Calcul Intégral

Calcul Intégral

2. L'intégrale indéfinie

2.2 Recherche de primitives

2.2 Recherche de primitives

2.2.5 Intégration des fonctions rationnelles trigonométriques

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition :

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples :

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2+\sin^2(x)}{\cos(x)-1}\,,$

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2 + \sin^2(x)}{\cos(x) - 1}\,,\ g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\tan^2(x)}$

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2+\sin^2(x)}{\cos(x)-1}$, $g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\tan^2(x)}$ et $h(x) = \dfrac{\tan(3x)\cdot\sin(x)}{\cos(x)-\cot^2(x)}$

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2 + \sin^2(x)}{\cos(x) - 1}$, $g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\tan^2(x)}$ et $h(x) = \dfrac{\tan(3x) \cdot \sin(x)}{\cos(x) - \cot^2(x)}$

sont des fonctions rationnelles trigonométriques.

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2+\sin^2(x)}{\cos(x)-1}\,,\ g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\tan^2(x)}$ et $h(x) = \dfrac{\tan(3x)\cdot\sin(x)}{\cos(x)-\cot^2(x)}$

sont des fonctions rationnelles trigonométriques.

Contre-exemples :

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2+\sin^2(x)}{\cos(x)-1}$, $g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\tan^2(x)}$ et $h(x) = \dfrac{\tan(3x)\cdot\sin(x)}{\cos(x)-\cot^2(x)}$

sont des fonctions rationnelles trigonométriques.

Contre-exemples : $i(x) = \dfrac{\sqrt{3+\sin(x)}}{\cos(x)}$

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2+\sin^2(x)}{\cos(x)-1}\,,\ g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\tan^2(x)}$ et $h(x) = \dfrac{\tan(3x)\cdot\sin(x)}{\cos(x)-\cot^2(x)}$

sont des fonctions rationnelles trigonométriques.

Contre-exemples : $i(x) = \dfrac{\sqrt{3+\sin(x)}}{\cos(x)}$ et $j(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{\tan(x)}$

Fonction rationnelle trigonométrique

Définition : Une fonction rationnelle trigonométrique est une fonction de type

$$f(x) = \frac{P(\sin x\,,\ \cos x)}{Q(\sin x\,,\ \cos x)}\,,$$

où P et Q sont des polynômes à deux variables, à coefficients réels.

Exemples : $f(x) = \dfrac{2+\sin^2(x)}{\cos(x)-1}$, $g(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\tan^2(x)}$ et $h(x) = \dfrac{\tan(3x)\cdot\sin(x)}{\cos(x)-\cot^2(x)}$

sont des fonctions rationnelles trigonométriques.

Contre-exemples : $i(x) = \dfrac{\sqrt{3+\sin(x)}}{\cos(x)}$ et $j(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{\tan(x)}$ n'en sont pas.

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple :

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx\,.$

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\, dx$. En posant $z = \sin(x)$,

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\, dx$. En posant $z = \sin(x)$, $dz = \cos(x)\, dx$,

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx$. En posant $z = \sin(x)$, $dz = \cos(x)\,dx$, on obtient

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx =$$

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx$. En posant $z = \sin(x)$, $dz = \cos(x)\,dx$, on obtient

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] =$$

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx$. En posant $z = \sin(x)$, $dz = \cos(x)\,dx$, on obtient

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{z^2}{1-z^2}\,dz =$$

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx$. En posant $z = \sin(x)$, $dz = \cos(x)\,dx$, on obtient

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{z^2}{1-z^2}\,dz = \int \left[-1 + \frac{1}{1-z^2}\right] dz$$

Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique

Comment intégrer une fonction rationnelle trigonométrique ?

La bonne idée est d'effectuer un changement de variable pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx$. En posant $z = \sin(x)$, $dz = \cos(x)\,dx$, on obtient

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{z^2}{1-z^2}\,dz = \int \left[-1 + \frac{1}{1-z^2}\right] dz$$

que l'on sait intégrer par décomposition en éléments simples.

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R\left(\sin x\,,\,\cos x\right)$

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,,\,\cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,,\,\cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ?

