Chapitre 6. Arcs paramétrés

Chapitre 6. Arcs paramétrés

1. Fonctions vectorielles

Arcs paramétrés dans le plan

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$.

Arcs paramétrés dans le plan

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$.

Définition :

Arcs paramétrés dans le plan

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Définition : On appelle arc paramétré dans le plan,

Arcs paramétrés dans le plan

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$.

Définition : On appelle arc paramétré dans le plan, la donnée d'un intervalle $D \subset \mathbb{R}$

Arcs paramétrés dans le plan

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{e_1}\,,\,\vec{e_2})$.

Définition : On appelle arc paramétré dans le plan, la donnée d'un intervalle $D \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction de D dans $\mathbb{R}^2$:

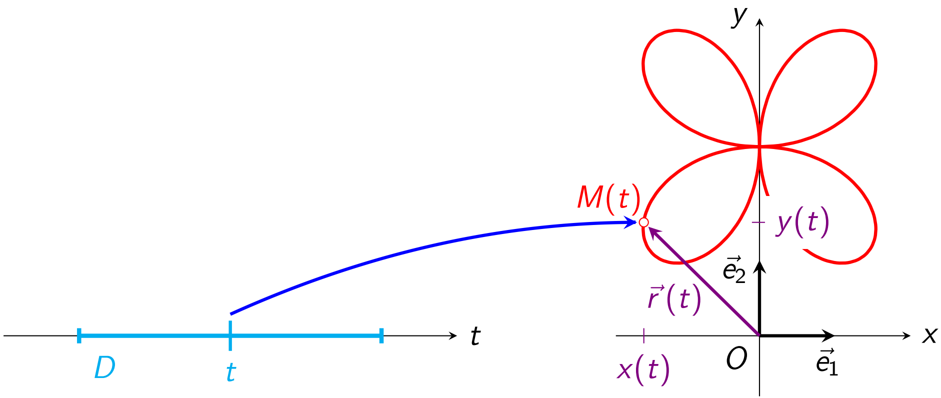
Arcs paramétrés dans le plan

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$.

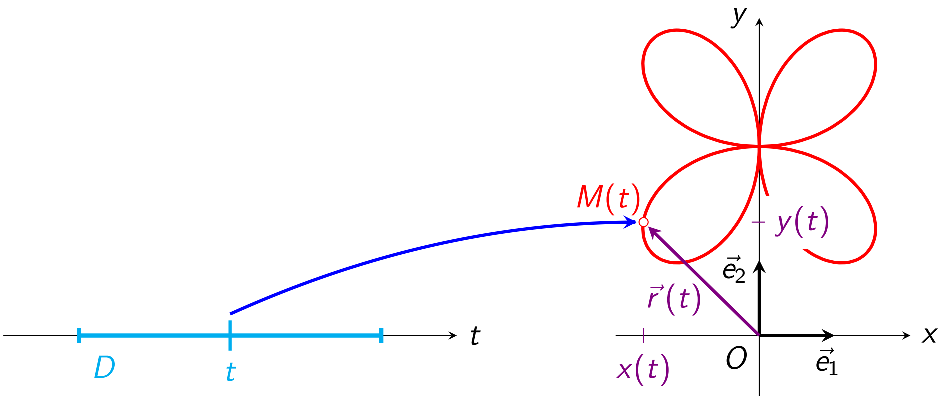
Définition : On appelle arc paramétré dans le plan, la donnée d'un intervalle $D \subset \mathbb{R}$ et d'une fonction de D dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)\,. \end{array}$$

Arcs paramétrés dans le plan

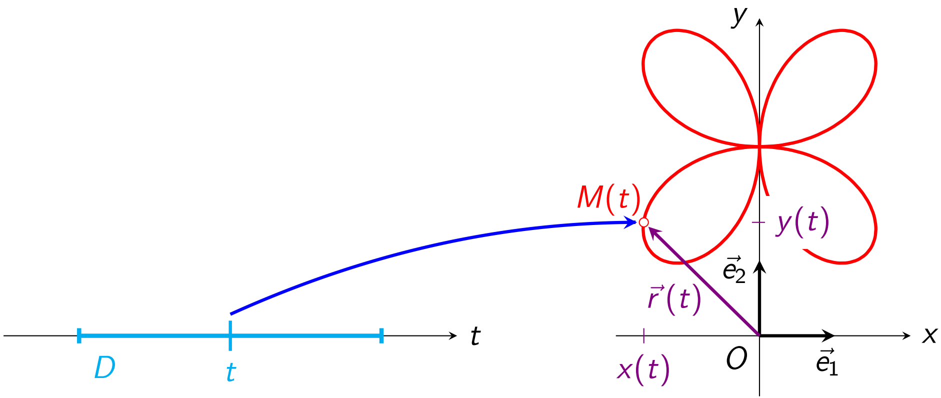


Arcs paramétrés dans le plan



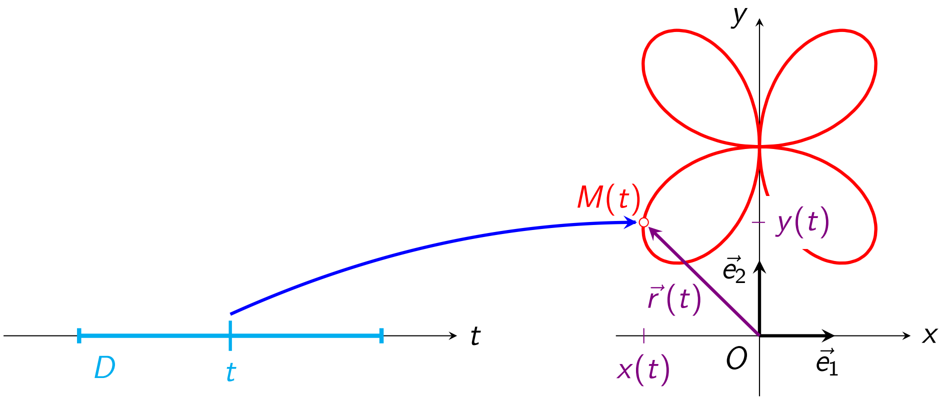
$\vec{r}(t)$

Arcs paramétrés dans le plan



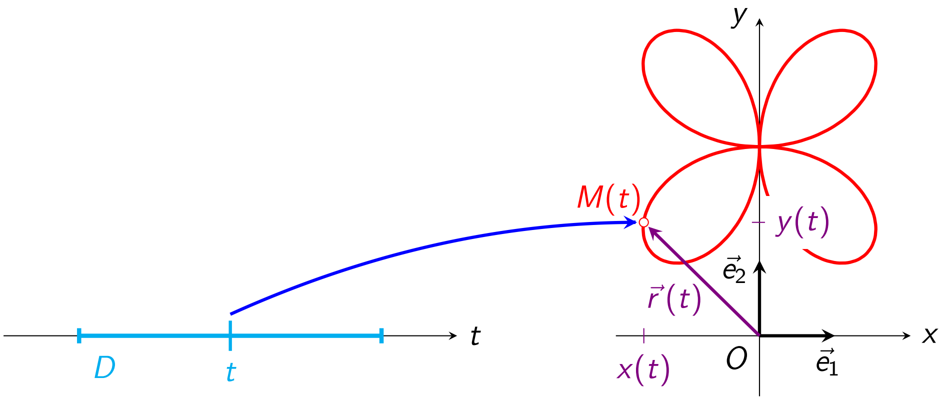
$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

Arcs paramétrés dans le plan



$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$$

Arcs paramétrés dans le plan



$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t),\ t \in D \right\}$

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)\,,\ t \in D \right\}$ est appelée la trajectoire de l'arc paramétré.

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)\,,\ t \in D \right\}$ est appelée la trajectoire de l'arc paramétré.

Intuitivement,

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)\,,\ t \in D \right\}$ est appelée la trajectoire de l'arc paramétré.

Intuitivement, un arc paramétré est une trajectoire

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)\,,\ t \in D \right\}$ est appelée la trajectoire de l'arc paramétré.

Intuitivement, un arc paramétré est une trajectoire muni d'un mode de parcours.

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t)\,,\ t \in D \right\}$ est appelée la trajectoire de l'arc paramétré.

Intuitivement, un arc paramétré est une trajectoire muni d'un mode de parcours.

Deux arcs paramétrés différents

Arcs paramétrés dans le plan

La fonction $t \mapsto \vec{r}(t)$ est une fonction vectorielle et les fonctions scalaires $x(t)$ et $y(t)$ sont appelées les fonctions coordonnées de $\vec{r}(t)$.

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t),\ t \in D \right\}$ est appelée la trajectoire de l'arc paramétré.

Intuitivement, un arc paramétré est une trajectoire muni d'un mode de parcours.

Deux arcs paramétrés différents peuvent avoir une même trajectoire.

Exemple :

Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

Les deux arcs paramétrés

Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $\vec{r}_2 \,:\, [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire :

Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.

Arcs paramétrés dans le plan

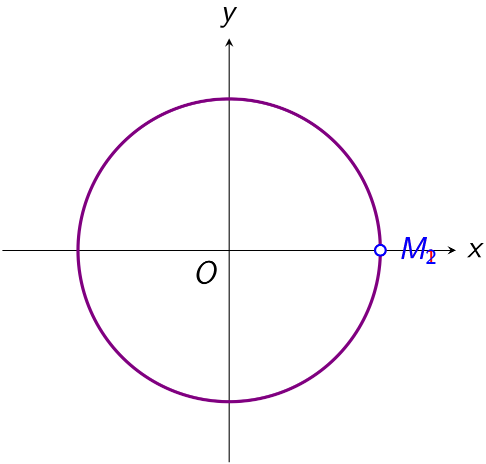
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

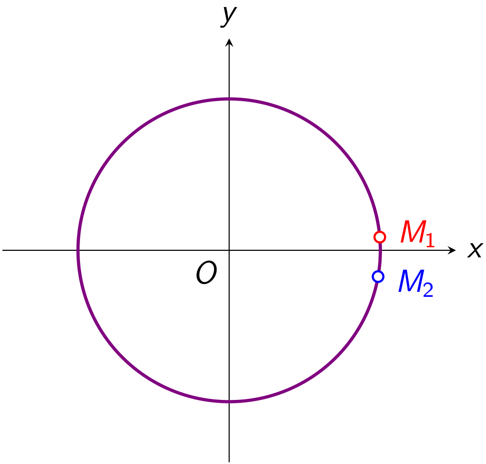
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

