Calcul Intégral

Calcul Intégral

3. Applications géométriques du calcul intégral

3.1 Aire géométrique dans le plan

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$

et D le domaine du plan limité par

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$

et D le domaine du plan limité par

$y = f(x)\,,$

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$

et D le domaine du plan limité par

$y = f(x)\,,\;\; y = 0\,,$

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$

et D le domaine du plan limité par

$y = f(x)\,,\ y = 0\,,\ x = a$

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

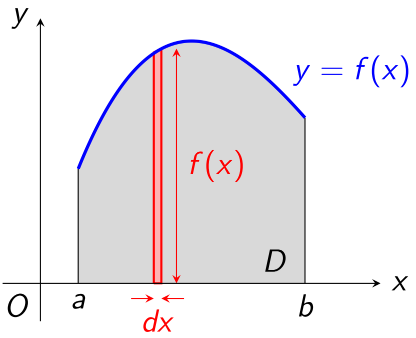
Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$
et D le domaine du plan limité par
$y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.

Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$
et D le domaine du plan limité par
$y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.



Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

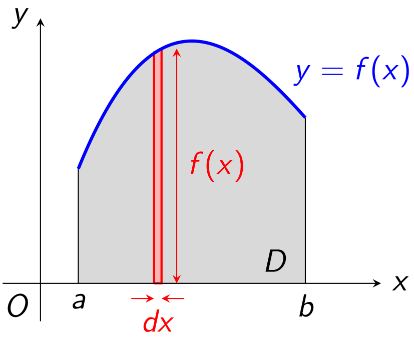
Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$

et D le domaine du plan limité par

$y = f(x)\,,\ y = 0\,,\ x = a$ et $x = b$.

L'aire analytique du domaine D est définie par



Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

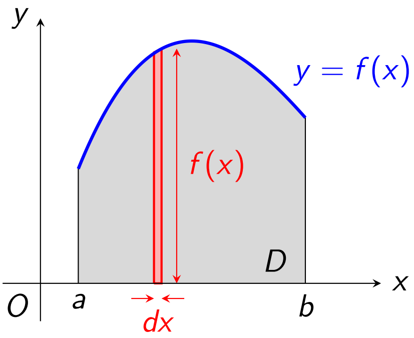
Soients f une fonction continue sur $[a, b]$

et D le domaine du plan limité par

$y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.

L'aire analytique du domaine D est définie par

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



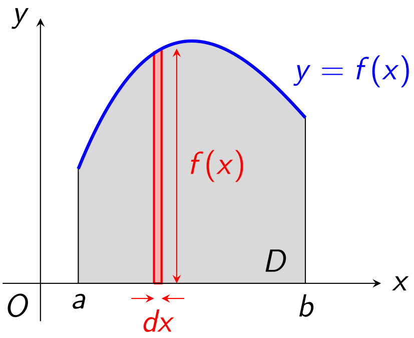
Aire analytique entre le graphe de f et l'axe Ox

Rappel :

Soient f une fonction continue sur $[\,a\,,\,b\,]$
et D le domaine du plan limité par
$y = f(x)\,,\ y = 0\,,\ x = a$ et $x = b\,.$

L'aire analytique du domaine D est définie par

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta x_k$$



Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

L'aire géométrique A du domaine D

Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx

Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx ($dx > 0$ si $a < b$)

Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

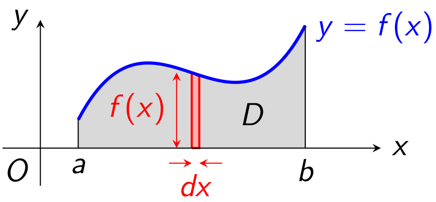
L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx $(dx > 0$ si $a < b)$ et de hauteur $|f(x)|$

Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx $(dx > 0$ si $a < b)$ et de hauteur $|\,f(x)\,|$: $\quad A = \displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx\,.$

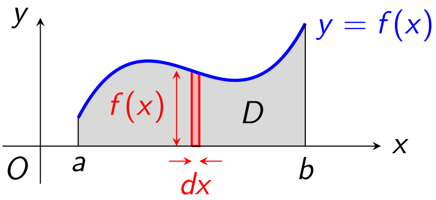
Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx $(dx > 0$ si $a < b)$ et de hauteur $|f(x)|$: $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$.



Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

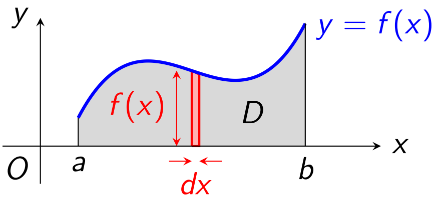
L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx ($dx > 0$ si $a < b$) et de hauteur $|f(x)|$: $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$.



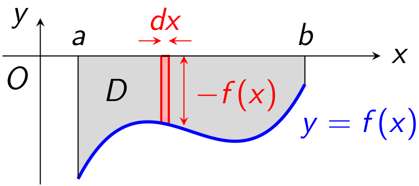
$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx $(dx > 0$ si $a < b)$ et de hauteur $|\,f(x)\,|$: $\quad A = \displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx\,.$

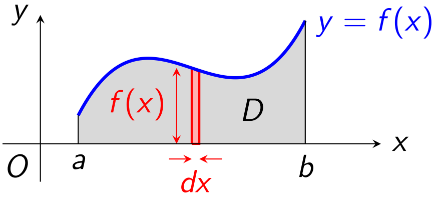


$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

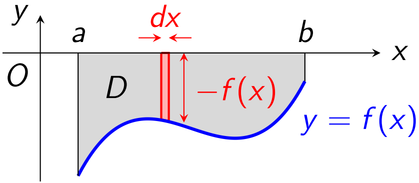


Aire géométrique entre le graphe de f et l'axe Ox

L'aire géométrique A du domaine D est constituée de la somme des aires géométriques des rectangles élémentaires de largeur dx $(dx > 0$ si $a < b)$ et de hauteur $|\,f(x)\,|$: $\quad A = \displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx\,.$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$



$$A = \int_a^b [-f(x)]\,dx\,.$$

Exemple

Calculer l'aire géométrique du domaine du plan

Exemple

Calculer l'aire géométrique du domaine du plan limité par la courbe d'équation $y = 2 - \sqrt{x}$,

Exemple

Calculer l'aire géométrique du domaine du plan limité par la courbe d'équation $y = 2 - \sqrt{x}$, les axes Ox et Oy

Exemple

Calculer l'aire géométrique du domaine du plan limité par la courbe d'équation $y = 2 - \sqrt{x}$, les axes Ox et Oy et la droite verticale d'équation $x = 9$.

