Chapitre 5.

Variation locale d'une fonction

Chapitre 5.
Variation locale d'une fonction

6. Règle de Bernoulli - de l'Hospital

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

Jean Bernoulli
(1667 - 1748)

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

Jean Bernoulli
(1667 - 1748)

Guillaume de l'Hospital
(1661 - 1704)

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH)

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples :

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples : $\ast \ \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$,

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples : $\ast\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples : $\ast$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

$\ast$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$,

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples :

* $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"
* $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$, forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples :

* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$, forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$, forme indéterminée de type $"\frac{\infty}{\infty}"$
* $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$,

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples :

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$, forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$, forme indéterminée de type "$0 \times \infty$"

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples :

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$, forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$, forme indéterminée de type $"\frac{\infty}{\infty}"$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$, forme indéterminée de type $"0 \times \infty"$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$,

Règle de Bernoulli - de l'Hospital

La règle de de Bernoulli - de l'Hospital (BH) est un outil puissant permettant de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Par exemples :

* $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$, forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"
* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$, forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"
* $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$, forme indéterminée de type "$0 \times \infty$"
* $\lim_{x \to 0^+} x^x$, si on a défini convenablement la fonction x^x .

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Théorème :

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, telles que

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, telles que

$*$ $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

Forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, telles que

$*$ $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $\left[\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est donc une forme indéterminée de type } "\frac{0}{0}"\right]$.

Forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, telles que

$*$ $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $\left[\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est donc une forme indéterminée de type } "\frac{0}{0}"\right]$.

$*$ $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé de x_0.

Forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ "

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, telles que

* $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $\left[\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est donc une forme indéterminée de type } "\frac{0}{0}" \right]$.

* $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé de x_0.

Alors si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, telles que

$*$ $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $\left[\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est donc une forme indéterminée de type } "\frac{0}{0}"\right]$.

$*$ $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé de x_0.

Alors si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini,

Forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, telles que

* $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $\left[\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est donc une forme indéterminée de type } "\frac{0}{0}"\right]$.

* $g(x) \neq 0$ et $g'(x) \neq 0$ sur un voisinage épointé de x_0.

Alors si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0.

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0.

On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x_0 + h) \cdot g(x) - g(x_0 + h) \cdot f(x)$.

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0.

On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x_0 + h) \cdot g(x) - g(x_0 + h) \cdot f(x)$.

$d(x_0) = 0$

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0.

On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x_0 + h) \cdot g(x) - g(x_0 + h) \cdot f(x)$.

$d(x_0) = 0$ et $d(x_0 + h) = 0$,

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0.

On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x_0+h)\cdot g(x) - g(x_0+h)\cdot f(x)$.

$d(x_0) = 0$ et $d(x_0 + h) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle,

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0.

On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x_0+h) \cdot g(x) - g(x_0+h) \cdot f(x)$.

$d(x_0) = 0$ et $d(x_0 + h) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, $\exists\, \vartheta \in \left]0\,,\,1\right[$ tel que $d'(x_0 + \vartheta\, h) = 0$.

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0 .

On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x_0+h) \cdot g(x) - g(x_0+h) \cdot f(x)$.

$d(x_0) = 0$ et $d(x_0 + h) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, $\exists\, \vartheta \in \,]\,0\,,\,1\,[$ tel que $d'(x_0 + \vartheta\, h) = 0$.

Or $d'(x) = f(x_0 + h) \cdot g'(x) - g(x_0 + h) \cdot f'(x)$,

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Démonstration :

Soit h suffisamment petit tel que $x_0 + h$ soit dans le voisinage épointé de x_0.

On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x_0+h) \cdot g(x) - g(x_0+h) \cdot f(x)$.

$d(x_0) = 0$ et $d(x_0 + h) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, $\exists\, \vartheta \in \,]\,0\,,\,1\,[$ tel que $d'(x_0 + \vartheta\, h) = 0$.

Or $d'(x) = f(x_0 + h) \cdot g'(x) - g(x_0 + h) \cdot f'(x)$, donc
$d'(x_0 + \vartheta\, h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0 + h) \cdot g'(x_0 + \vartheta\, h) - g(x_0 + h) \cdot f'(x_0 + \vartheta\, h) = 0$.

