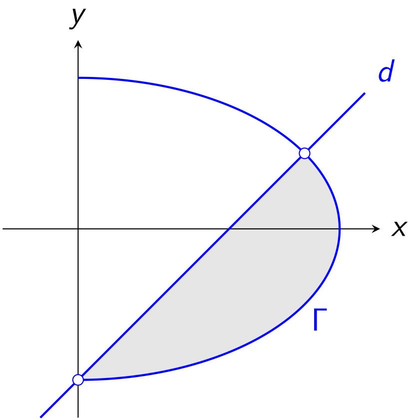
Calculer l'aire du domaine fini limité par l'arc Γ et la droite d.

Exemple 4

Représentation du domaine :

Exemple 4

Représentation du domaine :



Exemple 4

Points d'intersections :

Exemple 4

Points d'intersections :

Soit $M(x(t)\,, y(t))$ un point de Γ,

Exemple 4

Points d'intersections :

Soit $M(x(t)\,,\,y(t))$ un point de Γ, il appartient à d si et seulement si

$$y(t) = x(t) - 1$$

Exemple 4

Points d'intersections :

Soit $M(x(t)\,,\,y(t))$ un point de Γ, il appartient à d si et seulement si

$$y(t) = x(t) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos t - \sin t = 1$$

Exemple 4

Points d'intersections :

Soit $M(x(t)\,,\,y(t))$ un point de Γ, il appartient à d si et seulement si

$$y(t) = x(t) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos t - \sin t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}$$

Exemple 4

Points d'intersections :

Soit $M(x(t)\,,\,y(t))$ un point de Γ, il appartient à d si et seulement si

$$y(t) = x(t) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos t - \sin t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{6}\cos t - \sin\tfrac{\pi}{6}\sin t = \frac{1}{2}$$

Exemple 4

Points d'intersections :

Soit $M(x(t)\,,\,y(t))$ un point de Γ, il appartient à d si et seulement si

$$y(t) = x(t) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos t - \sin t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{6}\cos t - \sin\tfrac{\pi}{6}\sin t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(t + \tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\tfrac{\pi}{3}$$

Exemple 4

Points d'intersections :

Soit $M(x(t)\,,\,y(t))$ un point de Γ, il appartient à d si et seulement si

$$y(t) = x(t) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\cos t - \sin t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{6}\,\cos t - \sin\tfrac{\pi}{6}\,\sin t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(t + \tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\tfrac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad t = \frac{\pi}{6}\,, \qquad \left(-\tfrac{\pi}{2} \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}\right)\,.$$

Exemple 4

Ici aussi,

Exemple 4

Ici aussi, il est plus simple

de découper le domaine

Exemple 4

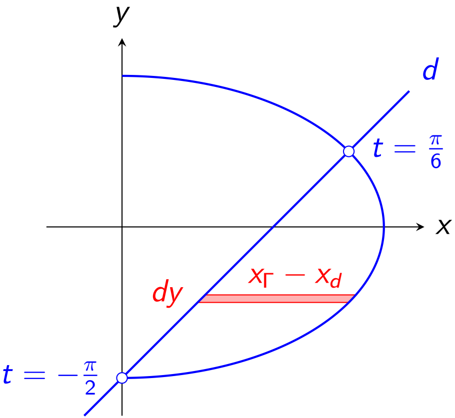
Ici aussi, il est plus simple

de découper le domaine

en tranches horizontales.

Exemple 4

Ici aussi, il est plus simple de découper le domaine en tranches horizontales.



Exemple 4

Expression de l'aire :

Exemple 4

Expression de l'aire : $$A = \int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\ dy\ ,$$

Exemple 4

Expression de l'aire : $$A = \int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\ dy\ ,$$

avec $$x_\Gamma = x(t)\,,$$

Exemple 4

Expression de l'aire : $\quad A = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\; dy\,,$

avec $\quad x_\Gamma = x(t)\,, \quad x_d = y + 1$

Exemple 4

Expression de l'aire : $\quad A = \int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\ dy\ ,$

avec $\quad x_\Gamma = x(t)\,, \quad x_d = y + 1 = y(t) + 1$

Exemple 4

Expression de l'aire : $A = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\, dy\,,$

avec $\quad x_\Gamma = x(t)\,, \quad x_d = y + 1 = y(t) + 1 \quad$ et $\quad dy = \dot{y}(t)\, dt\,.$

Exemple 4

Expression de l'aire : $\quad A = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\ dy\ ,$

avec $\quad x_\Gamma = x(t)\,, \quad x_d = y + 1 = y(t) + 1 \quad$ et $\quad dy = \dot{y}(t)\,dt\,.$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} [\,x(t) - (y(t) + 1)\,]\ \dot{y}(t)\ dt$$

Exemple 4

Expression de l'aire : $\quad A = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\ dy\,,$

avec $\quad x_\Gamma = x(t)\,, \quad x_d = y + 1 = y(t) + 1 \quad$ et $\quad dy = \dot{y}(t)\, dt\,.$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} [\,x(t) - (y(t) + 1)\,]\ \dot{y}(t)\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\sqrt{3}\cos t - \sin t - 1\right] \cos t\ dt\,,$$

Exemple 4

Expression de l'aire : $\quad A = \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} (x_\Gamma - x_d)\ dy\,,$

avec $\quad x_\Gamma = x(t)\,, \quad x_d = y + 1 = y(t) + 1 \quad$ et $\quad dy = \dot{y}(t)\,dt\,.$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} [\,x(t) - (y(t) + 1)\,]\ \dot{y}(t)\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\sqrt{3}\cos t - \sin t - 1\right] \cos t\ dt\,,$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left[\sqrt{3}\cos^2 t - \tfrac{1}{2}\sin(2t) - \cos t\right] dt\,.$$

Exemple 4

Intégration de $\cos^2(t)$:

Exemple 4

Intégration de $\cos^2(t)$:

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) \right.$$

Exemple 4

Intégration de $\cos^2(t)$:

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \right.$$

Exemple 4

Intégration de $\cos^2(t)$:

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\right]$$

Exemple 4

Intégration de $\cos^2(t)$:

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\right]$$

$$\int \cos^2 t \; dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} \; dt$$

Exemple 4

Intégration de $\cos^2(t)$:

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\right]$$

$$\int \cos^2 t \; dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C\,.$$

Exemple 4

Conclusion :

Exemple 4

Conclusion :

$$A \;=\; \left[\sqrt{3}\,\frac{t}{2}+\sqrt{3}\,\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{1}{4}\cos(2t)-\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$$

Exemple 4

Conclusion :

$$
\begin{aligned}
A &= \left[\sqrt{3}\,\frac{t}{2} + \sqrt{3}\,\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{4}\cos(2t) - \sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi}{12} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} + 0 - \frac{1}{4} + 1\right)\right]
\end{aligned}
$$

Exemple 4

Conclusion :

$$\begin{aligned}
A &= \left[\sqrt{3}\,\frac{t}{2} + \sqrt{3}\,\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{4}\,\cos(2t) - \sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi}{12} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} + 0 - \frac{1}{4} + 1\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Exemple 4

Conclusion :

$$
\begin{aligned}
A &= \left[\sqrt{3}\,\frac{t}{2} + \sqrt{3}\,\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{4}\,\cos(2t) - \sin t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi}{12} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} + 0 - \frac{1}{4} + 1 \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{4} \approx 1,0638\,.
\end{aligned}
$$