Chapitre 5.

Variation locale d'une fonction

Chapitre 5.

Variation locale d'une fonction

7. Etude complète d'une fonction

Shéma de l'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose en quatre étapes :

Shéma de l'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose en quatre étapes :

1) Détermination du domaine d'étude

Shéma de l'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose en quatre étapes :

1) Détermination du domaine d'étude

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Shéma de l'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose en quatre étapes :

1) Détermination du domaine d'étude

2) Limite aux "points frontières" du domaine

3) Dérivée, extrema et points remarquables

Shéma de l'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose en quatre étapes :

1) Détermination du domaine d'étude

2) Limite aux "points frontières" du domaine

3) Dérivée, extrema et points remarquables

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

   On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f.

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

   On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire,

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude.

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude.

Si f est périodique et paire ou impaire,

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude.

Si f est périodique et paire ou impaire, on commence par déterminer sa période T

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude.

Si f est périodique et paire ou impaire, on commence par déterminer sa période T et on restreint le domaine d'étude à un intervalle centré à l'origine et de longueur T :

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude.

Si f est périodique et paire ou impaire, on commence par déterminer sa période T et on restreint le domaine d'étude à un intervalle centré à l'origine et de longueur T : $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude.

Si f est périodique et paire ou impaire, on commence par déterminer sa période T et on restreint le domaine d'étude à un intervalle centré à l'origine et de longueur T : $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Puis on teste la parité

Shéma de l'étude d'une fonction

1) Domaine d'étude

On détermine en premier lieu le domaine de définition et le domaine de continuité de f. De plus, si f est périodique ou paire ou impaire, on peut restreindre le domaine d'étude.

Si f est périodique et paire ou impaire, on commence par déterminer sa période T et on restreint le domaine d'étude à un intervalle centré à l'origine et de longueur T : $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Puis on teste la parité et on se restreint à une demi-période.

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\; k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2})$$

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right]$$

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi)$$

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x)$$

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)\,.$$

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)\,.$$

On restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{4}\,[$,

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)\,.$$

On restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$, centré à l'origine et de longueur T.

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

* f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)\,.$$

  On restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$, centré à l'origine et de longueur T.

* f est impaire :

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

* f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)\,.$$

On restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$, centré à l'origine et de longueur T.

* f est impaire : $f(-x) = -f(x)\,,\ \forall\, x \in \,]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$,

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)\,.$$

On restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$, centré à l'origine et de longueur T.

$*$ f est impaire : $f(-x) = -f(x)\,,\ \forall\, x \in\,]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$, on restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$

Shéma de l'étude d'une fonction

Exemple :

$f(x) = \tan(2x)$ est définie et continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$*$ f est périodique de période $T = \frac{\pi}{2}$:

$$f(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tan\left[\,2(x + \tfrac{\pi}{2})\,\right] = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)\,.$$

On restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$, centré à l'origine et de longueur T.

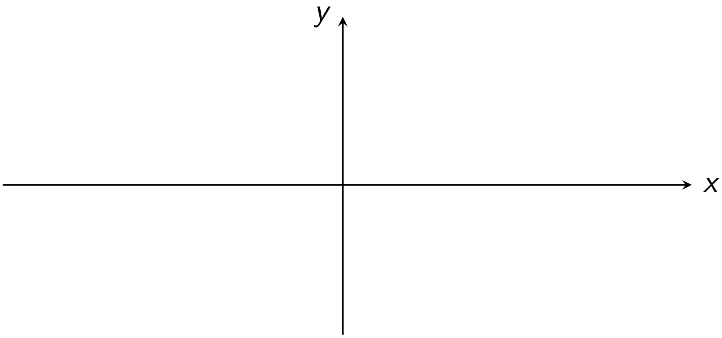
$*$ f est impaire : $f(-x) = -f(x)\,,\ \forall\, x \in\,]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$, on restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$ ou $]-\frac{\pi}{4}\,,\,0\,]$.

Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.

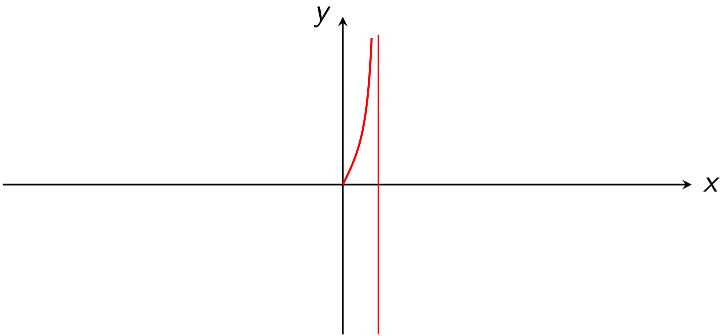
Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.