Exemple

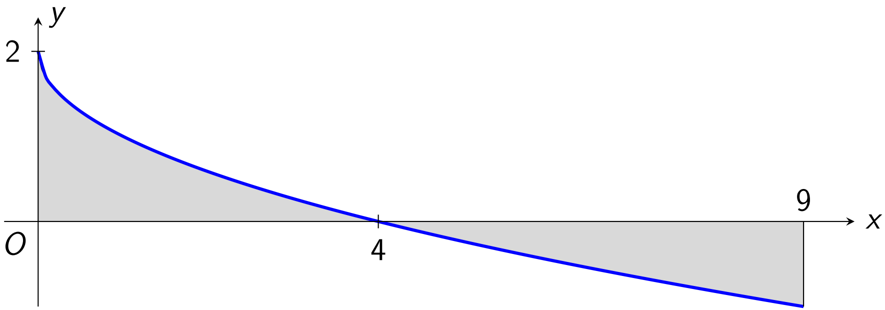
Calculer l'aire géométrique du domaine du plan limité par la courbe d'équation $y = 2 - \sqrt{x}$, les axes Ox et Oy et la droite verticale d'équation $x = 9$.

- Il est essentiel de faire une esquisse du domaine à étudier :

Exemple

Calculer l'aire géométrique du domaine du plan limité par la courbe d'équation $y = 2 - \sqrt{x}$, les axes Ox et Oy et la droite verticale d'équation $x = 9$.

- Il est essentiel de faire une esquisse du domaine à étudier :

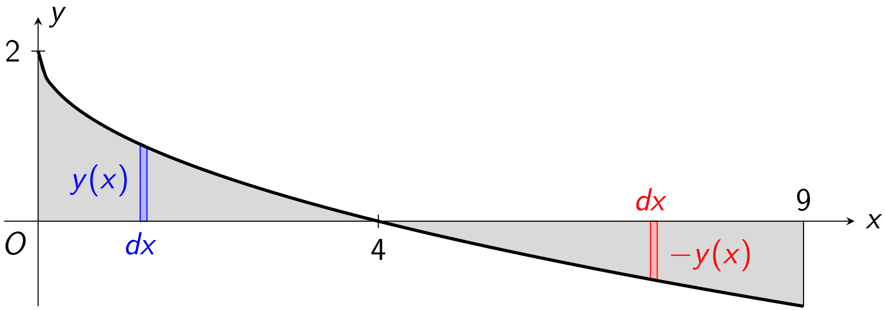


Exemple

- Expression de l'aire géométrique du domaine

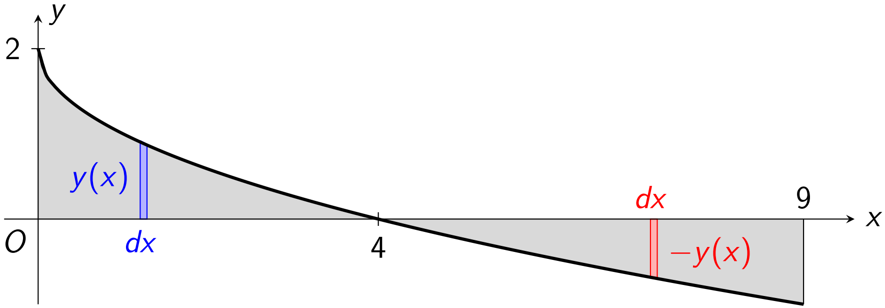
Exemple

- Expression de l'aire géométrique du domaine



Exemple

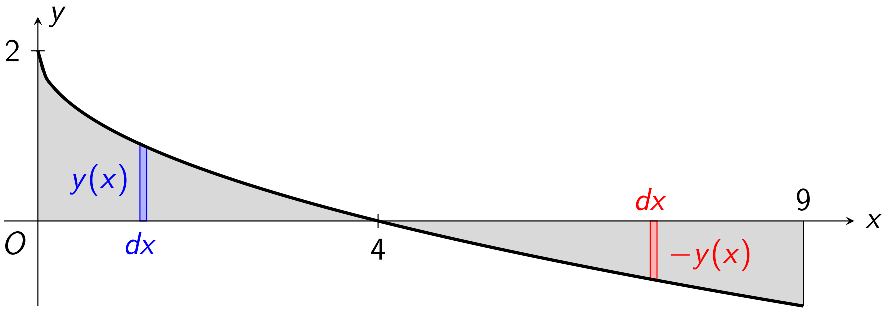
- Expression de l'aire géométrique du domaine



$$A = \int_0^4 y(x)\, dx + \int_4^9 [-y(x)]\, dx$$

Exemple

- Expression de l'aire géométrique du domaine



$$A = \int_0^4 y(x)\, dx + \int_4^9 [-y(x)]\, dx = \int_0^4 y(x)\, dx - \int_4^9 y(x)\, dx\,.$$

Exemple

- Intégration :

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[2 - \sqrt{x}\right] dx - \int_4^9 \left[2 - \sqrt{x}\right] dx\,.$$

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx - \int_4^9 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx\,.$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral,

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx - \int_4^9 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx \, .$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive quelconque de $y = 2 - \sqrt{x}$, alors