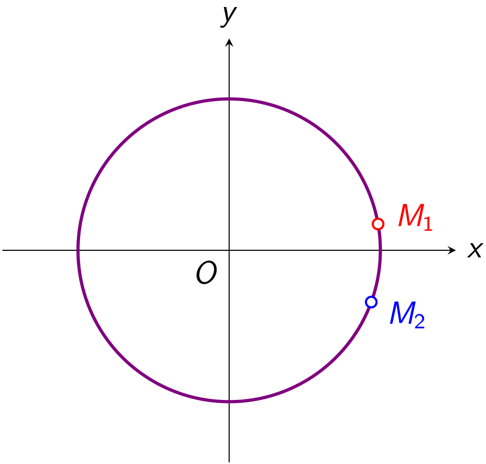
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

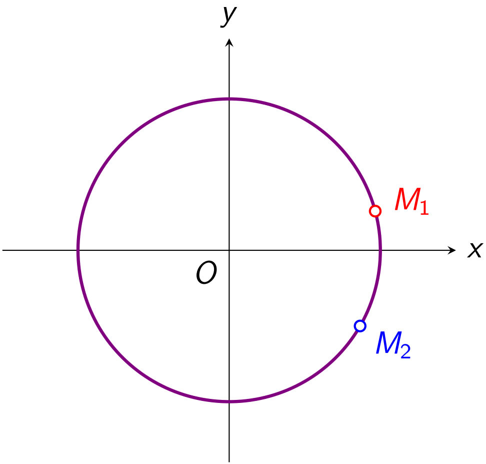
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

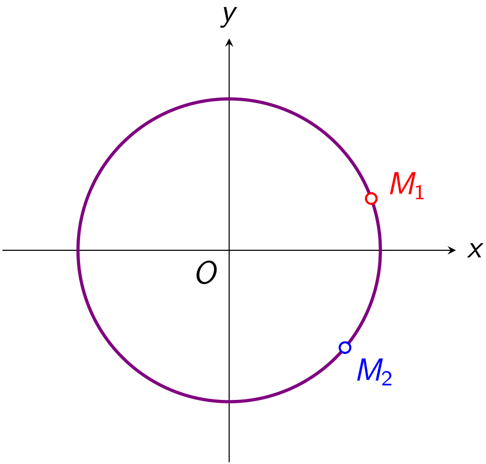
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

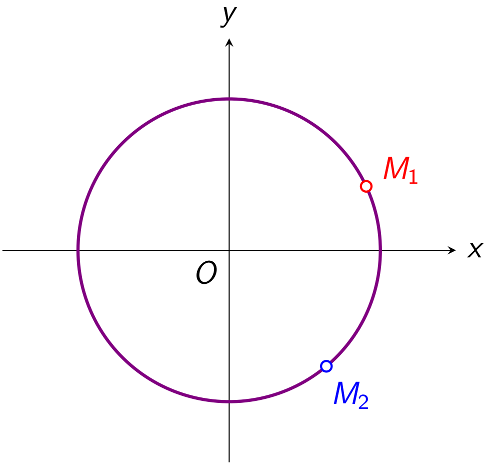
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

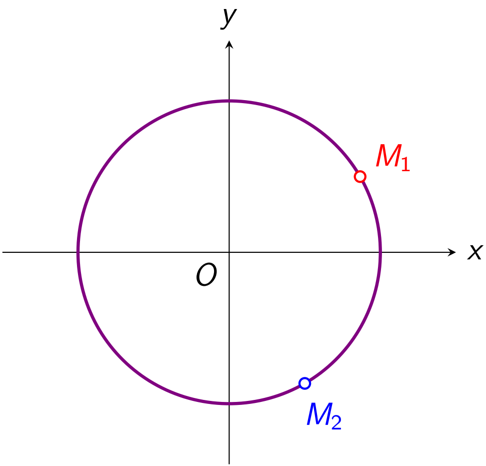
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r_2} : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

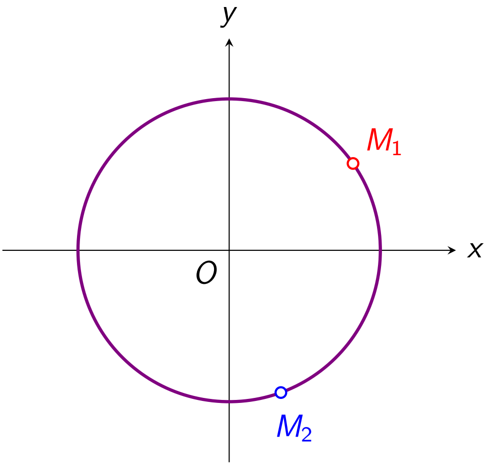
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

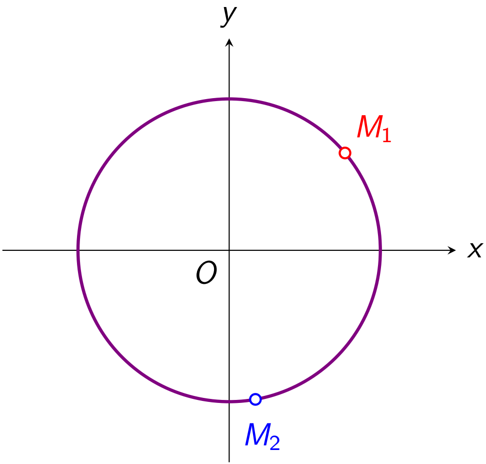
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

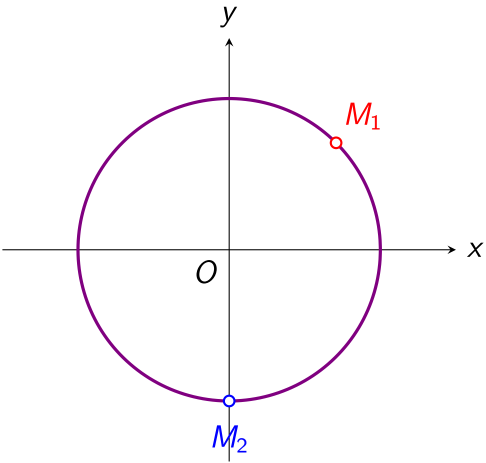
Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r_2}$:

$$\vec{r_2} : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

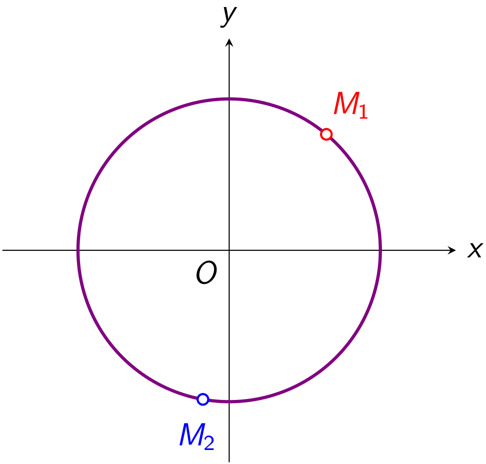
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

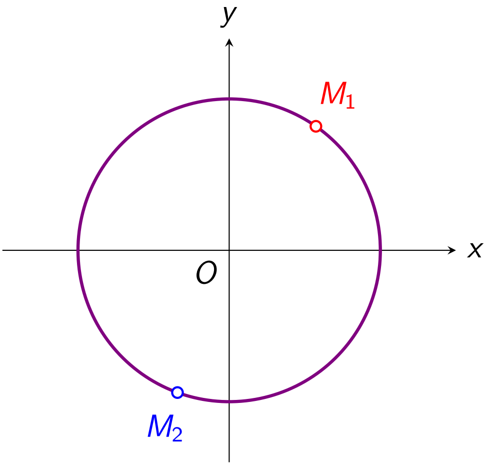
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

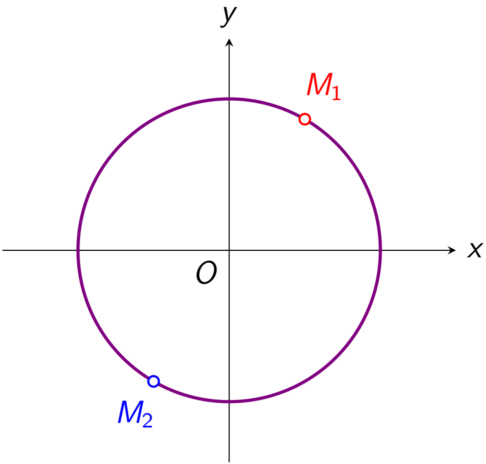
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

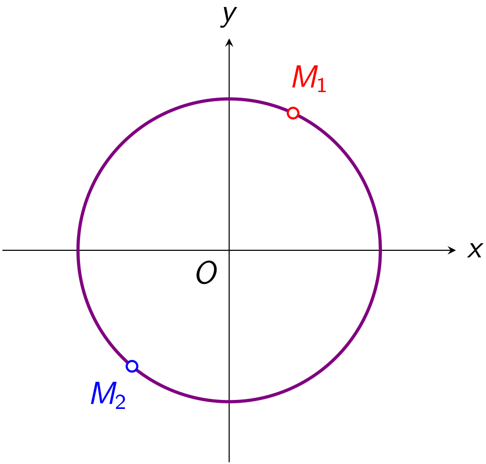
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

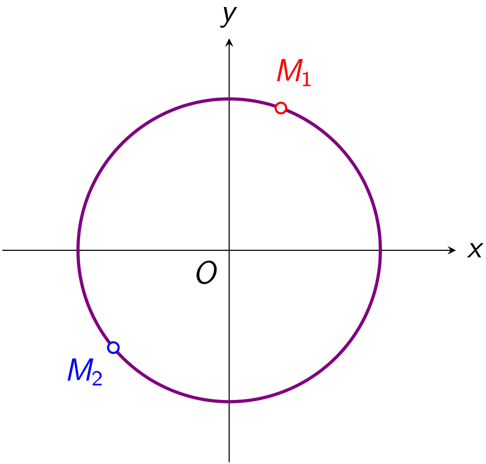
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

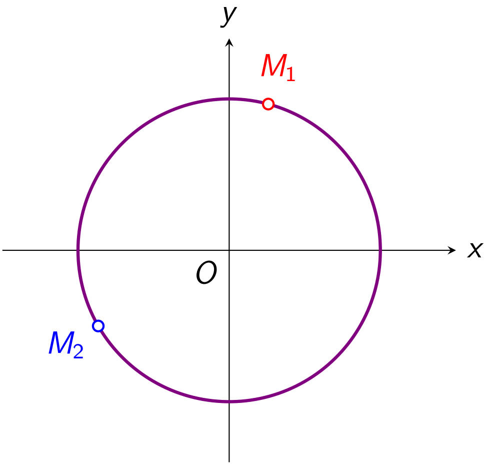
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