Shéma de l'étude d'une fonction

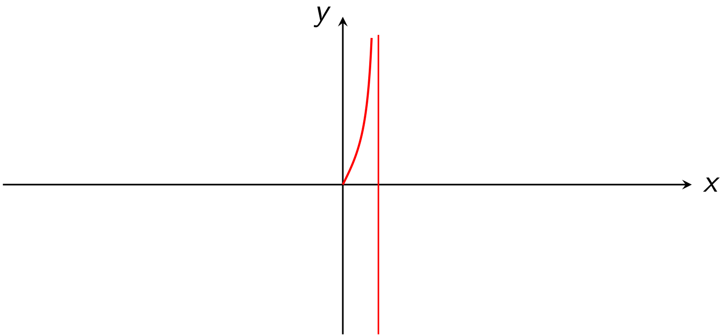
On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right[$.



Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right[$.

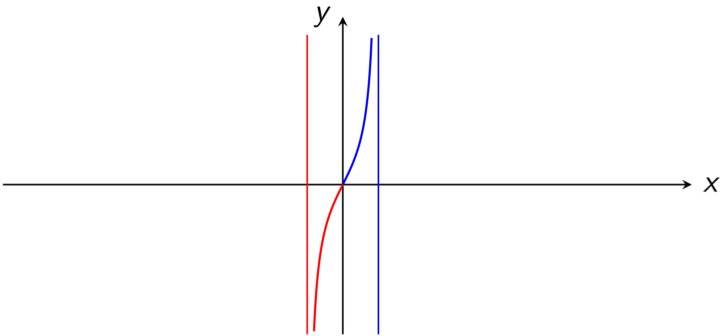
On en déduit le graphe de f sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\right[$ par symétrie de centre O.



Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.

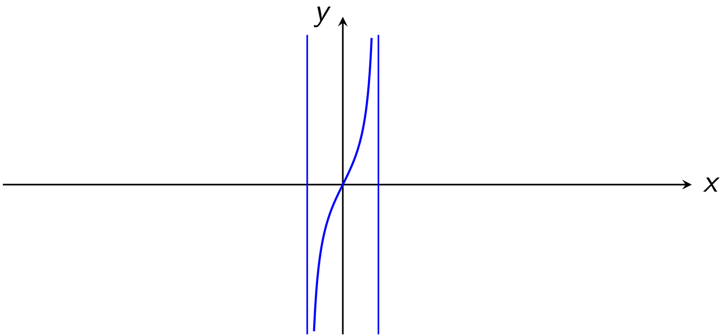
On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$ par symétrie de centre O.



Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$ par symétrie de centre O.

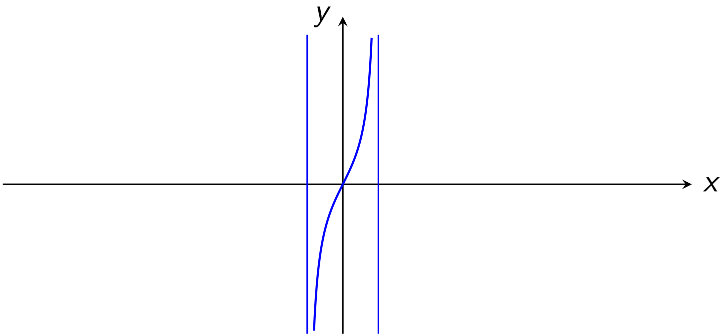


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\,\frac{\pi}{4}[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

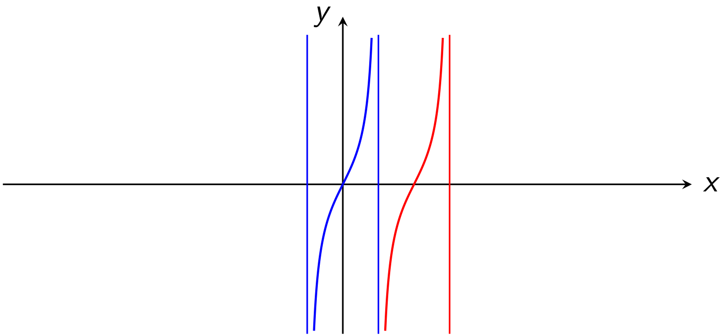


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

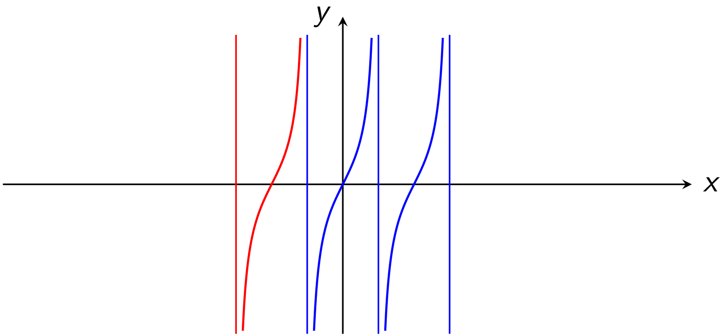


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

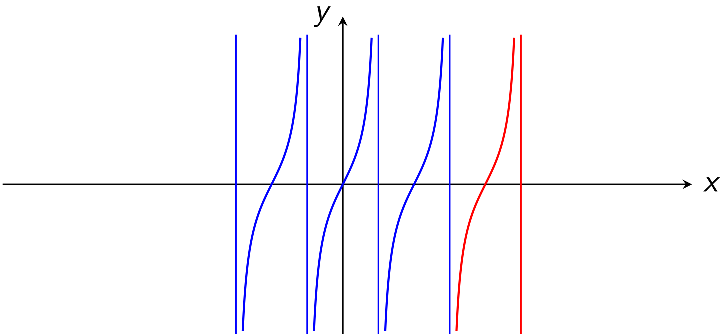


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\,\frac{\pi}{4}[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