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[\, 2 - \sqrt{x}\, \right] dx - \int_4^9 \left[\, 2 - \sqrt{x}\, \right] dx\,.$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive quelconque de $y = 2 - \sqrt{x}\,,$ alors

$$A = F(x)\Big|_0^4 - F(x)\Big|_4^9$$

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[\, 2 - \sqrt{x}\, \right] dx - \int_4^9 \left[\, 2 - \sqrt{x}\, \right] dx \,.$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive quelconque de $y = 2 - \sqrt{x}\,,$ alors

$$A = F(x)\Big|_0^4 - F(x)\Big|_4^9 = 2\,F(4) - F(0) - F(9)\,.$$

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx - \int_4^9 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx \, .$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive quelconque de $y = 2 - \sqrt{x}$, alors

$$A = F(x)\Big|_0^4 - F(x)\Big|_4^9 = 2\,F(4) - F(0) - F(9) \, .$$

Soit $\quad F(x) = 2x - \dfrac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}$

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[2 - \sqrt{x}\right] dx - \int_4^9 \left[2 - \sqrt{x}\right] dx \,.$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive quelconque de $y = 2 - \sqrt{x}\,,$ alors

$$A = F(x)\Big|_0^4 - F(x)\Big|_4^9 = 2\,F(4) - F(0) - F(9)\,.$$

Soit $\quad F(x) = 2x - \dfrac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2x}{3}\left[3 - \sqrt{x}\right],$

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[\, 2 - \sqrt{x}\, \right] dx - \int_4^9 \left[\, 2 - \sqrt{x}\, \right] dx \,.$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive quelconque de $y = 2 - \sqrt{x}\,,$ alors

$$A = F(x)\Big|_0^4 - F(x)\Big|_4^9 = 2\,F(4) - F(0) - F(9)\,.$$

Soit $\quad F(x) = 2x - \dfrac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2x}{3}\left[\, 3 - \sqrt{x}\, \right],\qquad A = 2\,F(4)$

Exemple

- Intégration :

$$A = \int_0^4 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx - \int_4^9 \left[2 - \sqrt{x} \right] dx \, .$$

D'après la conséquence du théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive quelconque de $y = 2 - \sqrt{x}\,,$ alors

$$A = F(x)\Big|_0^4 - F(x)\Big|_4^9 = 2\,F(4) - F(0) - F(9)\, .$$

Soit $\quad F(x) = 2x - \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \frac{2x}{3}\left[3 - \sqrt{x} \right], \qquad A = 2\,F(4) = \frac{16}{3}\, .$

Remarque

Si on calcule l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par changement de variable

Remarque

Si on calcule l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ par changement de variable en posant $x = \varphi(t)$, ($\varphi \in C^1$ et bijectif), alors

Remarque

Si on calcule l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par changement de variable en posant $x = \varphi(t)$, $(\varphi \in C^1$ et bijectif$)$, alors

- soit on revient à la variable initiale x

Remarque

Si on calcule l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ par changement de variable en posant $x = \varphi(t)$, ($\varphi \in C^1$ et bijectif), alors

- soit on revient à la variable initiale x et $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$,

Remarque

Si on calcule l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par changement de variable en posant $x = \varphi(t)$, ($\varphi \in C^1$ et bijectif), alors

- soit on revient à la variable initiale x et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$,

Remarque

Si on calcule l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par changement de variable en posant $x = \varphi(t)$, ($\varphi \in C^1$ et bijectif), alors

- soit on revient à la variable initiale x et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$,
- soit on exprime les bornes a et b en fonction de la variable t :

Remarque

Si on calcule l'intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ par changement de variable en posant $x = \varphi(t)$, ($\varphi \in C^1$ et bijectif), alors

- soit on revient à la variable initiale x et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$,
- soit on exprime les bornes a et b en fonction de la variable t :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\,[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt\,.$$

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

On considère le domaine D du plan

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

On considère le domaine D du plan

limité par le graphe de f,

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

On considère le domaine D du plan limité par le graphe de f, les axes Ox et Oy

Exemple

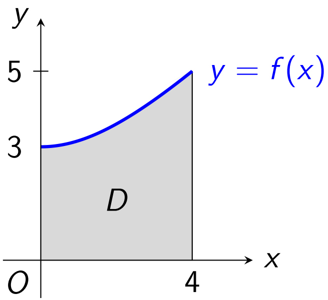
Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

On considère le domaine D du plan limité par le graphe de f, les axes Ox et Oy et la droite verticale d'équation $x = 4$.

Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

On considère le domaine D du plan limité par le graphe de f, les axes Ox et Oy et la droite verticale d'équation $x = 4$.

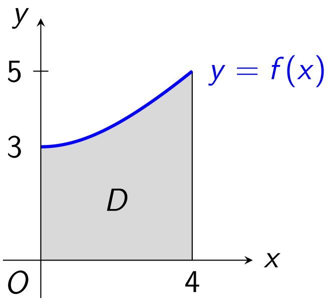


Exemple

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$.

On considère le domaine D du plan limité par le graphe de f, les axes Ox et Oy et la droite verticale d'équation $x = 4$.

Calculons l'aire A du domaine D.