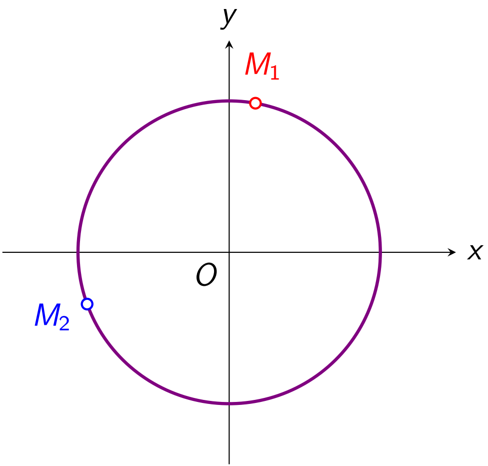
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

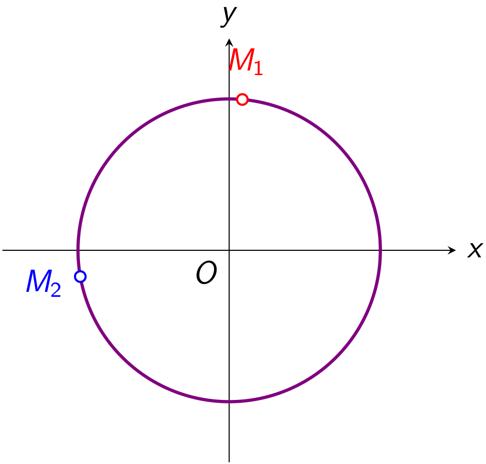
Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

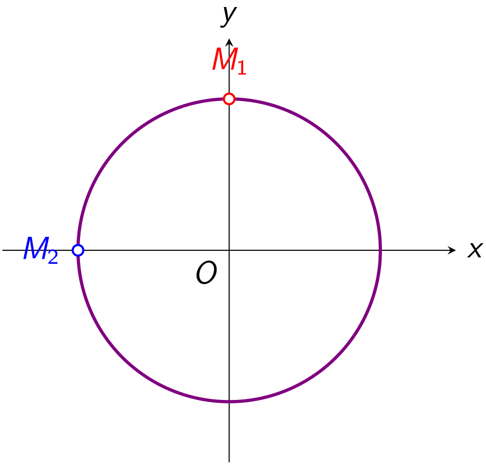
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

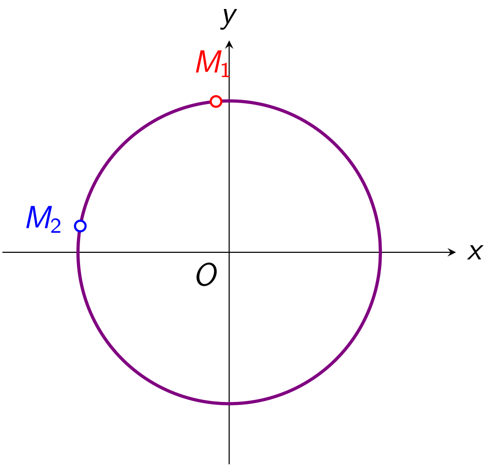
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

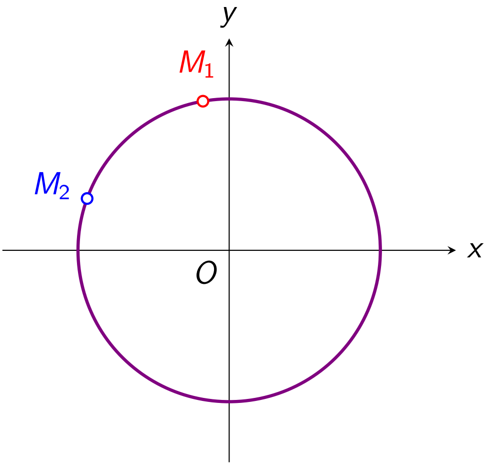
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

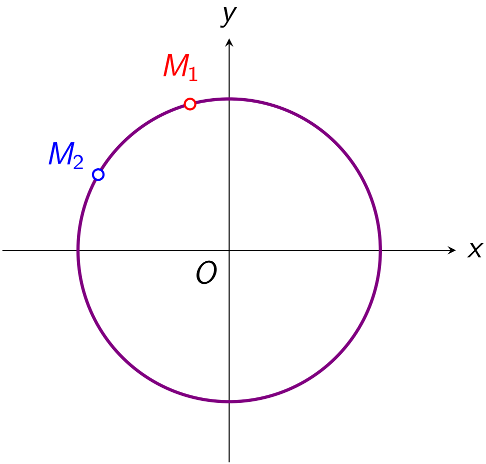
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

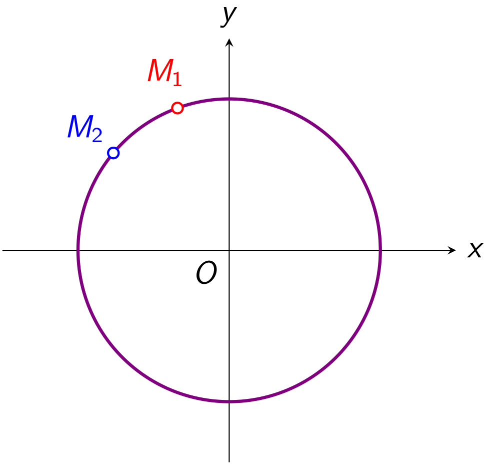
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

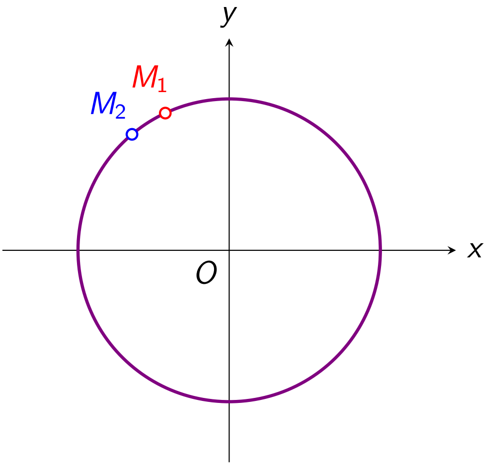
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

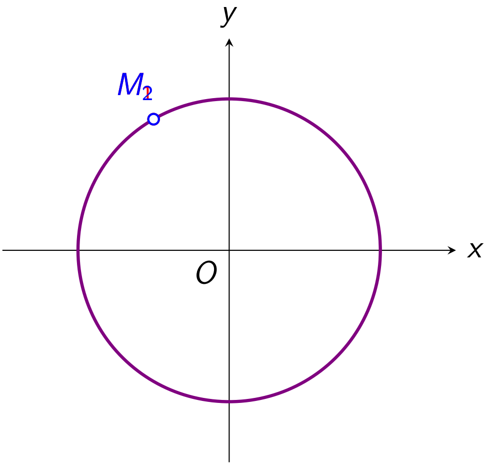
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

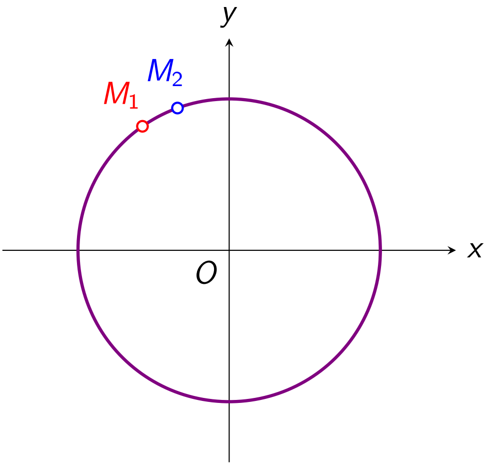
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

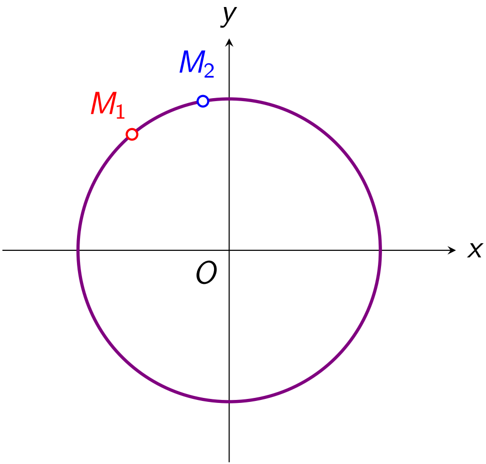
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

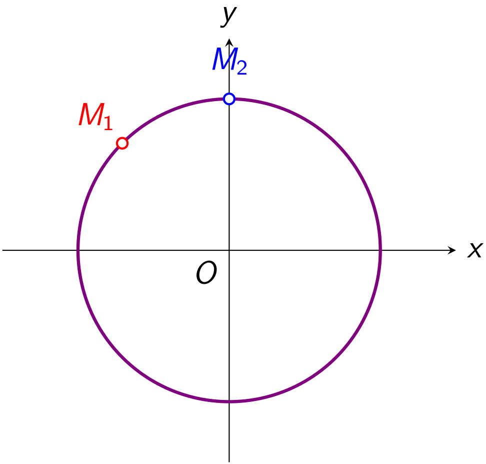
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 \; : \; \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 \; : \; \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

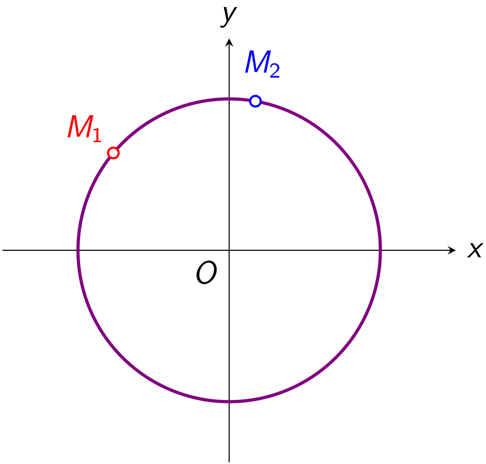
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

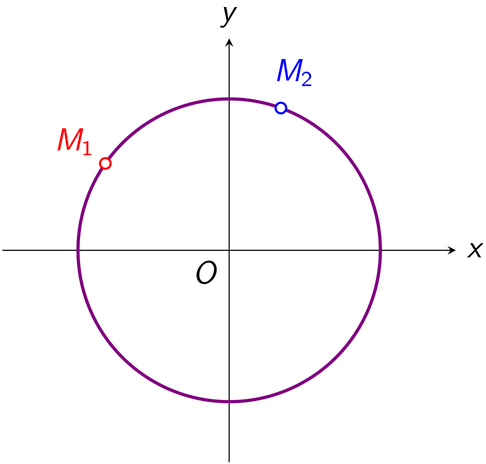
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