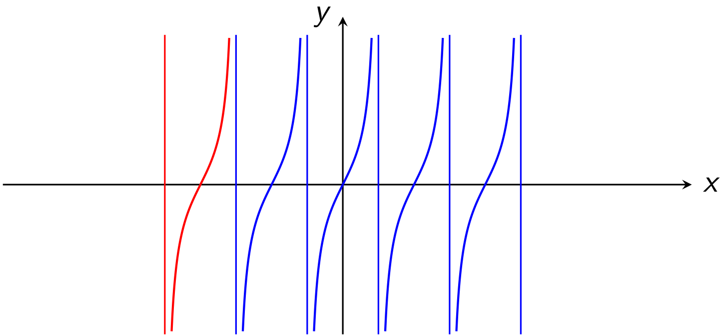


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\,\frac{\pi}{4}[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

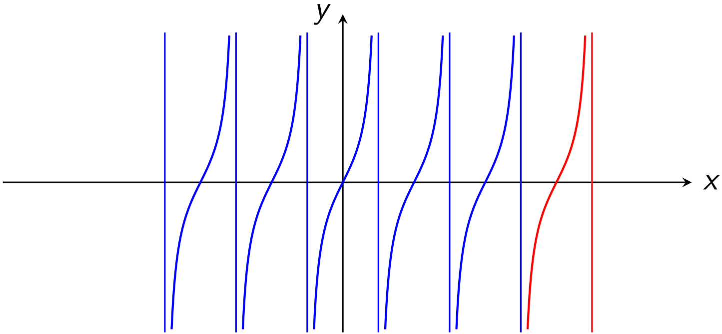


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}\,[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

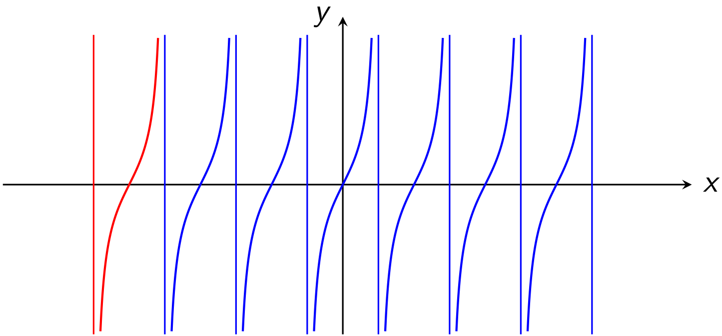


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\,\frac{\pi}{4}[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

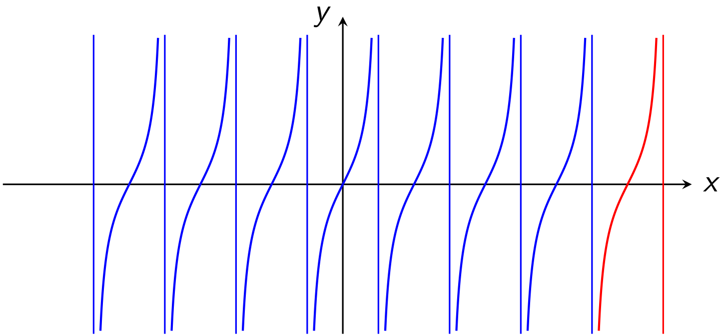


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\,\frac{\pi}{4}[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

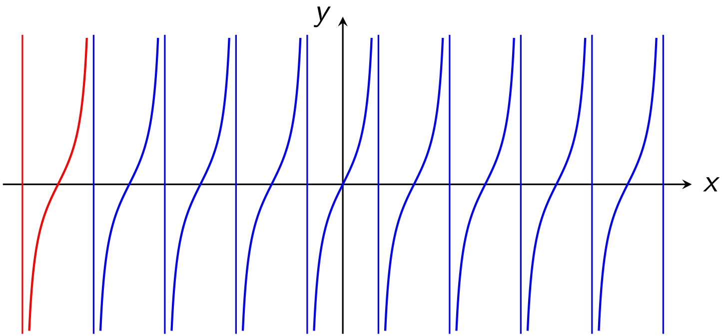


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\, \frac{\pi}{4}[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.