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,,\,\cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,,\,\cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

$$z = \sin(x)\,,$$

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,,\, \cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

$$z = \sin(x)\,, \quad z = \cos(x)\,,$$

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,, \cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

$$z = \sin(x)\,, \quad z = \cos(x)\,, \quad z = \tan(x)$$

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R\,(\sin x\,,\, \cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

$$z = \sin(x)\,, \quad z = \cos(x)\,, \quad z = \tan(x) \quad \text{ou} \quad z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \ ?$$

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,, \cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

$$z = \sin(x)\,, \quad z = \cos(x)\,, \quad z = \tan(x) \quad \text{ou} \quad z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \ ?$$

Nous allons montrer que le bon choix

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,, \cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

$$z = \sin(x)\,, \quad z = \cos(x)\,, \quad z = \tan(x) \quad \text{ou} \quad z = \tan\left(\tfrac{x}{2}\right) \ ?$$

Nous allons montrer que le bon choix peut être fait grâce aux tests de Bioche

Choix du changement de variable

Soit $f(x) = R(\sin x\,,\, \cos x)$ une fonction rationnelle trigonométrique.

Comment choisir le bon changement de variable ? C'est à dire celui qui débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

$$z = \sin(x)\,, \quad z = \cos(x)\,, \quad z = \tan(x) \quad \text{ou} \quad z = \tan\left(\tfrac{x}{2}\right) \ ?$$

Nous allons montrer que le bon choix peut être fait grâce aux tests de Bioche effectués sur le produit $f(x) \cdot dx$.

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,,$$

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \qquad dz = \cos(x)\,dx$$

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)}\cdot[\cos(x)\,dx]$$

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)}\cdot[\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle,

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)} \cdot [\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)}\cdot[\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)} \cdot [\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ soit rationnel en z,

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)}\cdot[\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ est invariant en $(\pi - x)$,

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)}\cdot[\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ est invariant en $(\pi - x)$, donc si $f(\pi - x) = -f(x)$.

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)} \cdot [\cos(x)\, dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ est invariant en $(\pi - x)$, donc si $f(\pi - x) = -f(x)$.

En d'autres termes,

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)}\cdot[\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ est invariant en $(\pi - x)$, donc si $f(\pi - x) = -f(x)$.

En d'autres termes, si $f(\pi - x)\cdot d(\pi - x) = f(x)\cdot dx$,

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)} \cdot [\,\cos(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ est invariant en $(\pi - x)$, donc si $f(\pi - x) = -f(x)$.

En d'autres termes, si $f(\pi - x)\cdot d(\pi - x) = f(x)\cdot dx$,

car $d(\pi - x) = (\pi - x)'\,dx$

Changement de variable $z = \sin(x)$

i) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \sin(x)$?

$$z = \sin(x)\,, \quad dz = \cos(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{\cos(x)}\cdot[\cos(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{\cos(x)}$ est invariant en $(\pi - x)$, donc si $f(\pi - x) = -f(x)$.

En d'autres termes, si $f(\pi - x)\cdot d(\pi - x) = f(x)\cdot dx$,

car $d(\pi - x) = (\pi - x)'\,dx = -dx$.

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,,$$

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \qquad dz = -\sin(x)\,dx$$

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)} \cdot [-\sin(x)\,dx\,]$$

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle,

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ soit rationnel en z,

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ soit rationnel en z,

donc si $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ est invariant en $(-x)$,

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ est invariant en $(-x)$, donc si $f(-x) = -f(x)$.

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ est invariant en $(-x)$, donc si $f(-x) = -f(x)$.

En d'autres termes,

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ est invariant en $(-x)$, donc si $f(-x) = -f(x)$.

En d'autres termes, si $f(-x)\cdot d(-x) = f(x)\cdot dx$,

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ est invariant en $(-x)$, donc si $f(-x) = -f(x)$.

En d'autres termes, si $f(-x)\cdot d(-x) = f(x)\cdot dx$,

car $d(-x) = (-x)'\,dx$

Changement de variable $z = \cos(x)$

ii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \cos(x)$?

$$z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = \frac{f(x)}{-\sin(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,]$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut donc que le nouvel intégrant $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ soit rationnel en z, donc si $\dfrac{f(x)}{-\sin(x)}$ est invariant en $(-x)$, donc si $f(-x) = -f(x)$.