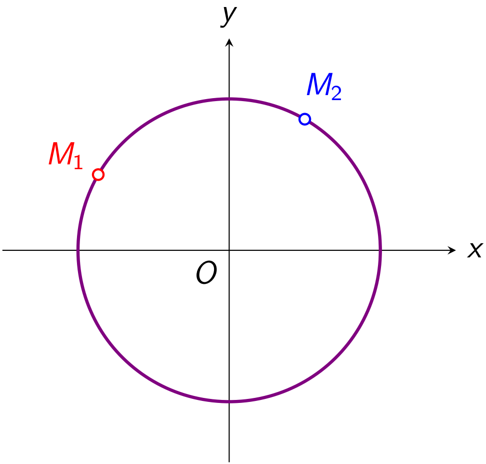
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

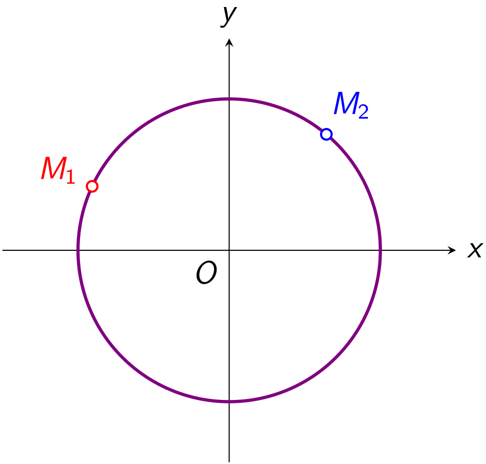
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

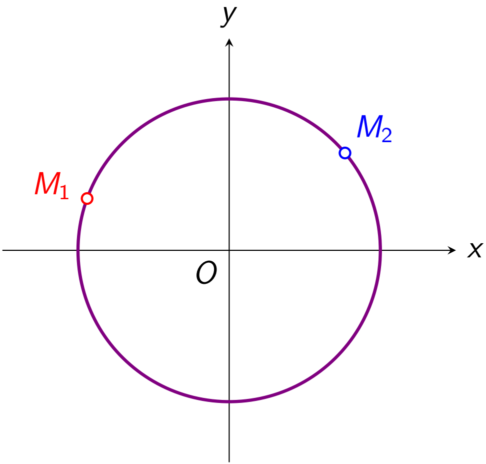
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

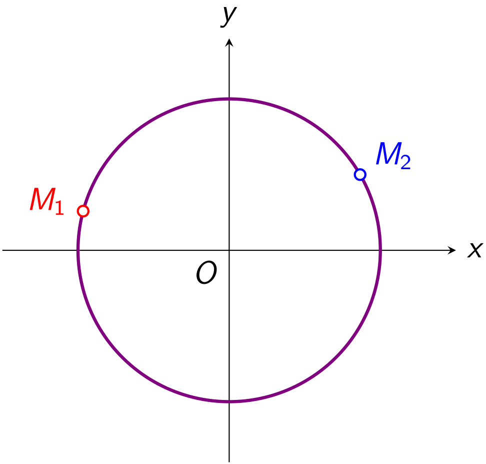
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

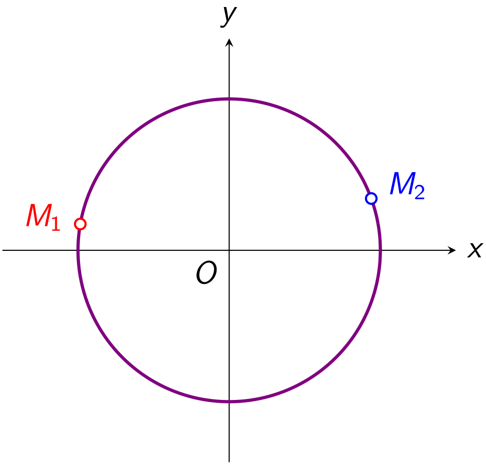
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

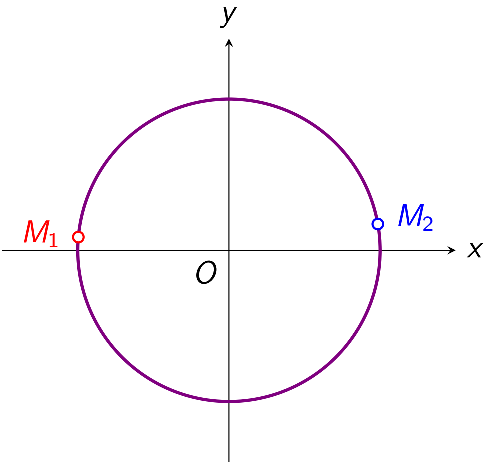
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

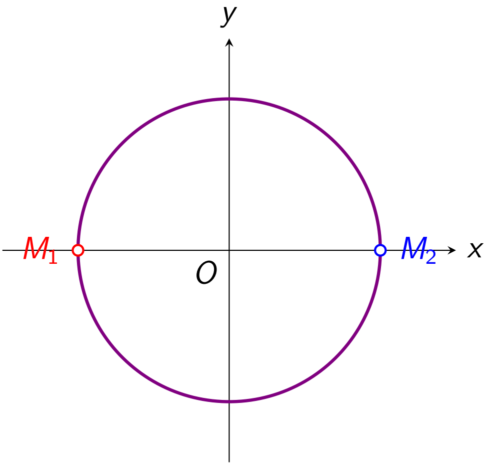
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

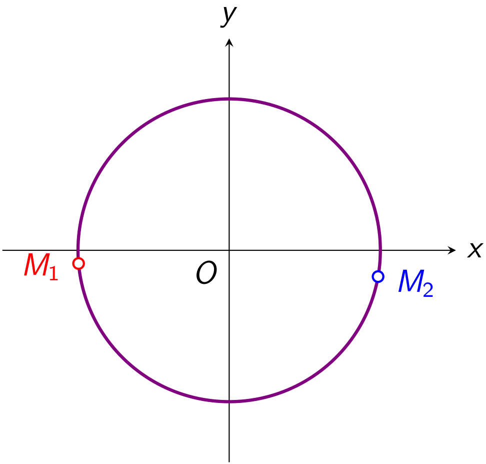
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

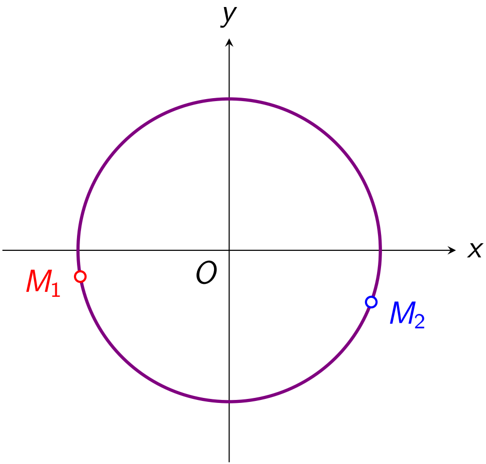
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

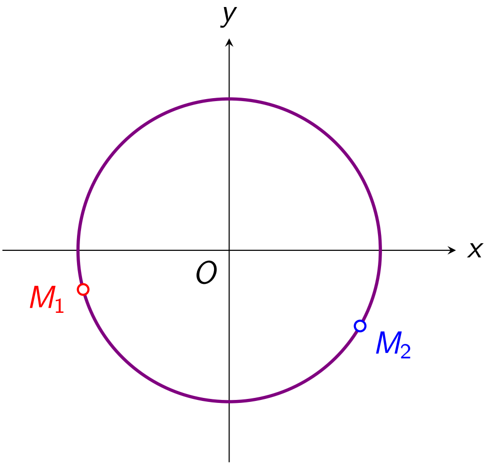
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

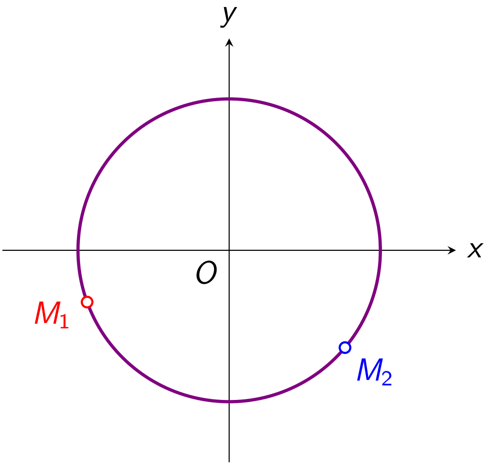
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

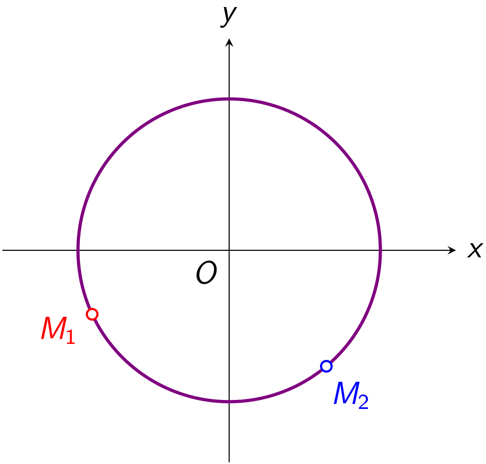
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $\begin{aligned} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

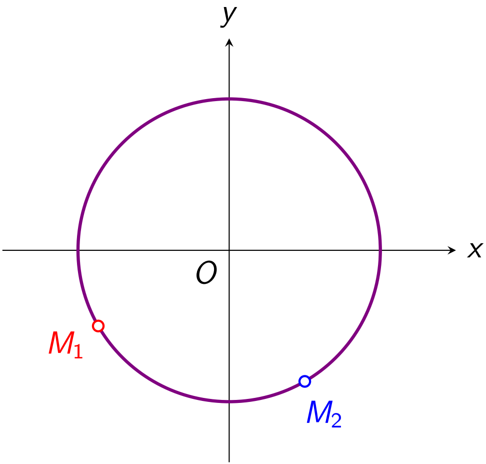
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

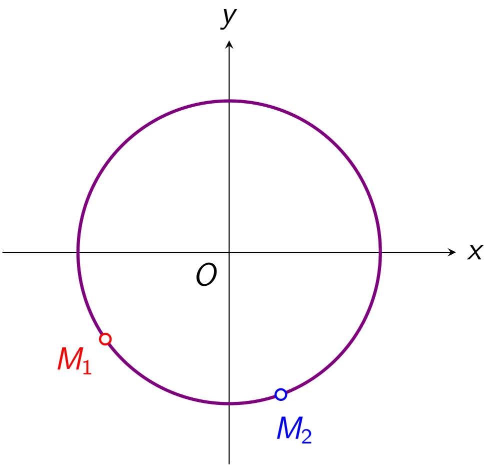
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