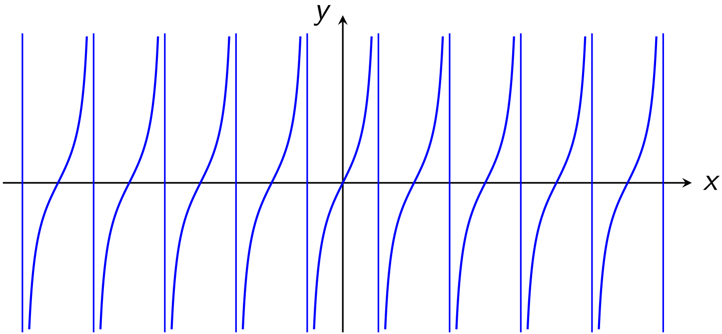


Shéma de l'étude d'une fonction

On étudie $f(x) = \tan(2x)$ et on représente son graphe sur l'intervalle $[0\,,\,\frac{\pi}{4}[$.

On en déduit le graphe de f sur $]-\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4}[$ par symétrie de centre O.

Puis le reste du graphe de f par translations horizontales de $\pm T$ unités.



Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction,

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

(asymptotes verticales,

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

(asymptotes verticales, horizontales

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

(asymptotes verticales, horizontales ou obliques,

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

(asymptotes verticales, horizontales ou obliques, directions asymptotiques,

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

(asymptotes verticales, horizontales ou obliques, directions asymptotiques, branches paraboliques verticales,

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

(asymptotes verticales, horizontales ou obliques, directions asymptotiques, branches paraboliques verticales, horizontales

Shéma de l'étude d'une fonction

2) Limite aux "points frontières" du domaine

Cette partie importante de l'étude d'une fonction, consiste à étudier les discontinuités et les branches infinies du graphe.

(asymptotes verticales, horizontales ou obliques, directions asymptotiques, branches paraboliques verticales, horizontales ou obliques).

Shéma de l'étude d'une fonction

3) Dérivée, extrema et points remarquables

Shéma de l'étude d'une fonction

3) Dérivée, extrema et points remarquables

C'est la deuxième partie importante de l'étude d'une fonction.

Shéma de l'étude d'une fonction

3) Dérivée, extrema et points remarquables

   C'est la deuxième partie importante de l'étude d'une fonction.

   On ne cherche pas les points d'inflexion du graphe

Shéma de l'étude d'une fonction

3) Dérivée, extrema et points remarquables

   C'est la deuxième partie importante de l'étude d'une fonction.

   On ne cherche pas les points d'inflexion du graphe (sauf si cela est demandé).

Shéma de l'étude d'une fonction

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

Shéma de l'étude d'une fonction

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

Le tableau de variation n'est qu'un résumé condensé des différentes étapes précedentes.

Shéma de l'étude d'une fonction

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

Le tableau de variation n'est qu'un résumé condensé des différentes étapes précedentes. Il doit être le plus complet possible.

Shéma de l'étude d'une fonction

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

Le tableau de variation n'est qu'un résumé condensé des différentes étapes précedentes. Il doit être le plus complet possible.

Avant de tracer le graphe,

Shéma de l'étude d'une fonction

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

   Le tableau de variation n'est qu'un résumé condensé des différentes étapes précedentes. Il doit être le plus complet possible.

   Avant de tracer le graphe, il est conseillé d'en faire une esquisse au brouillon

Shéma de l'étude d'une fonction

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

   Le tableau de variation n'est qu'un résumé condensé des différentes étapes précedentes. Il doit être le plus complet possible.

   Avant de tracer le graphe, il est conseillé d'en faire une esquisse au brouillon pour bien choisir la position de l'origine du repère

Shéma de l'étude d'une fonction

4) Résumé sous forme d'un tableau de variation et tracé du graphe

Le tableau de variation n'est qu'un résumé condensé des différentes étapes précedentes. Il doit être le plus complet possible.

Avant de tracer le graphe, il est conseillé d'en faire une esquisse au brouillon pour bien choisir la position de l'origine du repère et l'unité sur chaque axe.

Exemple d'étude complète

Exemple :

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$,

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$,

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire,

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique,

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude.

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.
- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.
  - $*$ Lorsque $x \to -\infty$

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.

  * Lorsque $x \to -\infty$

    $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.

  * Lorsque $x \to -\infty$

    $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2 - 4}\right]$$

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.

  * Lorsque $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2 - 4}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[x + 2|x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right]$$

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.

  * Lorsque $x \to -\infty$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2 - 4} \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[x + 2|x|\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right]$$

  $$= \lim_{x \to -\infty} \left[x + 2(-x)\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right]$$

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.

  * Lorsque $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2 - 4}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[x + 2|x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[x + 2(-x)\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to-\infty} x\left[1 - 2\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right]$$

Exemple d'étude complète

Exemple : $f(x) = x + 2\sqrt{|x^2 - 4|}$.

- $D_f = \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$, f est ni paire, ni impaire, ni périodique, pas de restriction du domaine d'étude. On étudie f sur $\mathbb{R}$.

- Limites aux "points frontières" du domaine d'étude.