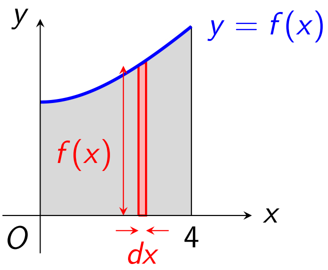


Exemple

- Expression de l'aire A

Exemple

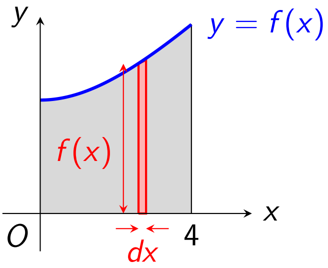
- Expression de l'aire A



Exemple

- Expression de l'aire A

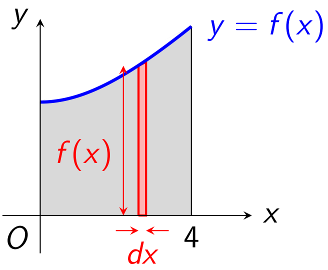
$$A = \int_0^4 f(x)\,dx$$



Exemple

- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\;dx\,,$$

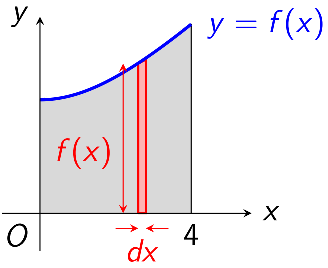


Exemple

- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\;\,dx\,,$$

$$A = \int_0^4 3\,\sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\;dx$$

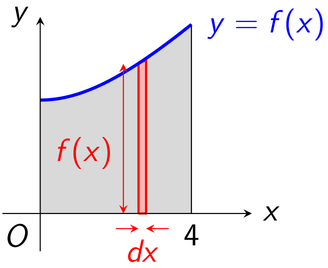


Exemple

- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\;dx\,,$$

$$A = \int_0^4 3\,\sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\,dx$$



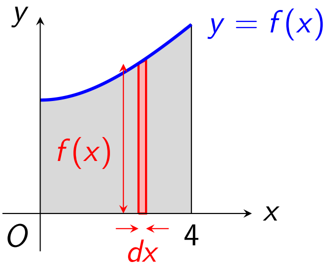
- Changement de variable :

Exemple

- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\;dx\,,$$

$$A = \int_0^4 3\,\sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\;dx$$



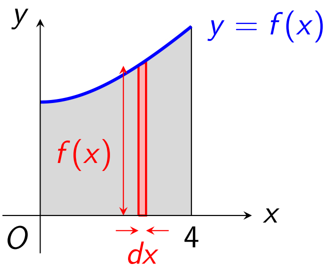
- Changement de variable : $\quad \frac{x}{3} = \sinh(t)\,,$

Exemple

- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\;dx\,,$$

$$A = \int_0^4 3\,\sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\;dx$$



- Changement de variable : $\quad \frac{x}{3} = \sinh(t)\,,$

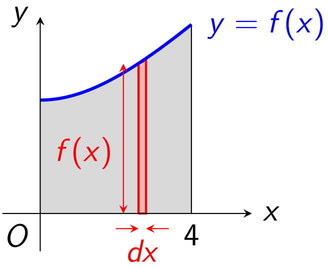
$x \in [\,0, 4\,]\,,$

Exemple

- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\; dx\,,$$

$$A = \int_0^4 3\,\sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\; dx$$



- Changement de variable : $\quad \frac{x}{3} = \sinh(t)\,,$

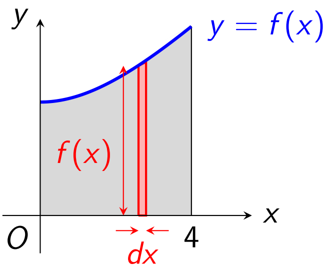
$$x \in [\,0, 4\,]\,, \quad t \in [\,0\,,\, \arg\sinh(\tfrac{4}{3})\,]\,,$$

Exemple

- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\ dx\,,$$

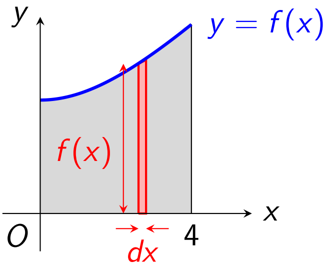
$$A = \int_0^4 3\ \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\ dx$$



- Changement de variable : $\frac{x}{3} = \sinh(t)\,,$

$$x \in [0,4]\,,\quad t \in [0\,,\ \arg\sinh(\tfrac{4}{3})]\,,\quad \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1} = \cosh(t)\,,$$

Exemple



- Expression de l'aire A

$$A = \int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\ dx\,,$$

$$A = \int_0^4 3\ \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\ dx$$

- Changement de variable : $\quad \frac{x}{3} = \sinh(t)\,,$

$$x \in [0,4]\,,\quad t \in [0\,,\ \operatorname{arg\,sinh}(\tfrac{4}{3})]\,,\quad \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1} = \cosh(t)\,,\quad dx = 3\ \cosh(t)\, dt\,.$$

Exemple

- Intégration :

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

  $$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2 + 1}\; dx$$

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2 + 1}\; dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\,\cosh(t)\,dt\,]$$

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2 + 1}\; dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\,\cosh(t)\; dt\,] = 9\int_0^a \cosh^2(t)\; dt$$

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2 + 1}\; dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\;\cosh(t)\;dt\,] = 9\int_0^a \cosh^2(t)\;dt$$

$$\Big[\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$$

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2 + 1}\, dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\,\cosh(t)\,dt\,] = 9\int_0^a \cosh^2(t)\,dt$$

$$\Big[\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\,\cosh^2(t) - 1$$

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2 + 1}\; dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\,\cosh(t)\,dt\,] = 9\int_0^a \cosh^2(t)\,dt$$

$$\left[\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\,\cosh^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh^2(t) = \frac{\cosh(2t)+1}{2}\right]$$

Exemple

- Intégration :

  Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2 + 1}\; dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\;\cosh(t)\;dt\,] = 9\int_0^a \cosh^2(t)\;dt$$

$$\left[\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\;\cosh^2(t) - 1 \quad\Rightarrow\quad \cosh^2(t) = \frac{\cosh(2t)+1}{2}\right]$$

$$= 9\int_0^a \frac{\cosh(2t)+1}{2}\;dt$$

Exemple

- Intégration :

Posons $a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\,dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\,\cosh(t)\,dt\,] = 9\int_0^a \cosh^2(t)\,dt$$

$$\left[\cosh(2t) = \cosh^2(t)+\sinh^2(t) = 2\,\cosh^2(t)-1 \quad\Rightarrow\quad \cosh^2(t) = \frac{\cosh(2t)+1}{2}\right]$$

$$= 9\int_0^a \frac{\cosh(2t)+1}{2}\,dt = \frac{9}{2}\left[\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right]_0^a$$

Exemple

- Intégration :

  Posons $\quad a = \arg\sinh(\frac{4}{3})$.