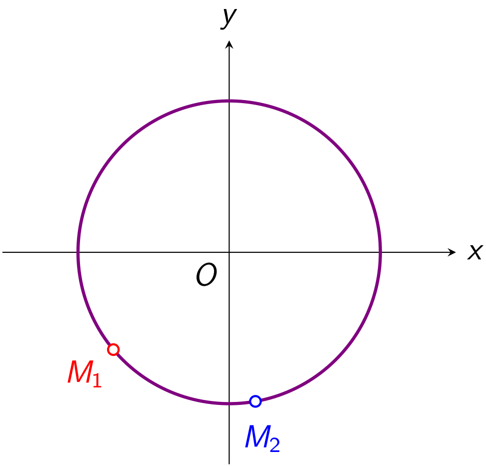
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $$\vec{r}_2 : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

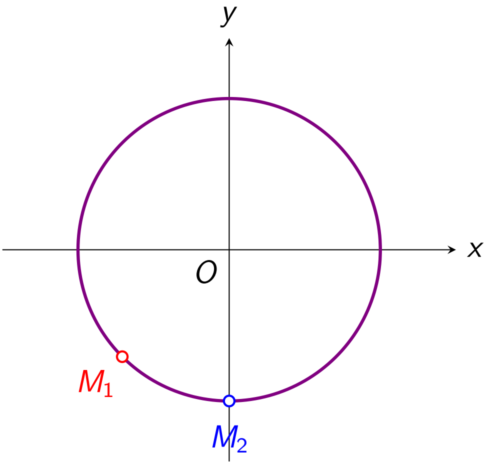
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

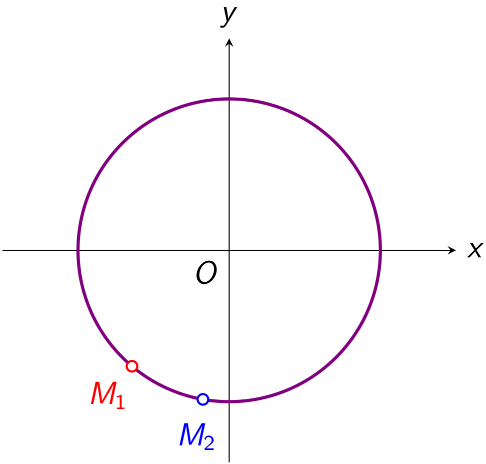
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 \,:\, [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

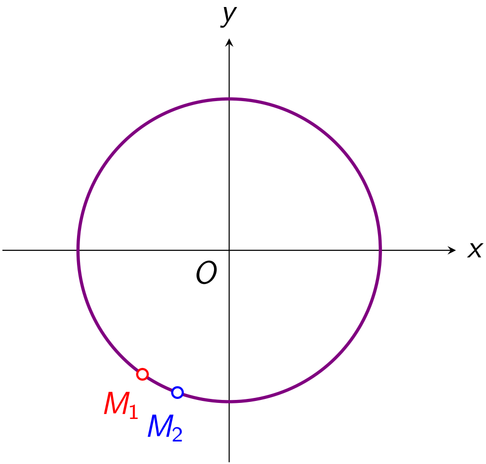
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \ : \ [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 \ : \ [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

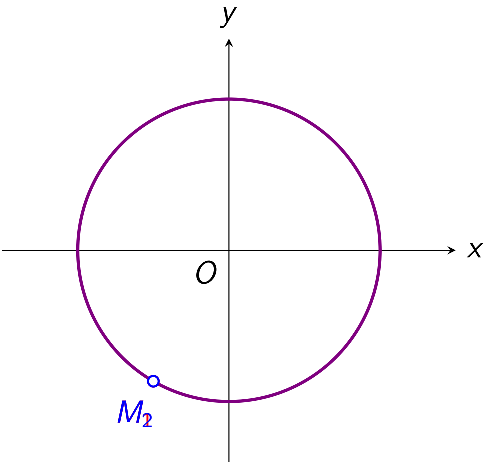
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

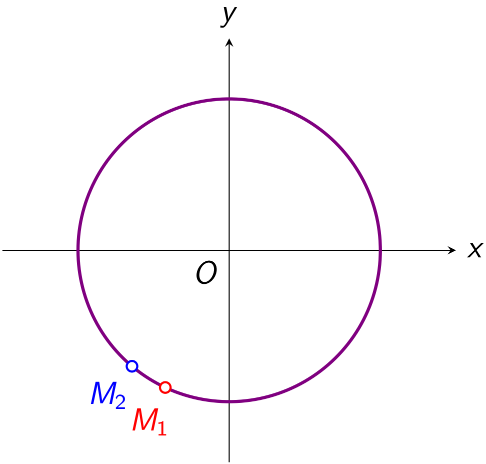
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



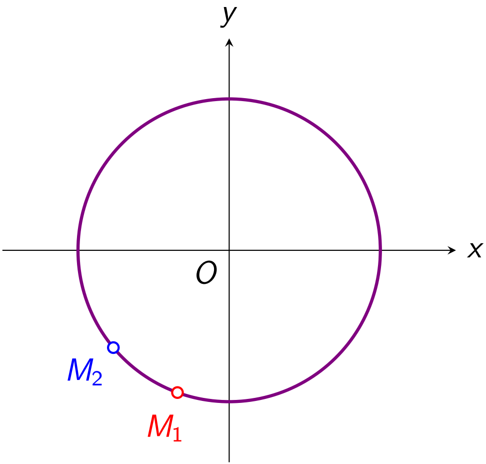
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

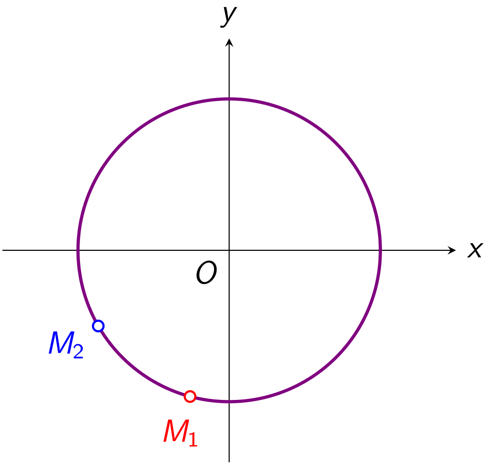
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

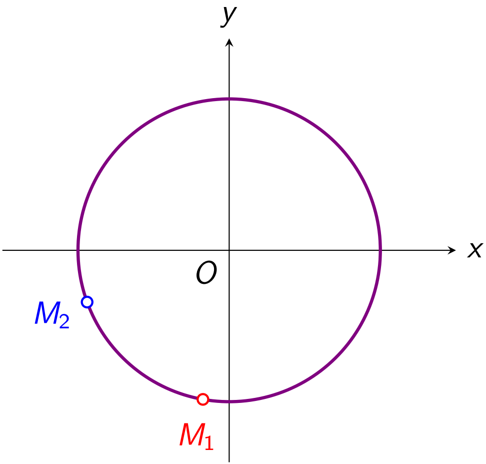
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

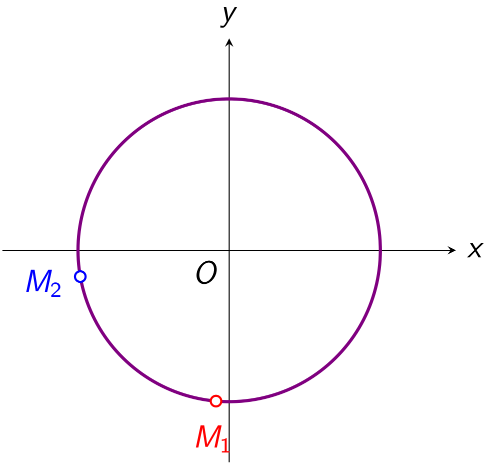
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

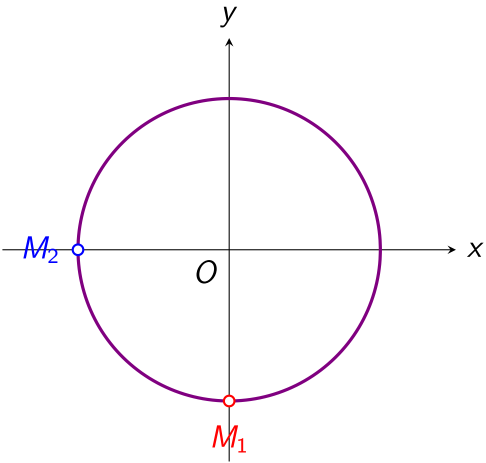
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $$\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

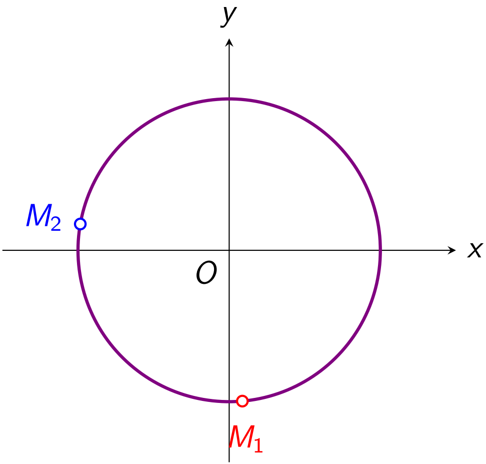
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

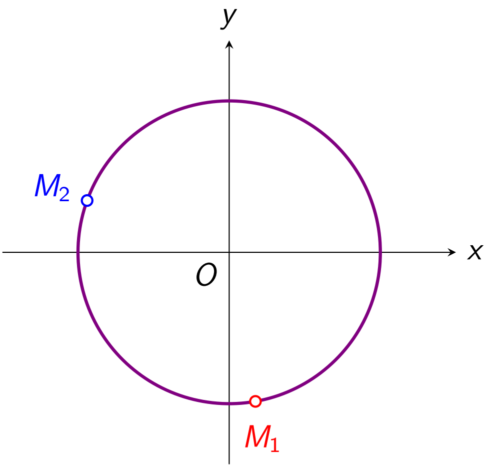
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