En d'autres termes, si $f(-x)\cdot d(-x) = f(x)\cdot dx$,

car $d(-x) = (-x)'\,dx = -dx$.

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,,$$

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \qquad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = f(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \qquad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \cdot dx = f(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle,

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = f(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = f(x)\cdot\cos^2(x)\cdot\frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x)\cdot\cos^2(x)$

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = f(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x) \cdot \cos^2(x)$ soit rationnel en z ,

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \qquad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x)\cdot dx = f(x)\cdot \cos^2(x)\cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x)\cdot\cos^2(x)$ soit rationnel en z, donc si $f(x)\cdot\cos^2(x)$ est invariant en $(\pi + x)$,

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot dx = f(x)\cdot\cos^2(x)\cdot\frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x)\cdot\cos^2(x)$ soit rationnel en z, donc si $f(x)\cdot\cos^2(x)$ est invariant en $(\pi + x)$, donc si $f(\pi + x) = f(x)$.

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \qquad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \cdot dx = f(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x) \cdot \cos^2(x)$ soit rationnel en z, donc si $f(x) \cdot \cos^2(x)$ est invariant en $(\pi + x)$, donc si $f(\pi + x) = f(x)$.

En d'autres termes,

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \qquad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x)\cdot dx = f(x)\cdot\cos^2(x)\cdot\frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x)\cdot\cos^2(x)$ soit rationnel en z, donc si $f(x)\cdot\cos^2(x)$ est invariant en $(\pi + x)$, donc si $f(\pi + x) = f(x)$.

En d'autres termes, si $f(\pi + x)\cdot d(\pi + x) = f(x)\cdot dx$,

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot dx = f(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x) \cdot \cos^2(x)$ soit rationnel en z,

donc si $f(x) \cdot \cos^2(x)$ est invariant en $(\pi + x)$, donc si $f(\pi + x) = f(x)$.

En d'autres termes, si $f(\pi + x) \cdot d(\pi + x) = f(x) \cdot dx$,

car $d(\pi + x) = (\pi + x)'\, dx$

Changement de variable $z = \tan(x)$

iii) Dans quelle situation effectuer le changement de variable $z = \tan(x)$?

$$z = \tan(x)\,, \qquad dz = \frac{dx}{\cos^2(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f(x)\cdot dx = f(x)\cdot \cos^2(x)\cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}$$

Pour que ce changement de variable débouche sur l'intégration d'une fonction rationnelle, il faut que le nouvel intégrant $f(x)\cdot\cos^2(x)$ soit rationnel en z, donc si $f(x)\cdot\cos^2(x)$ est invariant en $(\pi + x)$, donc si $f(\pi + x) = f(x)$.

En d'autres termes, si $f(\pi + x)\cdot d(\pi + x) = f(x)\cdot dx$,

car $d(\pi + x) = (\pi + x)'\,dx = dx$.

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs,

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle.

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,,$$

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,,$$

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,, \quad \sin(x) = \frac{2z}{1+z^2}$$

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,, \quad \sin(x) = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,.$$

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,, \quad \sin(x) = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,.$$

Et $\quad f(x) \cdot dx$

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,, \quad \sin(x) = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,.$$

Et $\quad f(x)\cdot dx = R\left(\sin x\,,\, \cos x\right)\cdot dx$

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,, \quad \sin(x) = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,.$$

$$\text{Et} \quad f(x)\cdot dx = R(\sin x\,,\,\cos x)\cdot dx = R\left(\tfrac{2z}{1+z^2}\,,\,\tfrac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2}{1+z^2}\cdot dz\,.$$

Changement de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

iv) Lorsque les trois tests d'invariance de Bioche sont négatifs, on peut poser $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Ce changement de variable débouche toujours sur l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet :

$$x = 2\arctan(z)\,, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,, \quad \sin(x) = \frac{2z}{1+z^2} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,.$$

$$\text{Et} \quad f(x)\cdot dx = R\left(\sin x\,,\,\cos x\right)\cdot dx = R\left(\tfrac{2z}{1+z^2}\,,\,\tfrac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2}{1+z^2}\cdot dz\,.$$

Le nouvel intégrant est bien une expression rationnelle en z.