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Or $g(x)$ et $g'(x)$ sont non nuls sur un voisinage épointé de x_0 , on a donc

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Or $g(x)$ et $g'(x)$ sont non nuls sur un voisinage épointé de x_0 , on a donc

$$f(x_0 + h) \cdot g'(x_0 + \vartheta\, h) = g(x_0 + h) \cdot f'(x_0 + \vartheta\, h) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \vartheta\, h)}{g'(x_0 + \vartheta\, h)}\,.$$

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Or $g(x)$ et $g'(x)$ sont non nuls sur un voisinage épointé de x_0, on a donc

$$f(x_0+h)\cdot g'(x_0+\vartheta\,h) = g(x_0+h)\cdot f'(x_0+\vartheta\,h) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\vartheta\,h)}{g'(x_0+\vartheta\,h)}\,.$$

Et en passant à la limite, lorsque $h \to 0$:

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Or $g(x)$ et $g'(x)$ sont non nuls sur un voisinage épointé de x_0, on a donc

$$f(x_0+h)\cdot g'(x_0+\vartheta\, h) = g(x_0+h)\cdot f'(x_0+\vartheta\, h) \iff \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\vartheta\, h)}{g'(x_0+\vartheta\, h)}\,.$$

Et en passant à la limite, lorsque $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+\vartheta\, h)}{g'(x_0+\vartheta\, h)}\,,$$

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Or $g(x)$ et $g'(x)$ sont non nuls sur un voisinage épointé de x_0, on a donc

$$f(x_0+h)\cdot g'(x_0+\vartheta\,h) = g(x_0+h)\cdot f'(x_0+\vartheta\,h) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+\vartheta\,h)}{g'(x_0+\vartheta\,h)}\,.$$

Et en passant à la limite, lorsque $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+\vartheta\,h)}{g'(x_0+\vartheta\,h)}\,,\quad \text{ou}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.\qquad \square$$

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Remarque :

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Remarque : Ce résultat reste valable lorsque $x \to \infty$.

Théorème :

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Remarque : Ce résultat reste valable lorsque $x \to \infty$.

Théorème :

Soient f et g dérivables sur un voisinage de l'infini,

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Remarque : Ce résultat reste valable lorsque $x \to \infty$.

Théorème :

Soient f et g dérivables sur un voisinage de l'infini, telles que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0\,.$$

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Remarque : Ce résultat reste valable lorsque $x \to \infty$.

Théorème :

Soient f et g dérivables sur un voisinage de l'infini, telles que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0\,.$$

Alors si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini,

Forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$"

Remarque : Ce résultat reste valable lorsque $x \to \infty$.

Théorème :

Soient f et g dérivables sur un voisinage de l'infini, telles que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0\,.$$

Alors si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Soient f g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0 ,

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Soient f g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, $(x_0$ fini ou infini$)$

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Soient f g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, (x_0 fini ou infini) et telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Soient f g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, (x_0 fini ou infini) et telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Alors si $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini,

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Soient f g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0 , $(x_0$ fini ou infini) et telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Alors si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Soient f g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0 , (x_0 fini ou infini) et telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.
Alors si $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

L'idée de la démonstration est de se ramener à la situation précédente

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

Théorème :

Soient f g deux fonctions dérivables sur un voisinage de x_0, (x_0 fini ou infini) et telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.
Alors si $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

L'idée de la démonstration est de se ramener à la situation précédente en écrivant $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous la forme $\dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L\,,$

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, ($L$ fini ou infini).

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, ($L$ fini ou infini).

Alors $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L\,,$ (L fini ou infini).

Alors $\displaystyle L = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Et en utilisant la règle de Bernoulli - de l'Hospital :

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, ($L$ fini ou infini).

Alors $\displaystyle L = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Et en utilisant la règle de Bernoulli - de l'Hospital : $\displaystyle L \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$.

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, ($L$ fini ou infini).

Alors $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Et en utilisant la règle de Bernoulli - de l'Hospital : $L \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$.

Et si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini,

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, ($L$ fini ou infini).

Alors $\displaystyle L = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Et en utilisant la règle de Bernoulli - de l'Hospital : $\displaystyle L \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$.

Et si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $\displaystyle L = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f^2(x)}{g^2(x)}$

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, ($L$ fini ou infini).