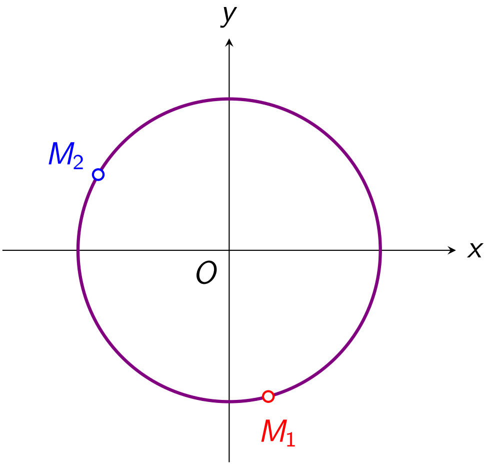
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

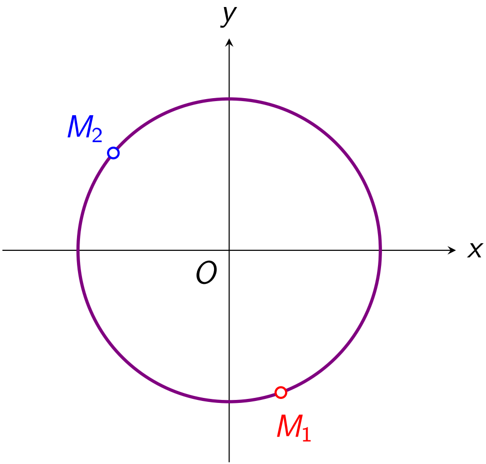
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r_2} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

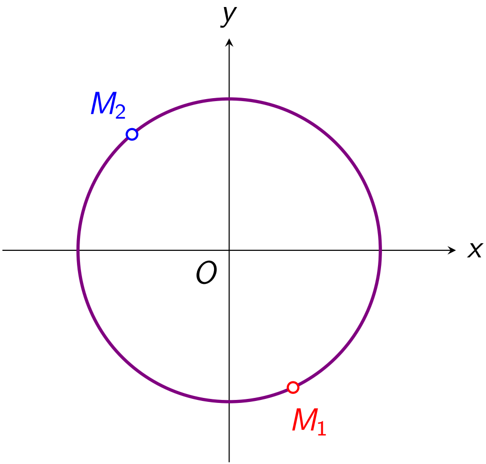
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

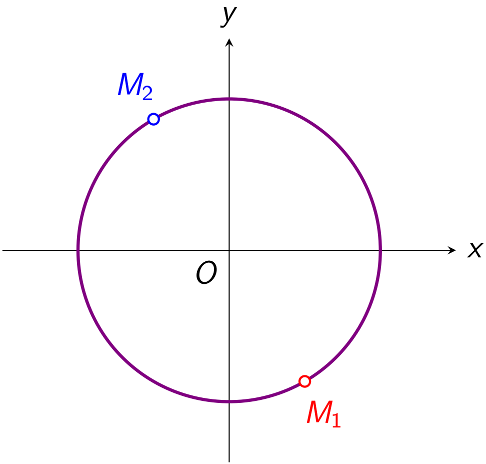
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix}\cos(-2t)\\ \sin(-2t)\end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

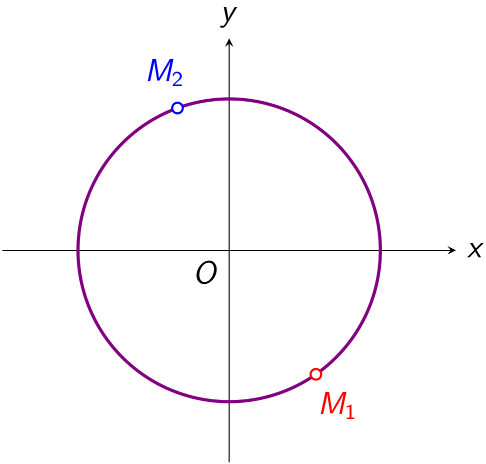
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $$\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

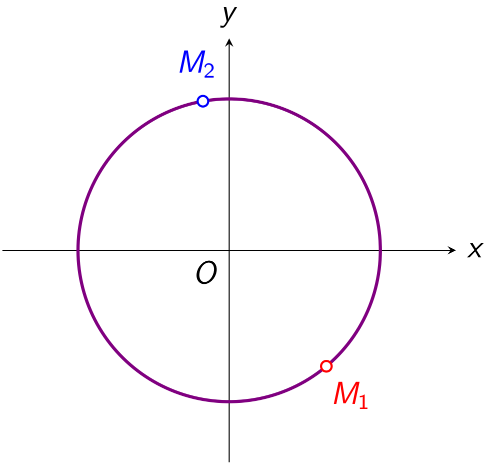
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$t \longmapsto \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

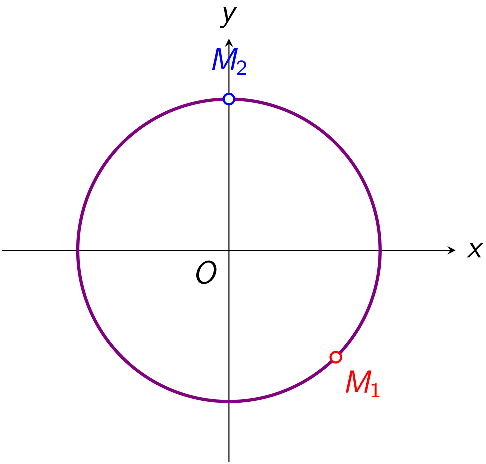
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r_1} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_1}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $$\vec{r_2} : \begin{array}{ccl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r_2}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

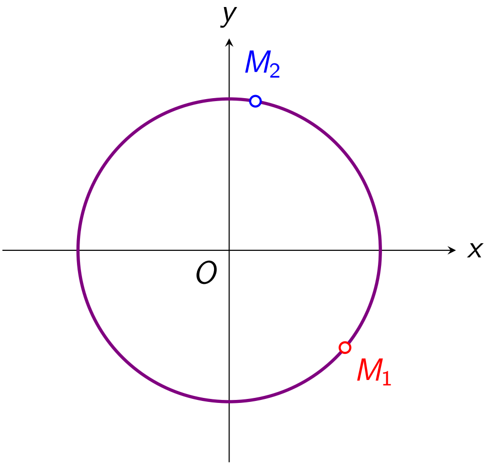
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

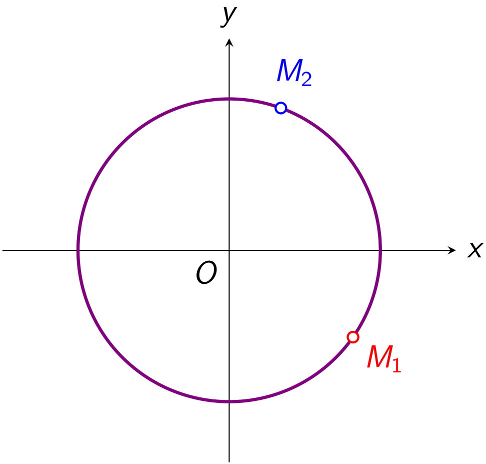
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

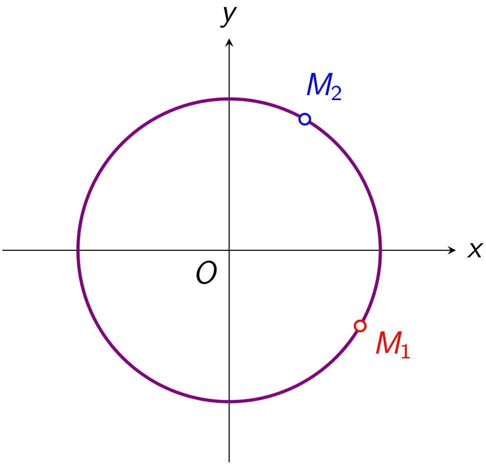
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \; : \; [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 \; : \; [0\,,\,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

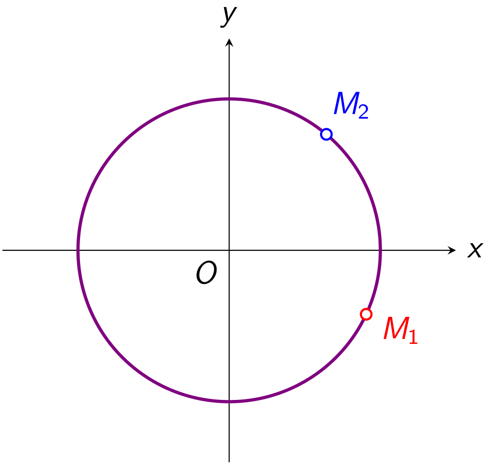
Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

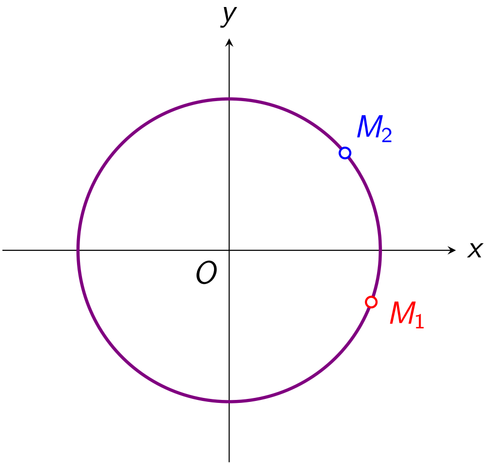
Exemple :

Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $$\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

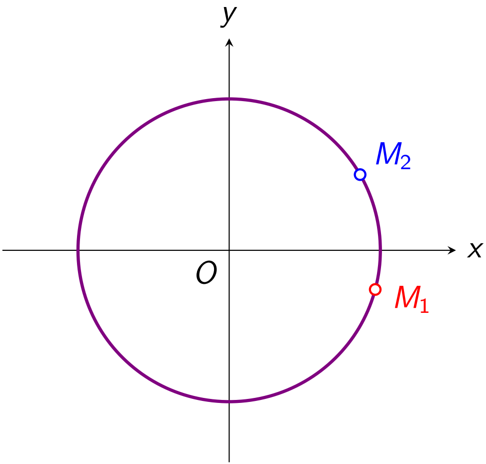
Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

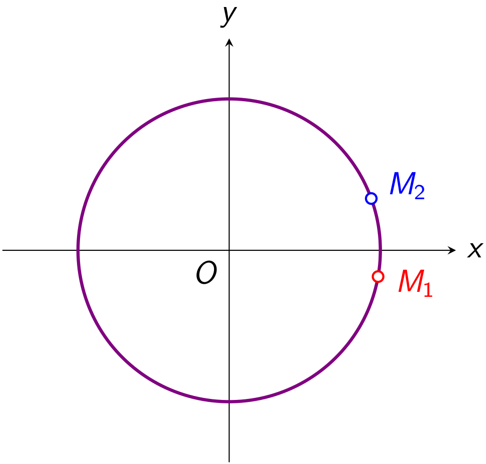
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_1 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \vec{r}_2 : [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