Tests de Bioche

En résumé :

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$,

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$,

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$, on pose $z = \cos(x)$,

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$, on pose $z = \cos(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$,
  on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$,
  on pose $z = \cos(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi + x)$,

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$, on pose $z = \cos(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi + x)$, on pose $z = \tan(x)$

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$, on pose $z = \cos(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi + x)$, on pose $z = \tan(x)$
- et si les trois tests d'invariance précédents sont négatifs,

Tests de Bioche

En résumé : soit $f(x)$ une fonction rationnelle trigonométrique,

- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$, on pose $z = \sin(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$, on pose $z = \cos(x)$,
- si le produit $f(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi + x)$, on pose $z = \tan(x)$
- et si les trois tests d'invariance précédents sont négatifs, on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exemples

Exemple 1 :

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)}$.

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)}.$

- Test d'invariance :

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)}$.

- Test d'invariance :

$\dfrac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)}$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi+x)$.

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)}$.

- Test d'invariance :

$$\frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace } \; x \; \text{ par } \; (\pi + x)\,.$$

- Changement de variable :

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + 3\,\sin(2x) + 7\,\cos^2(x)}$.

- Test d'invariance :

  $\dfrac{dx}{1 + 3\,\sin(2x) + 7\,\cos^2(x)}$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi + x)$.

- Changement de variable :

  On pose $z = \tan(x)$,

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)}$.

- Test d'invariance :

  $\dfrac{dx}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)}$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi+x)$.

- Changement de variable :

  On pose $z=\tan(x)$, $dx=\dfrac{dz}{1+z^2}$,

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)}\,.$

- Test d'invariance :

$$\frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace } x \text{ par } (\pi+x)\,.$$

- Changement de variable :

On pose $z=\tan(x)\,,\quad dx=\dfrac{dz}{1+z^2}\,,\quad \sin(2x)=\dfrac{2z}{1+z^2}\,,$

Exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)}\,.$

- Test d'invariance :

$$\frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace } \; x \; \text{ par } \; (\pi+x)\,.$$

- Changement de variable :

On pose $z=\tan(x)\,,\quad dx=\dfrac{dz}{1+z^2}\,,\quad \sin(2x)=\dfrac{2z}{1+z^2}\,,\quad \cos^2(x)=\dfrac{1}{1+z^2}\,.$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1 + 3\,\sin(2x) + 7\,\cos^2(x)} =$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1+3\sin(2x)+7\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{6z}{1+z^2}+\frac{7}{1+z^2}}$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{6z}{1+z^2}+\frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+6z+8}\,.$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{6z}{1+z^2}+\frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+6z+8}\,.$$

- Intégration :

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1 + 3\ \sin(2x) + 7\ \cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1 + \frac{6z}{1+z^2} + \frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2 + 6z + 8}\,.$$

- Intégration :

$$\int \frac{dz}{z^2 + 6z + 8} =$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1 + 3\ \sin(2x) + 7\ \cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1 + \frac{6z}{1+z^2} + \frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2 + 6z + 8}\,.$$

- Intégration :

$$\int \frac{dz}{z^2 + 6z + 8} = \int \frac{dz}{(z+2)\,(z+4)} =$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{6z}{1+z^2}+\frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+6z+8}\,.$$

- Intégration :

$$\int \frac{dz}{z^2+6z+8} = \int \frac{dz}{(z+2)\,(z+4)} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+4}\right] dz$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{6z}{1+z^2}+\frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+6z+8}\,.$$

- Intégration :

$$\int \frac{dz}{z^2+6z+8} = \int \frac{dz}{(z+2)\,(z+4)} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+4}\right] dz$$

$$= \frac{1}{2}\,\Big[\ln|z+2| - \ln|z+4|\Big] + C$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{6z}{1+z^2}+\frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+6z+8}\,.$$

- Intégration :

$$\int \frac{dz}{z^2+6z+8} = \int \frac{dz}{(z+2)\,(z+4)} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+4}\right] dz$$

$$= \frac{1}{2}\,\Big[\ln|z+2| - \ln|z+4|\Big] + C = \ln\sqrt{\left|\frac{z+2)}{z+4}\right|} + C$$