  * Lorsque $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x + 2|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x + 2(-x)\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to-\infty} x\left[1 - 2\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right] = +\infty .$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right]$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[1 - 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}}\right] = -1\,.$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right] = -1\,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} [\, f(x) + x \,]$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right] = -1\,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} [\, f(x) + x\,] = \lim_{x \to -\infty} \left[2x + 2\sqrt{x^2 - 4} \right]$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[1 - 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}}\right] = -1\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} [\,f(x) + x\,] = \lim_{x\to-\infty} \left[2x + 2\sqrt{x^2 - 4}\right] = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right] = -1\,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} [\, f(x) + x\,] = \lim_{x \to -\infty} \left[2x + 2\sqrt{x^2 - 4} \right] = 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$$

$$= 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[1 - 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = -1\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} [\,f(x)+x\,] = \lim_{x\to-\infty} \left[2x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-4)}{x-\sqrt{x^2-4}}$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x-\sqrt{x^2-4}} = 0\,,$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[1 - 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right] = -1 \,.$$

$$\lim_{x \to -\infty} [\, f(x) + x \,] = \lim_{x \to -\infty} \left[2x + 2\sqrt{x^2 - 4} \right] = 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$$

$$= 2 \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x - \sqrt{x^2 - 4}} = 0 \,, \quad \text{car} \lim_{x \to -\infty} \left[x - \sqrt{x^2 - 4} \right] = -\infty \,.$$

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[1 - 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = -1\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} [\,f(x)+x\,] = \lim_{x\to-\infty} \left[2x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-4)}{x-\sqrt{x^2-4}}$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x-\sqrt{x^2-4}} = 0\,, \quad \text{car} \lim_{x\to-\infty} \left[x-\sqrt{x^2-4}\right] = -\infty\,.$$

Lorsque $x \to -\infty$,

Exemple d'étude complète

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left[1 - 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = -1\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} [\,f(x)+x\,] = \lim_{x\to-\infty} \left[2x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = 2\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-4)}{x-\sqrt{x^2-4}}$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x-\sqrt{x^2-4}} = 0\,, \quad \text{car} \quad \lim_{x\to-\infty} \left[x - \sqrt{x^2-4}\right] = -\infty\,.$$

Lorsque $x \to -\infty$, le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -x$.

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2 - 4} \right]$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2-4} \right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} \right]$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,(x)\,\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right]$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,(x)\,\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + 2\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right]$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,(x)\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = +\infty\,.$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2 - 4} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x + 2\,(x)\,\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right] = \lim_{x \to +\infty} x \left[1 + 2\sqrt{1 - \tfrac{4}{x^2}} \right] = +\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,(x)\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = +\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,(x)\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = +\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right]$$

Exemple d'étude complète

* Lorsque $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\sqrt{x^2-4}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,|x|\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x + 2\,(x)\,\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = +\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + 2\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = +3\,.$$

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - 3x \,]$$

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - 3x \,] = \lim_{x \to +\infty} \left[\, 2\sqrt{x^2 - 4} - 2x \,\right]$$

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - 3x \,] = \lim_{x \to +\infty} \left[2\sqrt{x^2 - 4} - 2x \right] = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 4) - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$$

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\, f(x) - 3x \,\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\, 2\sqrt{x^2-4} - 2x \right] = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2-4}-2x\right]=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0\,,$$

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2-4}-2x\right]=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0\,,\quad \text{car}\quad \lim_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2-4}\right]=+\infty\,.$$

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2-4}-2x\right]=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0\,,\quad \text{car}\quad \lim_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2-4}\right]=+\infty\,.$$

Lorsque $x\to+\infty$,

Exemple d'étude complète

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2-4}-2x\right]=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0\,,\quad \text{car}\ \lim_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2-4}\right]=+\infty\,.$$

Lorsque $x\to+\infty$, le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y=3x$.

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f
  - Sur $]-\infty\,, -2\,[\,\cup\,]\,2\,, +\infty\,[\,,$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  * Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{x^2-4}\,,$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  - Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[$, $f(x) = x + 2\sqrt{x^2-4}$,

    $$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  $*$ Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[$, $f(x)=x+2\sqrt{x^2-4}$,

  $$f'(x)=1+\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}\,,$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  $*$ Sur $]-\infty\,, -2\,[\,\cup\,]\,2\,, +\infty\,[\,,\quad f(x) = x + 2\sqrt{x^2-4}\,,$

  $$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}\,, \qquad \operatorname{sgn}\left[\,f'(x)\right] = \operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  * Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{x^2-4}$,

  $$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad \operatorname{sgn}\,[\,f'(x)\,] = \operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

  $$= \operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}\left[2+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\,\right]$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  * Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[$, $\quad f(x) = x + 2\,\sqrt{x^2-4}\,,$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}\,, \qquad \operatorname{sgn}\,[\,f'(x)\,] = \operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}\left[2+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\,\right] = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -2 \\ & \end{cases}$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  $*$ Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{x^2-4}$,