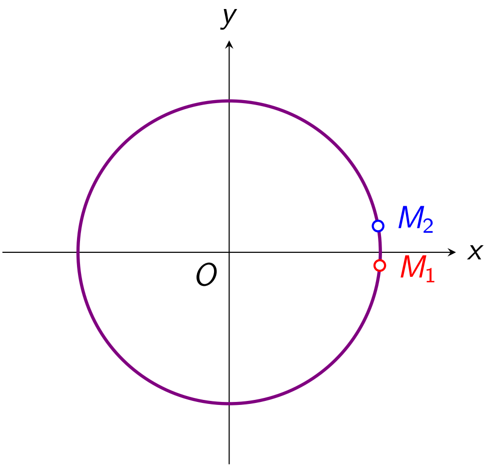
Les deux arcs paramétrés

$$\begin{array}{rccl} \vec{r}_1 : & [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \vec{r}_2 : & [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Arcs paramétrés dans le plan

Exemple :

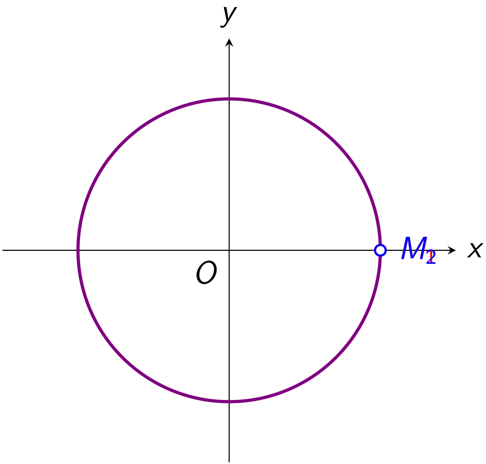
Les deux arcs paramétrés

$$\vec{r}_1 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_1\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

et $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_2 : \begin{array}{rcl} [0\,,\,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{r}_2\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} \end{array}$$

ont même trajectoire : le cercle unité.



Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \; t \in D,$

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition :

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition : Soit $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition : Soit $\vec{r_0}$ un vecteur du plan.

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$$

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition : Soit $\vec{r_0}$ un vecteur du plan.

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si $\forall \varepsilon > 0$,

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition : Soit $\vec{r_0}$ un vecteur du plan.

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0$ tel que

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition : Soit $\vec{r_0}$ un vecteur du plan.

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$0 < |t - t_0| < \delta$

Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition : Soit $\vec{r_0}$ un vecteur du plan.

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0$ tel que

$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\, \vec{r}(t) - \vec{r_0} \,\| < \varepsilon\,.$

Limite d'une fonction vectorielle

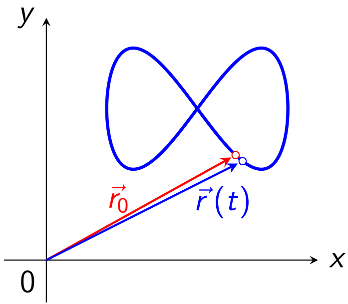
Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $t \in D$, une fonction vectorielle définie sur un voisinage de $t_0 \in D$.

i) Notion de limite

Définition : Soit $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \,\| < \varepsilon$.



Limite d'une fonction vectorielle

Proposition :

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors
$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$$

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$,

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

$*$ Soit $\varepsilon > 0$ donné,

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

* Soit $\varepsilon > 0$ donné,
  montrons que $\exists\, \delta > 0$

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

$*$ Soit $\varepsilon > 0$ donné,
montrons que $\exists \delta > 0$ tel que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_0| < \varepsilon$.

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

* Soit $\varepsilon > 0$ donné,

  montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que $0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \;\Rightarrow\; |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon$.

  Or $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$,

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

∗ Soit $\varepsilon > 0$ donné,

montrons que $\exists \delta > 0$ tel que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_0| < \varepsilon$.

Or $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, donc pour cet $\varepsilon > 0$ donné,

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

* Soit $\varepsilon > 0$ donné,

montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que $0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \;\Rightarrow\; |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon$.

Or $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$, donc pour cet $\varepsilon > 0$ donné, $\exists\, \delta > 0$ tel que

Limite d'une fonction vectorielle

Proposition : Si $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, alors

$\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Démonstration :

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

$*$ Soit $\varepsilon > 0$ donné,

montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que $0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \;\Rightarrow\; |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon$.

Or $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$, donc pour cet $\varepsilon > 0$ donné, $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \;\Rightarrow\; \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \,\| < \varepsilon\,.$$

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon$

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon\,.$

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$.

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\|\vec{r}(t)-\vec{r}_0\| < \varepsilon \iff \sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \sqrt{(x(t)-x_0)^2+0} < \varepsilon \iff |x(t)-x_0| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$.

* De même, $\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow |y(t)-y_0| < \varepsilon$.

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r_0} \| < \varepsilon \iff \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \iff | x(t) - x_0 | < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$.

* De même, $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow | y(t) - y_0 | < \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad | x(t) - x_0 | < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$.

* De même, $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad | y(t) - y_0 | < \varepsilon$.

  Donc $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$,

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \iff \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \iff |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$.

* De même, $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow |\, y(t) - y_0 \,| < \varepsilon$.

  Donc $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \iff \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \iff |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$.

$*$ De même, $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow |\, y(t) - y_0 \,| < \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

  Soit $\varepsilon > 0$ donné,

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad | x(t) - x_0 | < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$.

* De même, $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad | y(t) - y_0 | < \varepsilon$.

  Donc $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

- Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

  Soit $\varepsilon > 0$ donné,

  montrons que $\exists \, \delta > 0$

Limite d'une fonction vectorielle

Or $\| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + 0} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |\, x(t) - x_0 \,| < \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$.

∗ De même, $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon \;\Rightarrow\; |\, y(t) - y_0 \,| < \varepsilon$.

Donc $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$.

• Si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, montrons alors que $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné,

montrons que $\exists\, \delta > 0$ tel que $0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon$.

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \,,$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \,, \quad \text{donc} \quad \exists\, \delta_x > 0$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \,, \;\; \text{donc} \;\; \exists\, \delta_x > 0 \;\; \text{tel que} \;\; 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \;\Rightarrow\; |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2} \,,$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,,\quad \text{donc}\ \ \exists\, \delta_x > 0\ \ \text{tel que}\ \ 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \ \Rightarrow\ |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,,$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,, \;\; \text{donc} \;\; \exists\, \delta_x > 0 \;\; \text{tel que} \;\; 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \;\Rightarrow\; |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,, \;\; \text{donc} \;\; \exists\, \delta_y > 0$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,,\ \ \text{donc}\ \ \exists\,\delta_x > 0\ \ \text{tel que}\ \ 0 < |\,t - t_0\,| < \delta_x\ \Rightarrow\ |\,x(t) - x_0\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,,\ \ \text{donc}\ \ \exists\,\delta_y > 0\ \ \text{tel que}\ \ 0 < |\,t - t_0\,| < \delta_y\ \Rightarrow\ |\,y(t) - y_0\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0\,,\ \text{ donc }\ \exists\,\delta_x > 0\ \text{ tel que }\ 0 < |\,t - t_0\,| < \delta_x\ \Rightarrow\ |\,x(t) - x_0\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0\,,\ \text{ donc }\ \exists\,\delta_y > 0\ \text{ tel que }\ 0 < |\,t - t_0\,| < \delta_y\ \Rightarrow\ |\,y(t) - y_0\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $\delta = \min\left(\delta_x\,,\ \delta_y\right)$, on a

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \,, \;\; \text{donc} \;\; \exists\, \delta_x > 0 \;\; \text{tel que} \;\; 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \;\Rightarrow\; |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2} \,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \,, \;\; \text{donc} \;\; \exists\, \delta_y > 0 \;\; \text{tel que} \;\; 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_y \;\Rightarrow\; |\, y(t) - y_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $\delta = \min(\delta_x \,, \, \delta_y)$, on a

$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,, \ \text{ donc } \ \exists\, \delta_x > 0 \ \text{ tel que } \ 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \ \Rightarrow \ |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,, \ \text{ donc } \ \exists\, \delta_y > 0 \ \text{ tel que } \ 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_y \ \Rightarrow \ |\, y(t) - y_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $\delta = \min(\delta_x\,,\, \delta_y)$, on a

$$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \ \Rightarrow \ \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \,\| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,,\ \text{donc}\ \exists\, \delta_x > 0\ \text{tel que}\ 0 < |\, t - t_0\,| < \delta_x \Rightarrow |\, x(t) - x_0\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,,\ \text{donc}\ \exists\, \delta_y > 0\ \text{tel que}\ 0 < |\, t - t_0\,| < \delta_y \Rightarrow |\, y(t) - y_0\,| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $\delta = \min(\delta_x\,,\, \delta_y)$, on a

$$0 < |\, t - t_0\,| < \delta \Rightarrow \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0\,\| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,, \text{ donc } \exists\, \delta_x > 0 \text{ tel que } 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \Rightarrow |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,, \text{ donc } \exists\, \delta_y > 0 \text{ tel que } 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_y \Rightarrow |\, y(t) - y_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $\delta = \min\left(\delta_x\,,\, \delta_y\right)$, on a

$$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \Rightarrow \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \,\| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon\,,$$

Limite d'une fonction vectorielle

$\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$, donc $\exists\, \delta_x > 0$ tel que $0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \;\Rightarrow\; |\, x(t) - x_0 \,| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, donc $\exists\, \delta_y > 0$ tel que $0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_y \;\Rightarrow\; |\, y(t) - y_0 \,| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc pour $\delta = \min(\delta_x\,,\, \delta_y)$, on a

$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \;\Rightarrow\; \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \,\| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon$,

car $(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,, \text{ donc } \exists\, \delta_x > 0 \text{ tel que } 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \Rightarrow |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,, \text{ donc } \exists\, \delta_y > 0 \text{ tel que } 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_y \Rightarrow |\, y(t) - y_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Donc pour $\delta = \min(\delta_x\,,\, \delta_y)$, on a

$$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \Rightarrow \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \,\| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon\,,$$

car $(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 < \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$

Limite d'une fonction vectorielle

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \,, \text{ donc } \exists\, \delta_x > 0 \text{ tel que } 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_x \Rightarrow |\, x(t) - x_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2} \,,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \,, \text{ donc } \exists\, \delta_y > 0 \text{ tel que } 0 < |\, t - t_0 \,| < \delta_y \Rightarrow |\, y(t) - y_0 \,| < \tfrac{\varepsilon}{2} .$$

Donc pour $\delta = \min(\delta_x \,,\, \delta_y)$, on a

$$0 < |\, t - t_0 \,| < \delta \Rightarrow \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \,\| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \tfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon \,,$$

car $(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 < \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 = \tfrac{\varepsilon^2}{2} .$ $\square$

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r_0}$ un vecteur du plan.