Exemple 1

$$\int \frac{dx}{1+3\,\sin(2x)+7\,\cos^2(x)} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{6z}{1+z^2}+\frac{7}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2+6z+8}\,.$$

- Intégration :

$$\int \frac{dz}{z^2+6z+8} = \int \frac{dz}{(z+2)\,(z+4)} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+4}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2}\,\Big[\ln|z+2| - \ln|z+4|\Big] + C = \ln\sqrt{\left|\frac{z+2)}{z+4}\right|} + C = \ln\sqrt{\left|\frac{2+\tan(x)}{4+\tan(x)}\right|} + C\,.$$

Exemples

Exemple 2 :

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx$.

- Test d'invariance :

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\, dx\,.$

- Test d'invariance :

$$\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\, dx \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace } \; x \; \text{ par } \; (-x)\,.$$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

  $\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$.

- Changement de variable :

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

  $\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$.

- Changement de variable :

  On pose $z = \cos(x)\,,$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

  $$\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace} \quad x \quad \text{par} \quad (-x)\,.$$

- Changement de variable :

  On pose $\; z = \cos(x)\,, \quad dz = -\sin(x)\,dx\,,$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

  $\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$.

- Changement de variable :

  On pose $z = \cos(x)\,,\quad dz = -\sin(x)\,dx\,,\quad \sin^2(x) = 1 - z^2\,,$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

$$\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace} \quad x \quad \text{par} \quad (-x)\,.$$

- Changement de variable :

On pose $z=\cos(x)\,,\quad dz=-\sin(x)\,dx\,,\quad \sin^2(x)=1-z^2\,,\quad \cos^3(x)=z^3\,.$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

  $\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$.

- Changement de variable :

  On pose $z=\cos(x)\,,\quad dz=-\sin(x)\,dx\,,\quad \sin^2(x)=1-z^2\,,\quad \cos^3(x)=z^3\,.$

  $$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx =$$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

  $$\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace} \quad x \quad \text{par} \quad (-x)\,.$$

- Changement de variable :

  On pose $\;z = \cos(x)\,,\quad dz = -\sin(x)\,dx\,,\quad \sin^2(x) = 1 - z^2\,,\quad \cos^3(x) = z^3\,.$

  $$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx = -\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^3(x)} \cdot [-\sin(x)\,dx\,] =$$

Exemples

Exemple 2 : $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

  $\displaystyle\frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$.

- Changement de variable :

  On pose $z=\cos(x)\,,\quad dz=-\sin(x)\,dx\,,\quad \sin^2(x)=1-z^2\,,\quad \cos^3(x)=z^3\,.$

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^3(x)}\,dx = -\int \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^3(x)}\cdot[-\sin(x)\,dx\,] = -\int \frac{1-z^2}{1+z^3}\,dz\,.$$

Exemple 2

- Intégration :

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2 - 1}{z^3 + 1}\, dz =$$

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2 - 1}{z^3 + 1}\, dz = \int \frac{z - 1}{z^2 - z + 1}\, dz =$$

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \int \frac{z-1}{z^2-z+1}\,dz = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2z-1}{z^2-z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z^2-z+1}\right] dz\,.$$

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \int \frac{z-1}{z^2-z+1}\,dz = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2z-1}{z^2-z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z^2-z+1}\right] dz\,.$$

Et l'intégration de $\dfrac{1}{z^2-z+1}$ donne une arctangente.

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \int \frac{z-1}{z^2-z+1}\,dz = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2z-1}{z^2-z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z^2-z+1}\right] dz\,.$$

Et l'intégration de $\dfrac{1}{z^2-z+1}$ donne une arctangente. En effet,

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \int \frac{z-1}{z^2-z+1}\,dz = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2z-1}{z^2-z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z^2-z+1}\right] dz\,.$$

Et l'intégration de $\dfrac{1}{z^2-z+1}$ donne une arctangente. En effet,

$$\frac{1}{z^2-z+1} =$$

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \int \frac{z-1}{z^2-z+1}\,dz = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2z-1}{z^2-z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z^2-z+1}\right] dz\,.$$