$$A = 3\int_0^4 \sqrt{(\tfrac{x}{3})^2+1}\;dx = 3\int_0^a \cosh(t)\,[\,3\;\cosh(t)\;dt\,] \;=9\int_0^a \cosh^2(t)\,dt$$

$$\left[\cosh(2t)=\cosh^2(t)+\sinh^2(t)=2\;\cosh^2(t)-1 \quad\Rightarrow\quad \cosh^2(t)=\frac{\cosh(2t)+1}{2}\right]$$

$$=9\int_0^a \frac{\cosh(2t)+1}{2}\;dt=\frac{9}{2}\left[\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right]_0^a=\frac{9}{2}\left[\sinh(t)\cdot\cosh(t)+t\right]_0^a$$

Exemple

- Evaluation :

Exemple

- Evaluation :

$$a = \arg\sinh(\tfrac{4}{3})\,,$$

Exemple

- Evaluation :

$$a = \arg\sinh(\tfrac{4}{3})\,, \qquad \sinh(a) = \frac{4}{3}\,,$$

Exemple

- Evaluation :

$$a = \arg\sinh\left(\tfrac{4}{3}\right), \qquad \sinh(a) = \tfrac{4}{3}, \qquad \cosh(a) = \sqrt{\left(\tfrac{4}{3}\right)^2 + 1}$$

Exemple

- Evaluation :

$$a = \operatorname{arg\,sinh}(\tfrac{4}{3})\,, \qquad \sinh(a) = \tfrac{4}{3}\,, \qquad \cosh(a) = \sqrt{(\tfrac{4}{3})^2 + 1} = \tfrac{5}{3}\,.$$

Exemple

- Evaluation :

$$a = \arg\sinh(\tfrac{4}{3})\,, \qquad \sinh(a) = \tfrac{4}{3}\,, \qquad \cosh(a) = \sqrt{(\tfrac{4}{3})^2 + 1} = \tfrac{5}{3}\,.$$

$$A = \frac{9}{2}\Big[\sinh(t)\,\cosh(t) + t\Big]_0^a$$

Exemple

- Evaluation :

$$a = \arg\sinh(\tfrac{4}{3})\,, \qquad \sinh(a) = \tfrac{4}{3}\,, \qquad \cosh(a) = \sqrt{(\tfrac{4}{3})^2 + 1} = \tfrac{5}{3}\,.$$

$$A = \frac{9}{2}\Big[\sinh(t)\,\cosh(t) + t\Big]_0^a = \frac{9}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3} + \arg\sinh(\tfrac{4}{3}) - 0\right]_0^a\,,$$

Exemple

- Evaluation :

$$a = \arg\sinh(\tfrac{4}{3}), \qquad \sinh(a) = \tfrac{4}{3}, \qquad \cosh(a) = \sqrt{(\tfrac{4}{3})^2 + 1} = \tfrac{5}{3}.$$

$$A = \frac{9}{2}\Big[\sinh(t)\,\cosh(t) + t\Big]_0^a = \frac{9}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3} + \arg\sinh(\tfrac{4}{3}) - 0\right]_0^a,$$

$$A = 10 + \frac{9}{2}\arg\sinh(\tfrac{4}{3}).$$

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

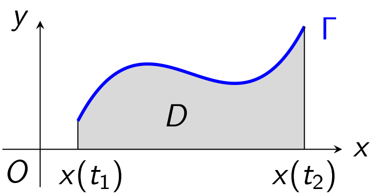
Soit Γ un arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\, t_1\,,\ t_2\,]\,.$$

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Soit Γ un arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\, t_1\,,\ t_2\,]\,.$$

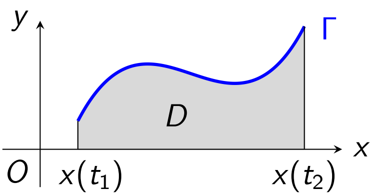


Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Soit Γ un arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,t_1\,,\ t_2\,]\,.$$

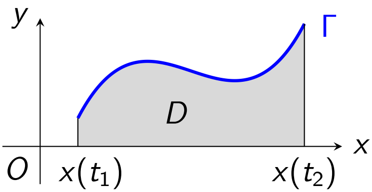
Comment calculer l'aire du domaine D ?



Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Soit Γ un arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\, t_1\,,\ t_2\,]\,.$$



Comment calculer l'aire du domaine D ?

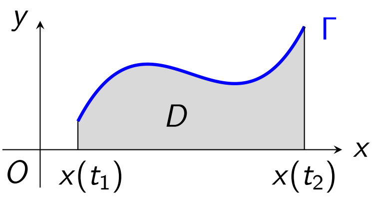
Remarque :

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Soit Γ un arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,t_1\,,\ t_2\,]\,.$$

Comment calculer l'aire du domaine D ?



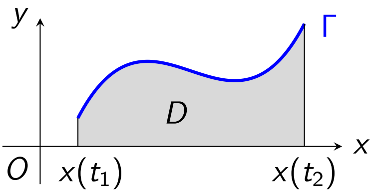
Remarque : Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'aux arcs paramétrés simples,

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Soit Γ un arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,t_1\,,\,t_2\,]\,.$$

Comment calculer l'aire du domaine D ?



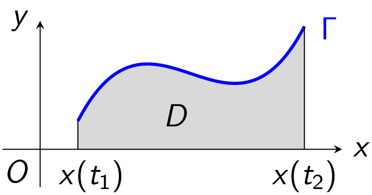
Remarque : Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'aux arcs paramétrés simples, sans point double.

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

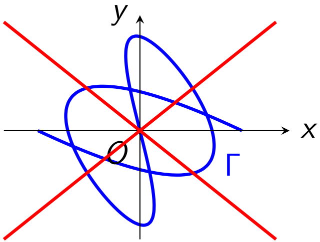
Soit Γ un arc paramétré du plan défini par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,t_1\,,\ t_2\,]\,.$$

Comment calculer l'aire du domaine D ?



Remarque : Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse qu'aux arcs paramétrés simples, sans point double.



Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ,

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Pour calculer l'aire géométrique du domaine D,

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Pour calculer l'aire géométrique du domaine D, on distingue donc deux étapes.

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Pour calculer l'aire géométrique du domaine D, on distingue donc deux étapes.