Alors $\displaystyle L = \lim_{x\to x_0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Et en utilisant la règle de Bernoulli - de l'Hospital : $\displaystyle L \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$.

Et si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $\displaystyle L = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f^2(x)}{g^2(x)}$

$$\Rightarrow \quad L = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot L^2$$

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, ($L$ fini ou infini).

Alors $L = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Et en utilisant la règle de Bernoulli - de l'Hospital : $L \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$.

Et si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $L = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^2(x)}{g^2(x)}$

$$\Rightarrow \quad L = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot L^2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{L}$$

Forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$"

On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L\,,$ (L fini ou infini).

Alors $L = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1/g(x)}{1/f(x)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Et en utilisant la règle de Bernoulli - de l'Hospital : $L \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)}$.

Et si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infini, on a $L = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f^2(x)}{g^2(x)}$

$$\Rightarrow \quad L = \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot L^2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

Exemples

Exemples

1) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée :

Exemples

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty\,.$

Exemples

1) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Mais attention !

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Mais attention ! $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{[\ln(x)]'}{[x]'}$

Exemples

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Mais attention ! $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln(x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1}$

Exemples

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty\,.$

Mais attention ! $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{[\,\ln(x)\,]'}{[\,x\,]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty\,.$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Mais attention ! $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[\,\ln(x)\,]'}{[\,x\,]'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{1} = +\infty$.

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Mais attention ! $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{[\ln(x)]'}{[x]'} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1/x}{1} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty\,.$

Mais attention ! $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[\,\ln(x)\,]'}{[\,x\,]'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{1} = +\infty\,.$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ n'est pas une forme indéterminée :

Exemples

1) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty\,.$

Mais attention ! $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{[\ln(x)]'}{[x]'}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{1}=+\infty\,.$

2) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}=0\,.$

Exemples

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty\,.$

Mais attention ! $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{[\,\ln(x)\,]'}{[\,x\,]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty\,.$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0\,.$

Et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\right]'}{[\,\ln(x)\,]'}$

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Mais attention ! $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{[\ln(x)]'}{[x]'} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1/x}{1} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$.

Et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]'}{[\ln(x)]'} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Mais attention ! $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[\ln(x)]'}{[x]'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{1} = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ n'est pas une forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$.

Et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]'}{[\ln(x)]'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Exemples

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty\,.$

Mais attention ! $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln(x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty\,.$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0\,.$

Et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]'}{[\ln(x)]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Exemples

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty\,.$

Mais attention ! $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln(x)]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1} = +\infty\,.$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ n'est pas une forme indéterminée : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0\,.$

Et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]'}{[\ln(x)]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Il est essentiel de vérifier les hypothèses de la règle de Bernoulli - de l'Hospital avant de l'utiliser.

Exemples

Exemples

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x}$$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2}$$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$

Exemples

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

Exemples

3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x}$$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x}$ qui est toujours une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ",

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ",

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x}$ qui est toujours une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ",

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2}$$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x}$ qui est toujours une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty\,,$$

Exemples

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x^2)}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$",

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x^2)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{2/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x}$ qui est toujours une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$",

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} \overset{\text{BH}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty\,.$

Exemples

Exemples

5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Exemples

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Exemples

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1}$$

Exemples

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

Exemples

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

Exemples

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type $''\frac{0}{0}''$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$

Exemples

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type $"0 \times \infty"$.

Exemples

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type "$0 \times \infty$". On se ramène à une forme "$\frac{0}{0}$"

Exemples

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type $"0 \times \infty"$. On se ramène à une forme $"\frac{0}{0}"$ ou $"\frac{\infty}{\infty}"$

Exemples

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type "$0 \times \infty$". On se ramène à une forme "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" en passant un des deux facteurs au dénominateur :

Exemples

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type $"\frac{0}{0}"$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type $"0\times\infty"$. On se ramène à une forme $"\frac{0}{0}"$ ou $"\frac{\infty}{\infty}"$ en passant un des deux facteurs au dénominateur :

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x}$$

Exemples

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type "$0 \times \infty$". On se ramène à une forme "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" en passant un des deux facteurs au dénominateur :

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

Exemples

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type "$0 \times \infty$". On se ramène à une forme "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" en passant un des deux facteurs au dénominateur :