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}, \qquad \operatorname{sgn}[\,f'(x)\,] = \operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}\left[2+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\,\right] = \begin{cases} -1 & \text{si } \; x < -2 \\ +1 & \text{si } \; x > 2\,. \end{cases}$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  $*$ Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[\,,\quad f(x)=x+2\sqrt{x^2-4}\,,$

  $$f'(x)=1+\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}\,,\qquad \operatorname{sgn}\left[\,f'(x)\,\right]=\operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

  $$=\operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}\left[2+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right]=\begin{cases}-1 & \text{si}\quad x<-2\\ +1 & \text{si}\quad x>2\,.\end{cases}$$

  $$\lim_{x\to-2^-} f'(x)$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  $*$ Sur $\left]-\infty\,,\,-2\right[\,\cup\,\left]2\,,\,+\infty\right[$, $f(x) = x + 2\sqrt{x^2-4}$,

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}\,, \qquad \operatorname{sgn}\left[\,f'(x)\,\right] = \operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}\left[2+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\,\right] = \begin{cases} -1 & \text{si } \ x < -2 \\ +1 & \text{si } \ x > 2\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -\infty$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  $*$ Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[\,,\quad f(x) = x + 2\sqrt{x^2-4}\,,$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}\,, \qquad \operatorname{sgn}[\,f'(x)\,] = \operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

$$= \operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}\left[2+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\right] = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -2 \\ +1 & \text{si} \quad x > 2\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x)$$

Exemple d'étude complète

- Dérivée de f

  $*$ Sur $]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,2\,,\,+\infty\,[\,,\quad f(x)=x+2\sqrt{x^2-4}\,,$

  $$f'(x)=1+\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{\sqrt{x^2-4}+2x}{\sqrt{x^2-4}}\,,\qquad \operatorname{sgn}\left[\,f'(x)\right]=\operatorname{sgn}\left[\sqrt{x^2-4}+2x\right]$$

  $$=\operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}\left[2+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\tfrac{4}{x^2}}\,\right]=\begin{cases}-1 & \text{si}\quad x<-2\\ +1 & \text{si}\quad x>2\,.\end{cases}$$

  $$\lim_{x\to-2^-}f'(x)=-\infty\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to2^+}f'(x)=+\infty\,.$$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,2[\,$,

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,2\,[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,\,2[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,2\,[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,\,2[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $\;f'(x) = 0$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,2\,[$, $f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0)$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,2\,[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - 2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad\Leftrightarrow\quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

Exemple d'étude complète

$*$ Sur $]-2\,,2\,[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - 2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{2}{\sqrt{5}}\,,$$

Exemple d'étude complète

$*$ Sur $]-2\,,\,2\,[\,,\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - 2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{2}{\sqrt{5}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{sgn} f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x < \frac{2}{\sqrt{5}} \\ & \end{cases}$$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,\,2[$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{2}{\sqrt{5}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{sgn} f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \ \ x < \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1 & \text{si} \ \ x > \frac{2}{\sqrt{5}}\,. \end{cases}$$

Exemple d'étude complète

$*$ Sur $]-2\,,\,2[\,,\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - 2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad\Leftrightarrow\quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{2}{\sqrt{5}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{sgn} f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \;\; x < \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1 & \text{si} \;\; x > \frac{2}{\sqrt{5}}\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x)$$

Exemple d'étude complète

$*$ Sur $\,]-2\,,\,2\,[\,,\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $\;f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{2}{\sqrt{5}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{sgn} f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \;\; x < \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1 & \text{si} \;\; x > \frac{2}{\sqrt{5}}\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = +\infty$$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,\,2[\,,\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - 2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{2}{\sqrt{5}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{sgn} f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x < \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1 & \text{si} \quad x > \frac{2}{\sqrt{5}}\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 2^-} f'(x)$$

Exemple d'étude complète

* Sur $]-2\,,\,2[\,$, $\quad f(x) = x + 2\sqrt{4-x^2}\,,$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - 2x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

Et $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4-x^2} = 2x\,,\ (x \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - x^2 = 4x^2\,,\ (x \geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{2}{\sqrt{5}}\,, \qquad \text{avec} \qquad \operatorname{sgn} f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x < \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -1 & \text{si} \quad x > \frac{2}{\sqrt{5}}\,. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty\,.$$

Exemple d'étude complète

* Signe de f' sur $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,2\}$.

Exemple d'étude complète

$\ast$ Signe de f' sur $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,,\,2\}$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $\quad -\infty$	$\|$	$+\infty$ $\quad +$	0	$-$ $\quad -\infty$	$\|$	$+\infty$ $\quad +$	

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
    - En $x = -2$,

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
  - En $x = -2$, $f(x) = -2$,

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
    * En $x = -2\,,\ f(x) = -2\,,\ (-2\,,\,-2)$ est un minimum

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables

  - En $x = -2$, $f(x) = -2$, $(-2, -2)$ est un minimum et un point de rebroussement.