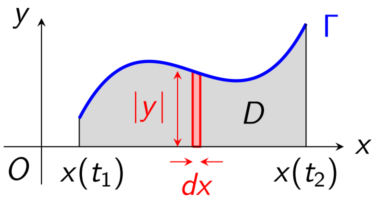
- La modélisation géométrique :

Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Pour calculer l'aire géométrique du domaine D, on distingue donc deux étapes.

- La modélisation géométrique :



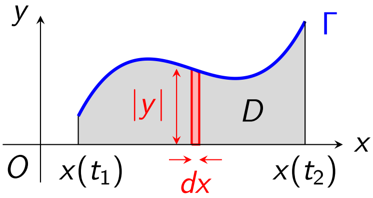
Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Pour calculer l'aire géométrique du domaine D, on distingue donc deux étapes.

- La modélisation géométrique :

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |y| \, dx \, .$$



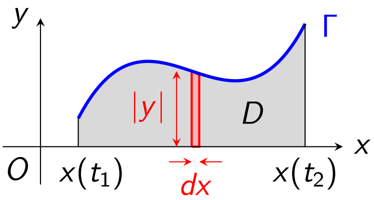
Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Pour calculer l'aire géométrique du domaine D, on distingue donc deux étapes.

- La modélisation géométrique :

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |y| \, dx \, .$$



- Et la traduction en fonction de t :

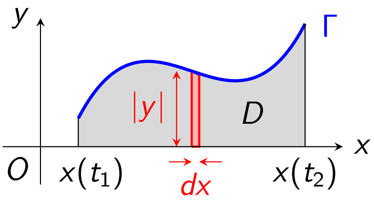
Et si la courbe Γ est définie paramétriquement ?

Dans une description paramétrique d'un arc Γ, on distingue les variables géométriques x et y, de la variable temporelle : le paramètre t.

Pour calculer l'aire géométrique du domaine D, on distingue donc deux étapes.

- La modélisation géométrique :

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |y| \, dx \, .$$



- Et la traduction en fonction de t :

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \cdot \dot{x}(t) \, dt \, .$$

Exemple

Vérifions que l'aire du disque unité vaut π .

Exemple

Vérifions que l'aire du disque unité vaut π.

Equations paramétriques du cercle unité Γ :

Exemple

Vérifions que l'aire du disque unité vaut π.

Equations paramétriques du cercle unité Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,0\,,\,2\pi\,[\,.$$

Exemple

Vérifions que l'aire du disque unité vaut π .

Equations paramétriques du cercle unité Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,0\,,\, 2\pi\,[\,.$$

On calcule l'aire du quart de disque :

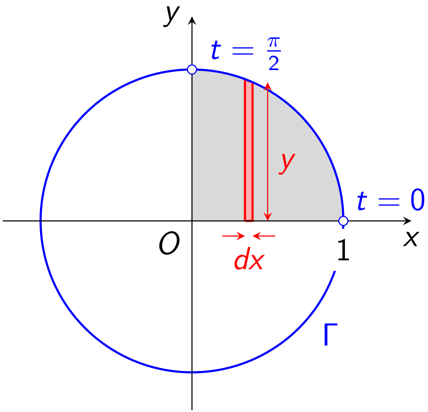
Exemple

Vérifions que l'aire du disque unité vaut π .

Equations paramétriques du cercle unité Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,0\,,\, 2\pi\,[\,.$$

On calcule l'aire du quart de disque :



Exemple

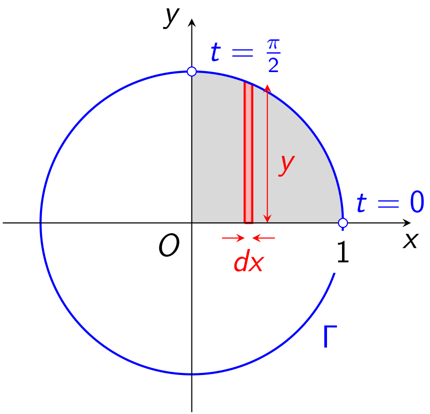
Vérifions que l'aire du disque unité vaut π .

Equations paramétriques du cercle unité Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,0\,,\,2\pi\,[\,.$$

On calcule l'aire du quart de disque :

$$\frac{A}{4} = \int_0^1 y\,dx$$



Exemple

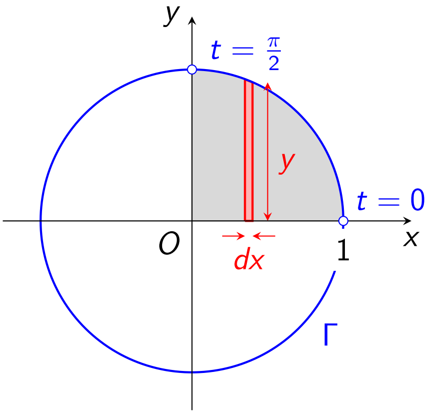
Vérifions que l'aire du disque unité vaut π .

Equations paramétriques du cercle unité Γ :

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [\,0\,,\,2\pi\,[\,.$$

On calcule l'aire du quart de disque :

$$\frac{A}{4} = \int_0^1 y\,dx = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt\,.$$



Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt \,,$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t)$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt \,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t) \, dt \,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t) \,.$$

Et dans le premier quadrant, on a :

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{\pi}{2} \\ \end{cases}$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_1) = 1 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 0\,. \end{cases}$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_1) = 1 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\; dt$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\; dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_1) = 1 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\; dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 & \Leftrightarrow & \cos(t_0) = 0 & \Leftrightarrow & t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 & \Leftrightarrow & \cos(t_1) = 1 & \Leftrightarrow & t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\; dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt$$

$\Big[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 & \Leftrightarrow & \cos(t_0) = 0 & \Leftrightarrow & t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 & \Leftrightarrow & \cos(t_1) = 1 & \Leftrightarrow & t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\; dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt$$

$$\Big[\ \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\,\sin^2(t)$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 & \Leftrightarrow \quad \cos(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 & \Leftrightarrow \quad \cos(t_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\; dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt$$