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x$$

Exemples

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1\,.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x)$ est une forme indéterminée de type "$0 \times \infty$". On se ramène à une forme "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" en passant un des deux facteurs au dénominateur :

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0\,.$$

Fonction puissance généralisée

Définition :

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0$, $\forall x \in D$,

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D. Si $u(x) > 0\,,\ \forall\, x \in D\,,$ on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0\,,\ \forall\, x \in D\,,$ on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$
par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln[\,u(x)\,]}\,, \quad x \in D\,.$$

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0\,,\ \forall\, x \in D\,,$ on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$
par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln[\,u(x)\,]}\,, \quad x \in D\,.$$

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0$, $\forall x \in D$, on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln[\,u(x)\,]}, \quad x \in D.$$

7) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0$, $\forall\, x \in D$, on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln[\,u(x)\,]}\,, \quad x \in D\,.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)}$

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0\,,\ \forall\, x \in D\,,$ on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln[\,u(x)\,]}\,, \quad x \in D\,.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[\,x\cdot\ln(x)\,]}\,,$

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0$, $\forall\, x \in D$, on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln[\,u(x)\,]}, \quad x \in D.$$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[\,x\cdot\ln(x)\,]}$, car l'exponentielle est continue.

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0$, $\forall\, x \in D$, on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln[\,u(x)\,]}, \quad x \in D\,.$$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[\,x\cdot\ln(x)\,]}$, car l'exponentielle est continue.

Et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln(x) = 0$,

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0$, $\forall\, x \in D$, on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot\ln[\,u(x)\,]}, \quad x \in D\,.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[\,x\cdot\ln(x)\,]}$, car l'exponentielle est continue.

Et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln(x)}$

Fonction puissance généralisée

Définition : Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur un domaine D.
Si $u(x) > 0$, $\forall\, x \in D$, on définit la fonction puissance généralisée $[\,u(x)\,]^{v(x)}$ par

$$[\,u(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\cdot \ln[\,u(x)\,]}\,, \quad x \in D\,.$$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot \ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}[\,x\cdot \ln(x)\,]}$, car l'exponentielle est continue.

Et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot \ln(x)} = e^0 = 1$.

Exemples

Encore un exemple :

Exemples

Encore un exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$

Exemples

Encore un exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x}$.

Exemples

Encore un exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x}$.

Montrons que les hypothèses de la règle de Bernoulli-de l'Hospital sont vérifiées :

Exemples

Encore un exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x}$.

Montrons que les hypothèses de la règle de Bernoulli-de l'Hospital sont vérifiées :

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x^3}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(1/x^2)}_{\text{borné}} = 0$$

Exemples

Encore un exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x}$.

Montrons que les hypothèses de la règle de Bernoulli-de l'Hospital sont vérifiées :

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x^3}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(1/x^2)}_{\text{borné}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} = 1\,,$$

Exemples

Encore un exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x}$.

Montrons que les hypothèses de la règle de Bernoulli-de l'Hospital sont vérifiées :

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x^3}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(1/x^2)}_{\text{borné}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} = 1\,,$$

car la fonction exponentielle est continue.

Exemples

Encore un exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x}$.

Montrons que les hypothèses de la règle de Bernoulli-de l'Hospital sont vérifiées :

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{x^3}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(1/x^2)}_{\text{borné}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} = 1 ,$$

car la fonction exponentielle est continue.

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ est une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$".

Suite de l'exemple

Posons $N(x) = e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1$ et $D(x) = x$:

Suite de l'exemple

Posons $N(x) = e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1$ et $D(x) = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)}$$

Suite de l'exemple

Posons $N(x) = e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1$ et $D(x) = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[3x^2 \cdot \sin(1/x^2) + x^3 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) \cdot \cos(1/x^2)\right] \cdot e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}{1}$$

Suite de l'exemple

Posons $N(x) = e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1$ et $D(x) = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[3x^2 \cdot \sin(1/x^2) + x^3 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) \cdot \cos(1/x^2)\right] \cdot e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}{1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{3x^2 \cdot \sin(1/x^2)}_{\to 0} - \underbrace{2 \cos(1/x^2)}_{\text{diverge}} \right] \cdot \underbrace{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}_{\to 1} .$$