Et l'intégration de $\dfrac{1}{z^2-z+1}$ donne une arctangente. En effet,

$$\frac{1}{z^2-z+1} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \int \frac{z-1}{z^2-z+1}\,dz = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2z-1}{z^2-z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z^2-z+1}\right] dz\,.$$

Et l'intégration de $\dfrac{1}{z^2-z+1}$ donne une arctangente. En effet,

$$\frac{1}{z^2-z+1} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

Exemple 2

- Intégration :

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \int \frac{z-1}{z^2-z+1}\,dz = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2z-1}{z^2-z+1} - \frac{\frac{1}{2}}{z^2-z+1}\right] dz\,.$$

Et l'intégration de $\dfrac{1}{z^2-z+1}$ donne une arctangente. En effet,

$$\frac{1}{z^2-z+1} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,.$$

Exemple 2

$$\int \frac{z^2 - 1}{z^3 + 1}\, dz =$$

Exemple 2

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\, dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}\, dz - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dz$$

Exemple 2

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}\,dz - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln\left(z^2-z+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Exemple 2

$$\int \frac{z^2-1}{z^3+1}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}\,dz - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln\left(z^2-z+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\tfrac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln\left[\cos^2(x)-\cos(x)+1\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\tfrac{2\cos(x)-1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

Exemples

Exemple 3 :

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx\,.$

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx\,.$

- Test d'invariance :

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx\,.$

- Test d'invariance :

$\dfrac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$.

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx\,.$

- Test d'invariance :

$\dfrac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$.

- Changement de variable :

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx\,.$

- Test d'invariance :

$\displaystyle\frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$.

- Changement de variable : on pose $z = \sin(x)$,

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx\,.$

- Test d'invariance :

$\dfrac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi - x)$.

- Changement de variable : on pose $z = \sin(x)\,,\quad dz = \cos(x)\, dx\,.$

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx\,.$

- Test d'invariance :

$$\frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace} \quad x \quad \text{par} \quad (\pi - x)\,.$$

- Changement de variable : on pose $z = \sin(x)\,,\quad dz = \cos(x)\, dx\,.$

$$\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4 + \sin^2(x)}\, dx =$$

Exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4+\sin^2(x)}\,dx\,.$

- Test d'invariance :

$$\frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4+\sin^2(x)}\,dx \quad \text{est invariant lorsqu'on remplace} \quad x \quad \text{par} \quad (\pi - x)\,.$$

- Changement de variable : on pose $z = \sin(x)\,,\quad dz = \cos(x)\,dx\,.$

$$\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4+\sin^2(x)}\,dx = \int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4+\sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx]$$

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx\,] =$$

Exemple 3

$$\int \frac{1+10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4+\sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{1+10\,\frac{z}{1-z^2}}{4+z^2}\,dz =$$

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{1 + 10\,\frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\,dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\,dz\,.$$

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{1 + 10\,\frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\,dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\,dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx\,] = \int \frac{1 + 10\,\frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\,dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\,dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} =$$

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx\,] = \int \frac{1 + 10\,\frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\,dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\,dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z)\,(1 + z)\,(4 + z^2)} =$$

Exemple 3

$$\int \frac{1+10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4+\sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{1+10\,\frac{z}{1-z^2}}{4+z^2}\,dz = \int \frac{-z^2+10z+1}{(1-z^2)\,(4+z^2)}\,dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2+10z+1}{(1-z^2)\,(4+z^2)} = \frac{-z^2+10z+1}{(1-z)\,(1+z)\,(4+z^2)} = \frac{a}{1-z}+\frac{b}{1+z}+\frac{cz+d}{4+z^2}\,.$$

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\ \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\ [\cos(x)\, dx\,] = \int \frac{1 + 10\ \frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\ dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\ dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z)\,(1 + z)\,(4 + z^2)} = \frac{a}{1 - z} + \frac{b}{1 + z} + \frac{cz + d}{4 + z^2}\,.$$

Recherche des coefficients par évaluation :