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
  - En $x = -2$, $f(x) = -2$, $(-2, -2)$ est un minimum et un point de rebroussement.
  - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
    - En $x = -2\,,\;\; f(x) = -2\,,\;\; (-2\,,\,-2)$ est un minimum et un point de rebroussement.
    - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}\,,\;\; f(x) = 2\sqrt{5}\,,$

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
  - En $x = -2$, $f(x) = -2$, $(-2, -2)$ est un minimum et un point de rebroussement.
  - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $f(x) = 2\sqrt{5}$, $(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5})$ est un maximum

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables

  - En $x = -2$, $f(x) = -2$, $(-2, -2)$ est un minimum et un point de rebroussement.

  - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $f(x) = 2\sqrt{5}$, $(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5})$ est un maximum à tangente horizontale.

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
  - En $x = -2$, $f(x) = -2$, $(-2, -2)$ est un minimum et un point de rebroussement.
  - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $f(x) = 2\sqrt{5}$, $(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5})$ est un maximum à tangente horizontale.
  - En $x = 2$,

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables

  - En $x = -2\,,\;\; f(x) = -2\,,\;\; (-2\,,\, -2)$ est un minimum et un point de rebroussement.

  - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}\,,\;\; f(x) = 2\sqrt{5}\,,\;\; (\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\, 2\sqrt{5})$ est un maximum à tangente horizontale.

  - En $x = 2\,,\;\; f(x) = 2\,,$

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
  - En $x = -2$, $f(x) = -2$, $(-2, -2)$ est un minimum et un point de rebroussement.
  - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $f(x) = 2\sqrt{5}$, $(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5})$ est un maximum à tangente horizontale.
  - En $x = 2$, $f(x) = 2$, $(2, 2)$ est un minimum

Exemple d'étude complète

* Extrema et points remarquables
  - En $x = -2\,,\ f(x) = -2\,,\ (-2\,,\,-2)$ est un minimum et un point de rebroussement.
  - En $x = \frac{2}{\sqrt{5}}\,,\ f(x) = 2\sqrt{5}\,,\ (\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\,2\sqrt{5})$ est un maximum à tangente horizontale.
  - En $x = 2\,,\ f(x) = 2\,,\ (2\,,\,2)$ est un minimum et un point de rebroussement.

Exemple d'étude complète

Tableau de variation de la fonction f :

Exemple d'étude complète

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Exemple d'étude complète

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

AO
$y = -x$

Exemple d'étude complète

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
	AO $y=-x$		min PR						

Exemple d'étude complète

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
	AO $y = -x$		min PR		max TH				

Exemple d'étude complète

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
	AO $y=-x$		min PR		max TH		min PR		

Exemple d'étude complète

Tableau de variation de la fonction f :

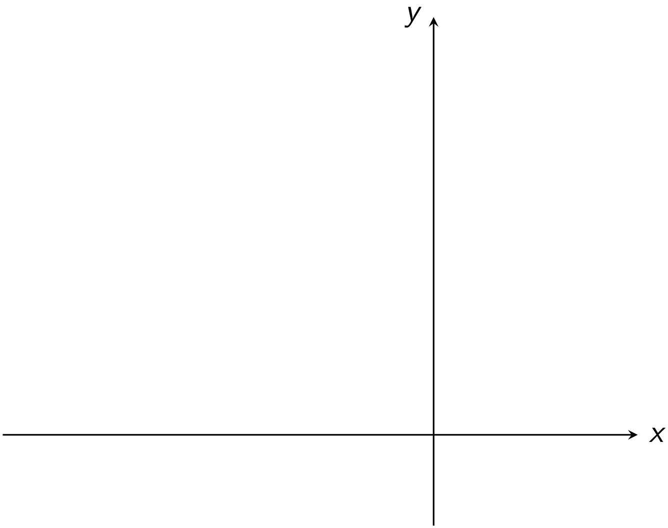
x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{\sqrt{5}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
	AO $y=-x$		min PR		max TH		min PR		AO $y=3x$

Exemple d'étude complète

Graphe de f :

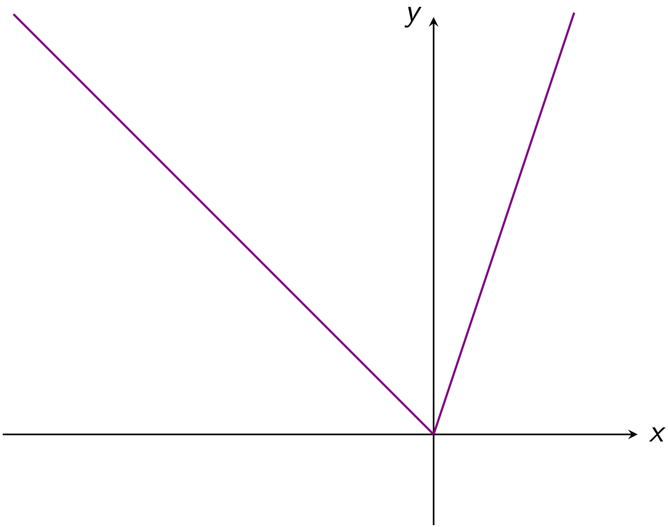
Exemple d'étude complète

Graphe de f :