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\,\sin^2(t) \quad \Rightarrow \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}\right]$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \iff \cos(t_0) = 0 \iff t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \iff \cos(t_1) = 1 \iff t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\ dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt$$

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\,\sin^2(t) \quad \Rightarrow \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} \right]$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\ dt$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\ dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt$$

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\ \sin^2(t) \quad \Rightarrow \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} \right]$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot \dot{x}(t)\, dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_1) = 1 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t) \cdot [-\sin(t)]\; dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\, dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\, dt$$

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\,\sin^2(t) \quad \Rightarrow \quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} \right]$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\; dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Exemple

$$\frac{A}{4} = \int_{t_0}^{t_1} y(t)\cdot \dot{x}(t)\,dt\,, \quad \text{avec} \quad y(t) = \sin(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -\sin(t)\,.$$

Et dans le premier quadrant, on a : $\begin{cases} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_0 = \frac{\pi}{2} \\ x = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos(t_1) = 1 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 0\,. \end{cases}$

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(t)\cdot[-\sin(t)]\;dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(t)\,dt = +\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt$$

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\,\sin^2(t) \quad\Rightarrow\quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\;dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad A = \pi\,.$$

Aire du domaine fini limité par deux courbes

On considère le domaine du plan

Aire du domaine fini limité par deux courbes

On considère le domaine du plan délimité par les deux courbes d'équation
$y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$.

Aire du domaine fini limité par deux courbes

On considère le domaine du plan délimité par les deux courbes d'équation
$y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$.

Marche à suivre pour calculer l'aire du domaine limité par ces deux courbes :

Aire du domaine fini limité par deux courbes

On considère le domaine du plan délimité par les deux courbes d'équation $y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$.

Marche à suivre pour calculer l'aire du domaine limité par ces deux courbes :

- recherche des points d'intersection,

Aire du domaine fini limité par deux courbes

On considère le domaine du plan délimité par les deux courbes d'équation $y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$.

Marche à suivre pour calculer l'aire du domaine limité par ces deux courbes :

- recherche des points d'intersection,
- esquisse du domaine,

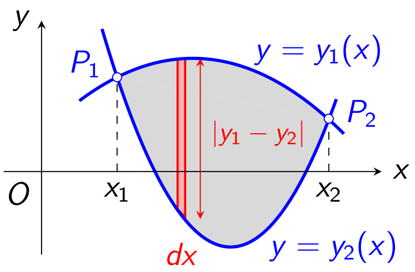
Aire du domaine fini limité par deux courbes

On considère le domaine du plan délimité par les deux courbes d'équation

$y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$.

Marche à suivre pour calculer l'aire du domaine limité par ces deux courbes :

- recherche des points d'intersection,
- esquisse du domaine,



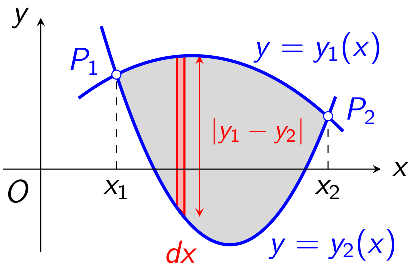
Aire du domaine fini limité par deux courbes

On considère le domaine du plan délimité par les deux courbes d'équation

$y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$.

Marche à suivre pour calculer l'aire du domaine limité par ces deux courbes :

- recherche des points d'intersection,
- esquisse du domaine,
- calcul de l'aire :



Aire du domaine fini limité par deux courbes

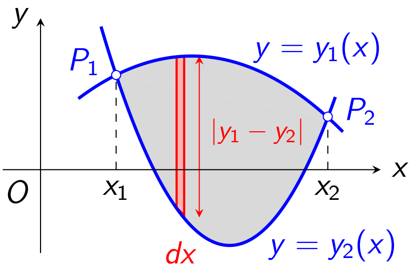
On considère le domaine du plan délimité par les deux courbes d'équation

$y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$.

Marche à suivre pour calculer l'aire du domaine limité par ces deux courbes :

- recherche des points d'intersection,
- esquisse du domaine,
- calcul de l'aire :

$$A = \int_{x_1}^{x_2} |\, y_1(x) - y_2(x) \,| \, dx\,.$$



Aire du domaine fini limité par deux courbes

Remarque :

Aire du domaine fini limité par deux courbes

Remarque : l'aire de ce domaine ne dépend pas du signe de y_1 et de y_2 ,

Aire du domaine fini limité par deux courbes

Remarque : l'aire de ce domaine ne dépend pas du signe de y_1 et de y_2, mais uniquement du signe de $y_1 - y_2$.

Aire du domaine fini limité par deux courbes

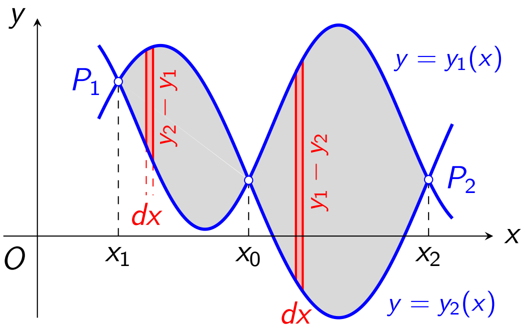
Remarque : l'aire de ce domaine ne dépend pas du signe de y_1 et de y_2, mais uniquement du signe de $y_1 - y_2$.

Par exemple, si P_1 et P_2 ne sont pas deux points d'intersection consécutifs,

Aire du domaine fini limité par deux courbes

Remarque : l'aire de ce domaine ne dépend pas du signe de y_1 et de y_2, mais uniquement du signe de $y_1 - y_2$.

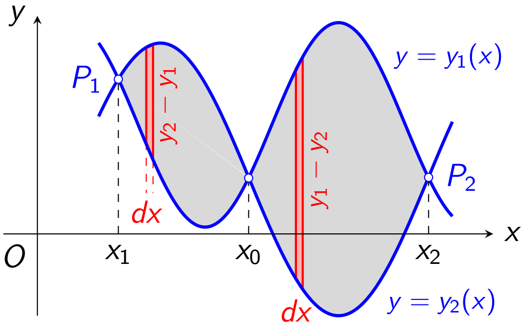
Par exemple, si P_1 et P_2 ne sont pas deux points d'intersection consécutifs,



Aire du domaine fini limité par deux courbes

Remarque : l'aire de ce domaine ne dépend pas du signe de y_1 et de y_2, mais uniquement du signe de $y_1 - y_2$.