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx] = \int \frac{1 + 10\,\frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\,dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1-z^2)\,(4+z^2)}\,dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1-z^2)\,(4+z^2)} = \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1-z)\,(1+z)\,(4+z^2)} = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1+z} + \frac{cz+d}{4+z^2}\,.$$

Recherche des coefficients par évaluation :

$*$ multiplication par $(1-z)$, puis $z = 1$:

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\,[\cos(x)\,dx\,] = \int \frac{1 + 10\,\frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\,dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\,dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z)\,(1 + z)\,(4 + z^2)} = \frac{a}{1 - z} + \frac{b}{1 + z} + \frac{cz + d}{4 + z^2}\,.$$

Recherche des coefficients par évaluation :

$\ast$ multiplication par $(1 - z)$, puis $z = 1$: $a = 1$,

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\ \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\ [\cos(x)\, dx\,] = \int \frac{1 + 10\ \frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\ dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\ dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z)\,(1 + z)\,(4 + z^2)} = \frac{a}{1 - z} + \frac{b}{1 + z} + \frac{cz + d}{4 + z^2}\,.$$

Recherche des coefficients par évaluation :

$*$ multiplication par $(1 - z)$, puis $z = 1$: $a = 1$,

$*$ multiplication par $(1 + z)$, puis $z = -1$:

Exemple 3

$$\int \frac{1 + 10\ \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}{4 + \sin^2(x)}\ [\cos(x)\, dx\,] = \int \frac{1 + 10\ \frac{z}{1-z^2}}{4 + z^2}\ dz = \int \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)}\ dz\,.$$

- Décomposition en éléments simples :

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z)\,(1 + z)\,(4 + z^2)} = \frac{a}{1 - z} + \frac{b}{1 + z} + \frac{cz + d}{4 + z^2}\,.$$

Recherche des coefficients par évaluation :

$*$ multiplication par $(1 - z)$, puis $z = 1$: $a = 1$,

$*$ multiplication par $(1 + z)$, puis $z = -1$: $b = -1$,

Exemple 3

$*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$:

Exemple 3

$*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c$

Exemple 3

$*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,

Exemple 3

- $*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,
- $*$ évaluation en $z = 0$:

Exemple 3

* multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,
* évaluation en $z = 0$: $\frac{1}{4} = a + b + \frac{d}{4}$

Exemple 3

- $*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \Rightarrow c = 2$,
- $*$ évaluation en $z = 0$: $\frac{1}{4} = a + b + \frac{d}{4} \Rightarrow d = 1$.

Exemple 3

* multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,
* évaluation en $z = 0$: $\frac{1}{4} = a + b + \frac{d}{4} \;\Rightarrow\; d = 1$.

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} + \frac{2z + 1}{4 + z^2}\,.$$

Exemple 3

$*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,

$*$ évaluation en $z = 0$: $\frac{1}{4} = a + b + \frac{d}{4} \;\Rightarrow\; d = 1$.

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} + \frac{2z + 1}{4 + z^2}\,.$$

- Intégration :

Exemple 3

$*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,

$*$ évaluation en $z = 0$: $\frac{1}{4} = a + b + \frac{d}{4} \;\Rightarrow\; d = 1$.

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} + \frac{2z + 1}{4 + z^2}\,.$$

- Intégration :

$$\frac{2z + 1}{4 + z^2} =$$

Exemple 3

$*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,

$*$ évaluation en $z = 0$: $\frac{1}{4} = a + b + \frac{d}{4} \;\Rightarrow\; d = 1$.

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} + \frac{2z + 1}{4 + z^2}\,.$$

- Intégration :

$$\frac{2z + 1}{4 + z^2} = \frac{2z}{4 + z^2} + \frac{1}{4 + z^2} =$$

Exemple 3

$*$ multiplication par z, puis $z \to \infty$: $0 = -a + b + c \;\Rightarrow\; c = 2$,

$*$ évaluation en $z = 0$: $\frac{1}{4} = a + b + \frac{d}{4} \;\Rightarrow\; d = 1$.

$$\frac{-z^2 + 10z + 1}{(1 - z^2)\,(4 + z^2)} = \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z} + \frac{2z + 1}{4 + z^2}\,.$$