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0$,

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim_{t\to+\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, M > 0$

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tel que $t > M \Rightarrow \| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon$.

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tel que $t > M \Rightarrow \| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon$.

- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists M > 0$ tel que $t > M \Rightarrow \| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon\,.$

- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors

  $\lim\limits_{t \to -\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r_0}$ un vecteur du plan.

  $\lim\limits_{t\to+\infty} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, M > 0$ tel que $t > M \ \Rightarrow\ \|\, \vec{r}(t) - \vec{r_0}\, \| < \varepsilon\,.$

- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors

  $\lim\limits_{t\to-\infty} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$ si $\forall\, \varepsilon > 0\,,$

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tel que $t > M \Rightarrow \| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon$.

- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors

  $\lim_{t \to -\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N < 0$

Limite d'une fonction vectorielle

Définitions analogues lorsque $t \to \pm\infty$:

- Soient $\vec{r}(t)$ définie sur un voisinage de $+\infty$ et $\vec{r}_0$ un vecteur du plan.

  $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, M > 0$ tel que $t > M \;\Rightarrow\; \| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon\,.$

- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors

  $\lim\limits_{t \to -\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N < 0$ tel que $t < N \;\Rightarrow\; \| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \| < \varepsilon\,.$

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$,

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$, alors $\lim_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.
- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$,

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.
- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors $\lim\limits_{t \to -\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.
- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors $\lim\limits_{t \to -\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = x_0$

Limite d'une fonction vectorielle

Comme précédemment, ces limites de fonctions vectorielles peuvent être caractérisées à l'aide des limites des fonctions coordonnées.

Soient $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_1 + y(t) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_1 + y_0 \cdot \vec{e}_2$.

- Si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.
- De même, si $\vec{r}(t)$ est définie sur un voisinage de $-\infty$, alors $\lim\limits_{t \to -\infty} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = y_0$.

Continuité

ii) Notion de continuité

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition :

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0\,,$

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0$

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0$ tel que $|\, t - t_0 \,| < \delta \ \Rightarrow\ \|\, \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \,\| < \varepsilon$.

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \varepsilon$.

Proposition :

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \varepsilon$.

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue en t_0

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \varepsilon$.

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \varepsilon$.

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux continues en t_0.

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \;\Rightarrow\; \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \varepsilon$.

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux continues en t_0.

En d'autres termes,

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \Rightarrow \| \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) \| < \varepsilon$.

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux continues en t_0.

En d'autres termes, si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0)$

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \;\Rightarrow\; \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \varepsilon$.

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux continues en t_0.

En d'autres termes, si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0)$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y(t_0)$.

Continuité

ii) Notion de continuité

Définition : $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 si

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tel que $|t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)\| < \varepsilon$.

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux continues en t_0.

En d'autres termes, si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0)$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y(t_0)$.

Ceci est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

iii) Notion de Dérivée

Définition :

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ en t_0

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ en t_0 et on le note

$$\dot{\vec{r}}(t_0)$$

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ en t_0 et on le note

$$\dot{\vec{r}}(t_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}.$$

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ en t_0 et on le note

$$\dot{\vec{r}}(t_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}. \qquad \dot{\vec{r}}(t_0)$$

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si $\lim_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ en t_0 et on le note

$$\dot{\vec{r}}(t_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}. \qquad \dot{\vec{r}}(t_0) = \left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}$$

Dérivabilité

iii) Notion de Dérivée

Définition : $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$ existe.

Cette limite s'appelle le vecteur dérivé de $\vec{r}(t)$ en t_0 et on le note

$$\dot{\vec{r}}(t_0) \quad \text{ou} \quad \left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_{t_0}. \qquad \dot{\vec{r}}(t_0) = \left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_{t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}.$$

Dérivabilité

Proposition :

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux dérivables en t_0 et on a :

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux dérivables en t_0 et on a :

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux dérivables en t_0 et on a :

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux dérivables en t_0 et on a :

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux dérivables en t_0 et on a :

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\begin{pmatrix} x(t_0+h) \\ y(t_0+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} \right]$$

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux dérivables en t_0 et on a :

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\begin{pmatrix} x(t_0+h) \\ y(t_0+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} x(t_0+h) - x(t_0) \\ y(t_0+h) - y(t_0) \end{pmatrix}$$

Dérivabilité

Proposition : La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi les fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont toutes les deux dérivables en t_0 et on a :

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Démonstration :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\begin{pmatrix} x(t_0+h) \\ y(t_0+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} x(t_0+h) - x(t_0) \\ y(t_0+h) - y(t_0) \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \\ \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \end{pmatrix}.$$

Dérivabilité

Or cette limite existe

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h} \quad \text{existe,} \quad \text{si et seulement si}$$

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} \quad \text{existe,} \quad \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$$

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} \quad \text{existe,} \quad \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \quad \text{existent.}$$

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} \ \text{ existe, } \ \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \ \text{ existent.}$$

En d'autres termes,

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h} \quad \text{existe, } \ \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \quad \text{existent.}$$

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h} \text{ existe, } \text{ si et seulement si}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h} \text{ existent.}$$

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi $x(t)$ et $y(t)$ le sont.

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} \quad \text{existe, } \; \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \quad \text{existent.}$$

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi $x(t)$ et $y(t)$ le sont.

Et $\dot{\vec{r}}(t_0)$

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} \quad \text{existe, si et seulement si}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \quad \text{existent.}$$

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi $x(t)$ et $y(t)$ le sont.

Et $\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} \ \text{ existe, } \ \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \ \text{ existent.}$$

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi $x(t)$ et $y(t)$ le sont.

Et $\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \\ \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \end{pmatrix}$

Dérivabilité

Or cette limite existe si et seulement si les limites des fonctions scalaires existent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} \ \text{ existe, } \ \text{si et seulement si}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \ \text{ existent.}$$

En d'autres termes, $\vec{r}(t)$ est dérivable en t_0 ssi $x(t)$ et $y(t)$ le sont.

Et $\quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \\ \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}. \quad \square$

Dérivabilité

Interprétation géométrique :

Dérivabilité

Interprétation géométrique :

$$\frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$$

Dérivabilité

Interprétation géométrique :

$\frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$ est un vecteur directeur de la sécante passant par les points $M(t_0)$ et $M(t_0+h)$ de la trajectoire Γ.

Dérivabilité

Interprétation géométrique :

$\frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$ est un vecteur directeur de la sécante passant par les points $M(t_0)$ et $M(t_0+h)$ de la trajectoire Γ.

Lorsque $h \to 0$,

Dérivabilité

Interprétation géométrique :

$\frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$ est un vecteur directeur de la sécante passant par les points $M(t_0)$ et $M(t_0+h)$ de la trajectoire Γ.

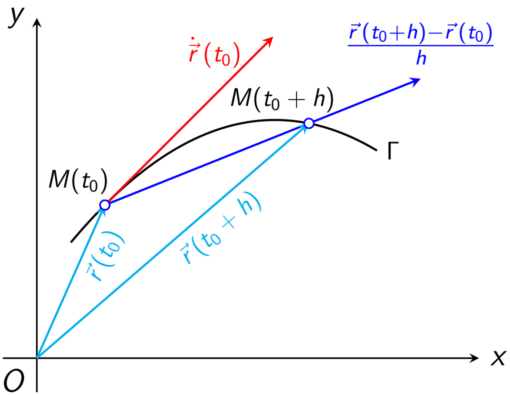
Lorsque $h \to 0$, ce vecteur tend vers le vecteur dérivé $\dot{\vec{r}}(t_0)$.

Dérivabilité

Interprétation géométrique :

$\frac{\vec{r}\,(t_0+h)-\vec{r}\,(t_0)}{h}$ est un vecteur directeur de la sécante passant par les points $M(t_0)$ et $M(t_0+h)$ de la trajectoire Γ.

Lorsque $h \to 0$, ce vecteur tend vers le vecteur dérivé $\dot{\vec{r}}\,(t_0)$.



Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$,

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}\,(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$,

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) \neq \vec{0}\,,\ \ \dot{\vec{r}}\,(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)\,.$

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}\,,\ (\dot{x}(t_0) \neq 0)\,.$

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$,

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) \neq \vec{0}\,,\;\; \dot{\vec{r}}\,(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)\,.$

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}\,,\; (\dot{x}(t_0) \neq 0)\,.$

Si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) = \vec{0}\,,$ alors un vecteur directeur de la tangente est donné par

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}(t_0)$,

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}(t_0)$, ($\vec{r}^{\,(3)}(t_0)$ si $\ddot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}\,(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) = \vec{0}$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}\,(t_0)$, ($\vec{r}^{\,(3)}\,(t_0)$ si $\ddot{\vec{r}}\,(t_0) = \vec{0}$, etc ...).

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) \neq \vec{0}\,$, $\dot{\vec{r}}\,(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)\,$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}\,,\ (\dot{x}(t_0) \neq 0)\,$.

Si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) = \vec{0}\,$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}\,(t_0)\,$, ($\vec{r}^{\,(3)}\,(t_0)$ si $\ddot{\vec{r}}\,(t_0) = \vec{0}$, etc ...). Ceci résulte de la remarque suivante.

Si $\dot{\vec{r}}\,(t_0) = \vec{0}\,$,

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}(t_0)$, ($\vec{r}^{\,(3)}(t_0)$ si $\ddot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, etc ...). Ceci résulte de la remarque suivante.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, la pente de la tangente est donnée par $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$,

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}(t_0)$, ($\vec{r}^{\,(3)}(t_0)$ si $\ddot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, etc ...). Ceci résulte de la remarque suivante.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, la pente de la tangente est donnée par $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$" :

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}(t_0)$, ($\vec{r}^{\,(3)}(t_0)$ si $\ddot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, etc ...). Ceci résulte de la remarque suivante.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, la pente de la tangente est donnée par $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$" : $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

Dérivabilité

Donc si $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

La pente de la tangente est donc donnée par $m = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $(\dot{x}(t_0) \neq 0)$.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, alors un vecteur directeur de la tangente est donné par $\ddot{\vec{r}}(t_0)$, ($\vec{r}^{\,(3)}(t_0)$ si $\ddot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, etc ...). Ceci résulte de la remarque suivante.

Si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$, la pente de la tangente est donnée par $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$" : $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\ddot{y}(t)}{\ddot{x}(t)} \cdots$