Par exemple, si P_1 et P_2 ne sont pas deux points d'intersection consécutifs,

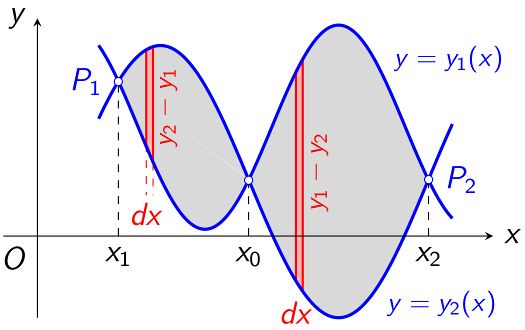


$$A = \int_{x_1}^{x_2} |\, y_1(x) - y_2(x) \,|\, dx$$

Aire du domaine fini limité par deux courbes

Remarque : l'aire de ce domaine ne dépend pas du signe de y_1 et de y_2, mais uniquement du signe de $y_1 - y_2$.

Par exemple, si P_1 et P_2 ne sont pas deux points d'intersection consécutifs,



$$A = \int_{x_1}^{x_2} |\, y_1(x) - y_2(x) \,|\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_0} [\, y_2(x) - y_1(x) \,]\, dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2} [\, y_1(x) - y_2(x) \,]\, dx\,.$$

Exemples

Exemple 1

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan,

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- Recherche des points d'intersection :

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- Recherche des points d'intersection :

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- Recherche des points d'intersection :

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x+1)\,(x-2) = 0$$

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- Recherche des points d'intersection :

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x+1)\,(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{et} \quad y = 2$$

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- Recherche des points d'intersection :

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x+1)\,(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{et} \quad y = 2 \qquad \text{ou} \qquad x = 2 \quad \text{et} \quad y = -1\,.$$

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- Recherche des points d'intersection :

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x+1)\,(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{et} \quad y = 2 \qquad \text{ou} \qquad x = 2 \quad \text{et} \quad y = -1\,.$$

$$P_1\,(-1\,,\,2)$$

Exemples

Exemple 1

Calculons l'aire A du domaine fini D du plan, limité par les deux paraboles d'équation $y_1(x) = -x^2 + 3$ et $y_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- Recherche des points d'intersection :

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x+1)\,(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{et} \quad y = 2 \qquad \text{ou} \qquad x = 2 \quad \text{et} \quad y = -1\,.$$

$$P_1\,(-1\,,\,2) \quad \text{et} \quad P_2\,(2\,,\,-1)\,.$$

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :
  - $*$ La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$,

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :
  - $*$ La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$, pour axe Oy

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :

  $*$ La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$, pour axe Oy et elle est concave.

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :

  * La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$, pour axe Oy et elle est concave.

  * $y = y_2(x) = (x-1)^2 - 2$

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :

  $*$ La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$, pour axe Oy et elle est concave.

  $*$ $y = y_2(x) = (x-1)^2 - 2$ est l'équation d'une parabole de sommet $S_2\,(1\,,\,-2)$,

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :

  * La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$, pour axe Oy et elle est concave.

  * $y = y_2(x) = (x-1)^2 - 2$ est l'équation d'une parabole de sommet $S_2\,(1\,,\,-2)$, d'axe $x = 1$

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :

  * La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$, pour axe Oy et elle est concave.

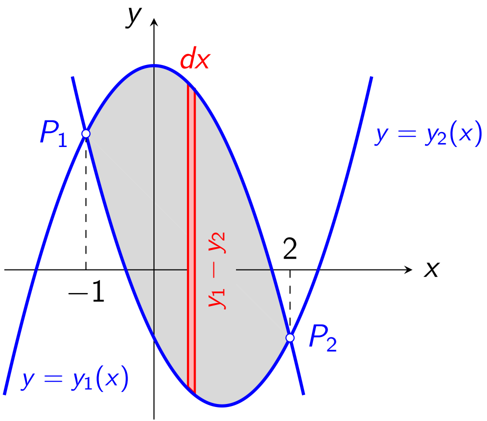
  * $y = y_2(x) = (x-1)^2 - 2$ est l'équation d'une parabole de sommet $S_2\,(1\,,\,-2)$, d'axe $x = 1$ et elle est convexe.

Exemple 1

- Esquisse du domaine D :

  * La parabole d'équation $y = y_1(x)$ a pour sommet $S_1\,(0\,,\,3)$, pour axe Oy et elle est concave.

  * $y = y_2(x) = (x-1)^2 - 2$ est l'équation d'une parabole de sommet $S_2\,(1\,,\,-2)$, d'axe $x = 1$ et elle est convexe.



Exemple 1

- Calcul de l'aire A du domaine D :

Exemple 1

- Calcul de l'aire A du domaine D :

$$A = \int_{-1}^{2} [\, y_1(x) - y_2(x) \,]\, dx$$

Exemple 1

- Calcul de l'aire A du domaine D :

$$A = \int_{-1}^{2} [\, y_1(x) - y_2(x) \,] \, dx = \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 2x + 4 \right] dx$$

Exemple 1

- Calcul de l'aire A du domaine D :

$$A = \int_{-1}^{2} [\, y_1(x) - y_2(x) \,]\, dx = \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 2x + 4 \right] dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \bigg|_{-1}^{2}$$

Exemple 1

- Calcul de l'aire A du domaine D :

$$A = \int_{-1}^{2} [\, y_1(x) - y_2(x) \,]\, dx = \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 2x + 4 \right] dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \Big|_{-1}^{2} = \left[\left(-\tfrac{16}{3} + 4 + 8 \right) - \left(+\tfrac{2}{3} + 1 - 4 \right) \right] = 9\,.$$