- Intégration :

$$\frac{2z + 1}{4 + z^2} = \frac{2z}{4 + z^2} + \frac{1}{4 + z^2} = \frac{2z}{4 + z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 1}\,.$$

Exemple 3

$$\int \frac{2z+1}{4+z^2}\, dz =$$

Exemple 3

$$\int \frac{2z+1}{4+z^2}\, dz = \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

Exemple 3

$$\int \frac{2z+1}{4+z^2}\,dz = \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{-z^2+10z+1}{(1-z^2)\,(4+z^2)}\,dz =$$

Exemple 3

$$\int \frac{2z+1}{4+z^2}\,dz = \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{-z^2+10z+1}{(1-z^2)\,(4+z^2)}\,dz = \int \frac{1}{1-z}\,dz - \int \frac{1}{1+z}\,dz + \int \frac{2z+1}{4+z^2}\,dz$$

Exemple 3

$$\int \frac{2z+1}{4+z^2}\,dz = \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{-z^2+10z+1}{(1-z^2)\,(4+z^2)}\,dz = \int \frac{1}{1-z}\,dz - \int \frac{1}{1+z}\,dz + \int \frac{2z+1}{4+z^2}\,dz$$

$$= -\ln(1-z) - \ln(1+z) + \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

Exemple 3

$$\int \frac{2z+1}{4+z^2}\, dz = \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{-z^2+10z+1}{(1-z^2)\,(4+z^2)}\, dz = \int \frac{1}{1-z}\, dz - \int \frac{1}{1+z}\, dz + \int \frac{2z+1}{4+z^2}\, dz$$

$$= -\ln(1-z) - \ln(1+z) + \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{\cos(x) + 10\tan(x)}{4+\sin^2(x)}\, dx =$$

Exemple 3

$$\int \frac{2z+1}{4+z^2}\,dz = \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{-z^2+10z+1}{(1-z^2)\,(4+z^2)}\,dz = \int \frac{1}{1-z}\,dz - \int \frac{1}{1+z}\,dz + \int \frac{2z+1}{4+z^2}\,dz$$

$$= -\ln(1-z) - \ln(1+z) + \ln(4+z^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{z}{2}\right) + C\,.$$

$$\int \frac{\cos(x)+10\tan(x)}{4+\sin^2(x)}\,dx = \ln\left[\tfrac{4+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right] + \frac{1}{2}\arctan\left[\tfrac{\sin(x)}{2}\right] + C\,.$$

Exemples

Exemple 4 :

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

  on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

  on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(z)$, $dx =$

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\displaystyle\frac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

  on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(z)$, $\displaystyle dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$, $\displaystyle\sin(x) = \frac{2z}{1+z^2}$.

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

  on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(z)$, $dx = \dfrac{2\,dz}{1+z^2}$, $\sin(x) = \dfrac{2z}{1+z^2}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} =$$

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

  on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(z)$, $dx = \dfrac{2\,dz}{1+z^2}$, $\sin(x) = \dfrac{2z}{1+z^2}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} =$$

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(z)$, $dx = \dfrac{2\,dz}{1+z^2}$, $\sin(x) = \dfrac{2z}{1+z^2}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2}{1+2z+z^2}\,dz =$$

Exemples

Exemple 4 : $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)}$.

- Les trois tests d'invariance de Bioche appliqués à $\dfrac{dx}{1+\sin(x)}$ sont négatifs.
- Changement de variable :

on pose $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $x = 2\arctan(z)$, $dx = \dfrac{2\,dz}{1+z^2}$, $\sin(x) = \dfrac{2z}{1+z^2}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2}{1+2z+z^2}\,dz = 2\int \frac{dz}{(1+z)^2}.$$

Exemple 4

- Intégration :

Exemple 4

- Intégration :

$$2\int \frac{dz}{(1+z)^2} =$$

Exemple 4

- Intégration :

$$2\int \frac{dz}{(1+z)^2} = -\frac{2}{1+z} + C\,,$$

Exemple 4

- Intégration :

$$2\int \frac{dz}{(1+z)^2} = -\frac{2}{1+z} + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} =$$

Exemple 4

- Intégration :

$$2\int \frac{dz}{(1+z)^2} = -\frac{2}{1+z} + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)} = -\frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C\,.$$