Suite de l'exemple

Posons $N(x) = e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1$ et $D(x) = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[3x^2 \cdot \sin(1/x^2) + x^3 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) \cdot \cos(1/x^2)\right] \cdot e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}{1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{3x^2 \cdot \sin(1/x^2)}_{\to 0} - \underbrace{2 \cos(1/x^2)}_{\text{diverge}} \right] \cdot \underbrace{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}_{\to 1} .$$

Cette limite n'existe pas,

Suite de l'exemple

Posons $N(x) = e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1$ et $D(x) = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[3x^2 \cdot \sin(1/x^2) + x^3 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) \cdot \cos(1/x^2)\right] \cdot e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}{1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\, \underbrace{3x^2 \cdot \sin(1/x^2)}_{\to 0} - \underbrace{2\,\cos(1/x^2)}_{\text{diverge}} \,\right] \cdot \underbrace{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}_{\to 1} .$$

Cette limite n'existe pas, on ne peux donc rien dire quand à la convergence de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

Suite de l'exemple

Posons $N(x) = e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1$ et $D(x) = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{N'(x)}{D'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[3x^2 \cdot \sin(1/x^2) + x^3 \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) \cdot \cos(1/x^2)\right] \cdot e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}{1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{3x^2 \cdot \sin(1/x^2)}_{\to 0} - \underbrace{2 \cos(1/x^2)}_{\text{diverge}} \right] \cdot \underbrace{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)}}_{\to 1} .$$

Cette limite n'existe pas, on ne peux donc rien dire quand à la convergence de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

La règle de Bernoulli-de l'Hospital ne s'applique donc pas dans ce cas précis.

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,,$$

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0$$

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Remarque :

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \,, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \,.$$

Remarque : on aurait aussi pu montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ de la façon suivante :

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Remarque : on aurait aussi pu montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ de la façon suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Remarque : on aurait aussi pu montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ de la façon suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = [e^x]' \Big|_{x=0}$$

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Remarque : on aurait aussi pu montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ de la façon suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = [e^x]' \Big|_{x=0} = e^x \Big|_{x=0}$$

Suite de l'exemple

Mais alors, comment étudier cette limite ?

Nous avons montré dans l'exemple **5)** que $e^x - 1$ et x sont des infiniment petits équivalents au voisinage de $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} x = 0\,, \quad \lim_{x \to 0} \left(e^x - 1\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Remarque : on aurait aussi pu montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ de la façon suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \left[e^x\right]' \Big|_{x=0} = e^x \Big|_{x=0} = 1\,.$$

Suite de l'exemple

On en déduit la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$:

Suite de l'exemple

On en déduit la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x}$$

Suite de l'exemple

On en déduit la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} - 1}{x \cdot x^2 \cdot \sin(1/x^2)} \cdot x^2 \cdot \sin(1/x^2)$$

Suite de l'exemple

On en déduit la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)} - 1}{x \cdot x^2 \cdot \sin(1/x^2)} \cdot x^2 \cdot \sin(1/x^2)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)} - 1}{x^3 \cdot \sin(1/x^2)} \cdot x^2 \cdot \sin(1/x^2) = 0\,,$$

Suite de l'exemple

On en déduit la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x\cdot x^2\cdot\sin(1/x^2)}\cdot x^2\cdot\sin(1/x^2)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x^3\cdot\sin(1/x^2)}\cdot x^2\cdot\sin(1/x^2) = 0\,,$$

car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x^3\cdot\sin(1/x^2)} = 1$

Suite de l'exemple

On en déduit la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x\cdot x^2\cdot\sin(1/x^2)}\cdot x^2\cdot\sin(1/x^2)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x^3\cdot\sin(1/x^2)}\cdot x^2\cdot\sin(1/x^2) = 0\,,$$

car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\sin(1/x^2)}-1}{x^3\cdot\sin(1/x^2)} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \underbrace{x^2}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sin(1/x^2)}_{\text{borné}} = 0\,.$

Présentation sommaire des fonctions trigonométriques hyperboliques.

Présentation sommaire des fonctions trigonométriques hyperboliques.

Ces fonctions seront étudiées dans le cadre du cours d'Analyse 2.

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,,$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x\,, \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

Parité :

Les fonctions $\sinh$ et $\tanh$ sont impaires, $\cosh$ est paire.