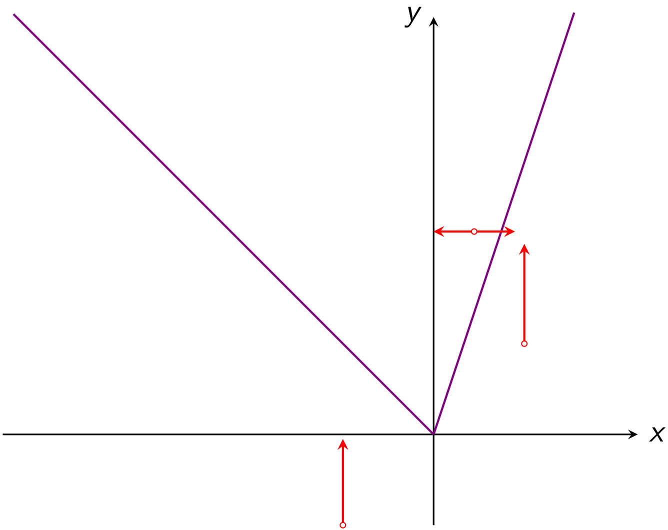
Exemple d'étude complète

Graphe de f :



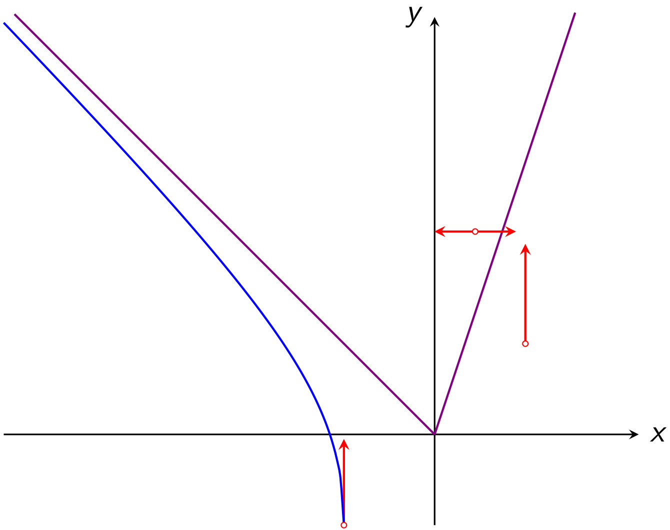
Exemple d'étude complète

Graphe de f :



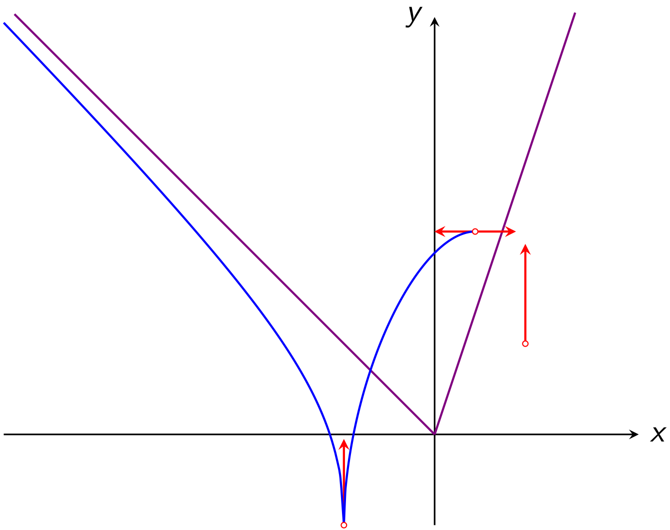
Exemple d'étude complète

Graphe de f :



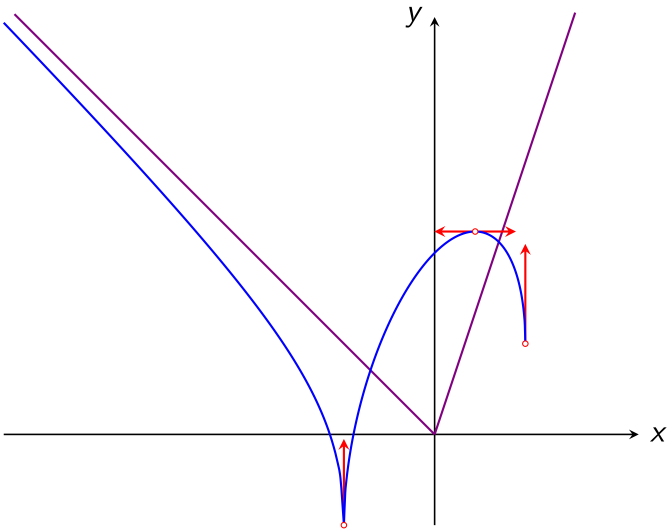
Exemple d'étude complète

Graphe de f :



Exemple d'étude complète

Graphe de f :



Exemple d'étude complète

Graphe de f :