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\ \cosh y + \cosh x\ \sinh y\,,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x\ \cosh y + \sinh x\ \sinh y\,,$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\ \tanh y}\,.$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2}\,, \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2}\,,$$

$$\tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}\,.$$

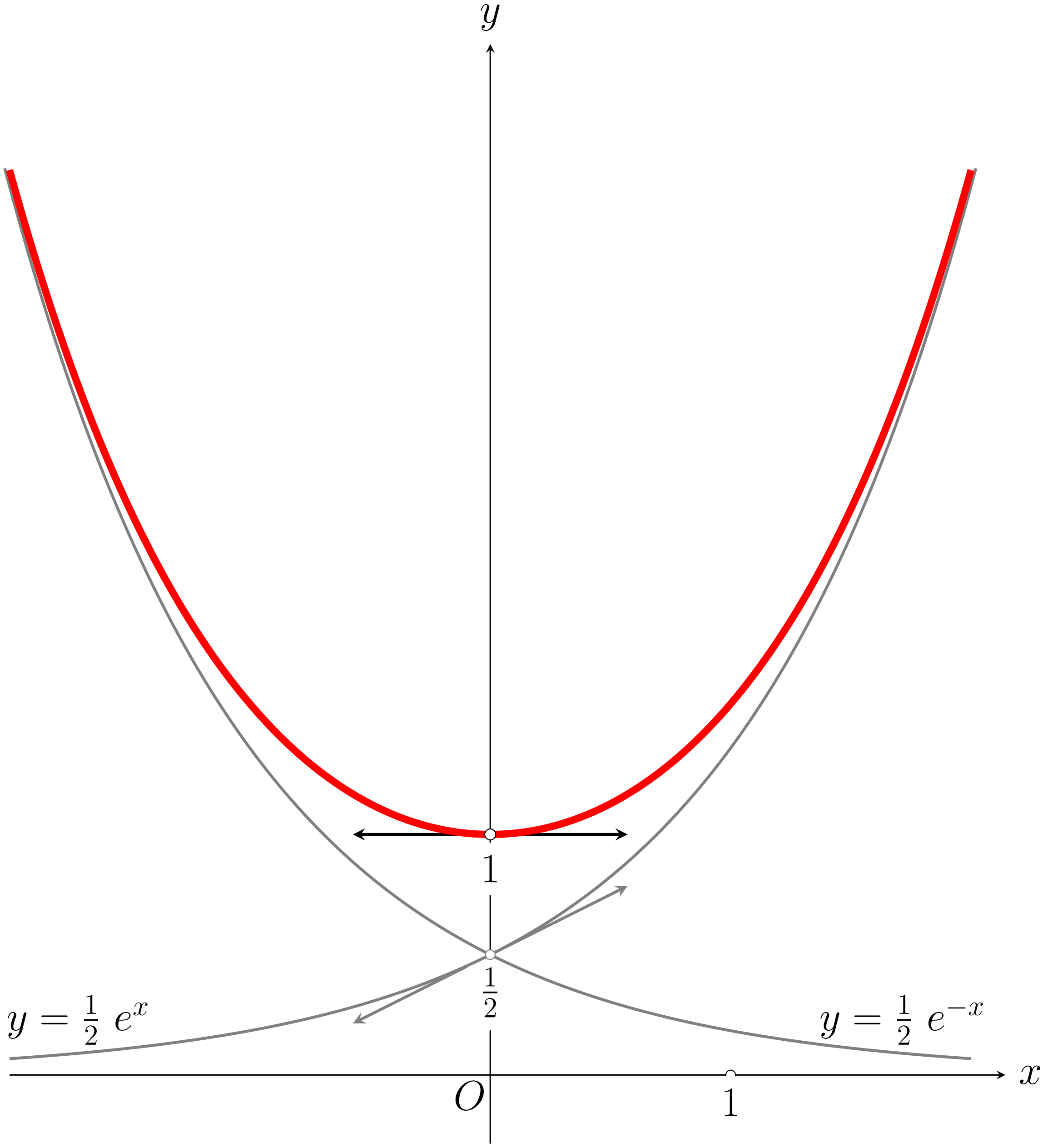
Dérivées :

$$\sinh' x = \cosh x\,, \qquad \cosh' x = \sinh x\,,$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\,.$$

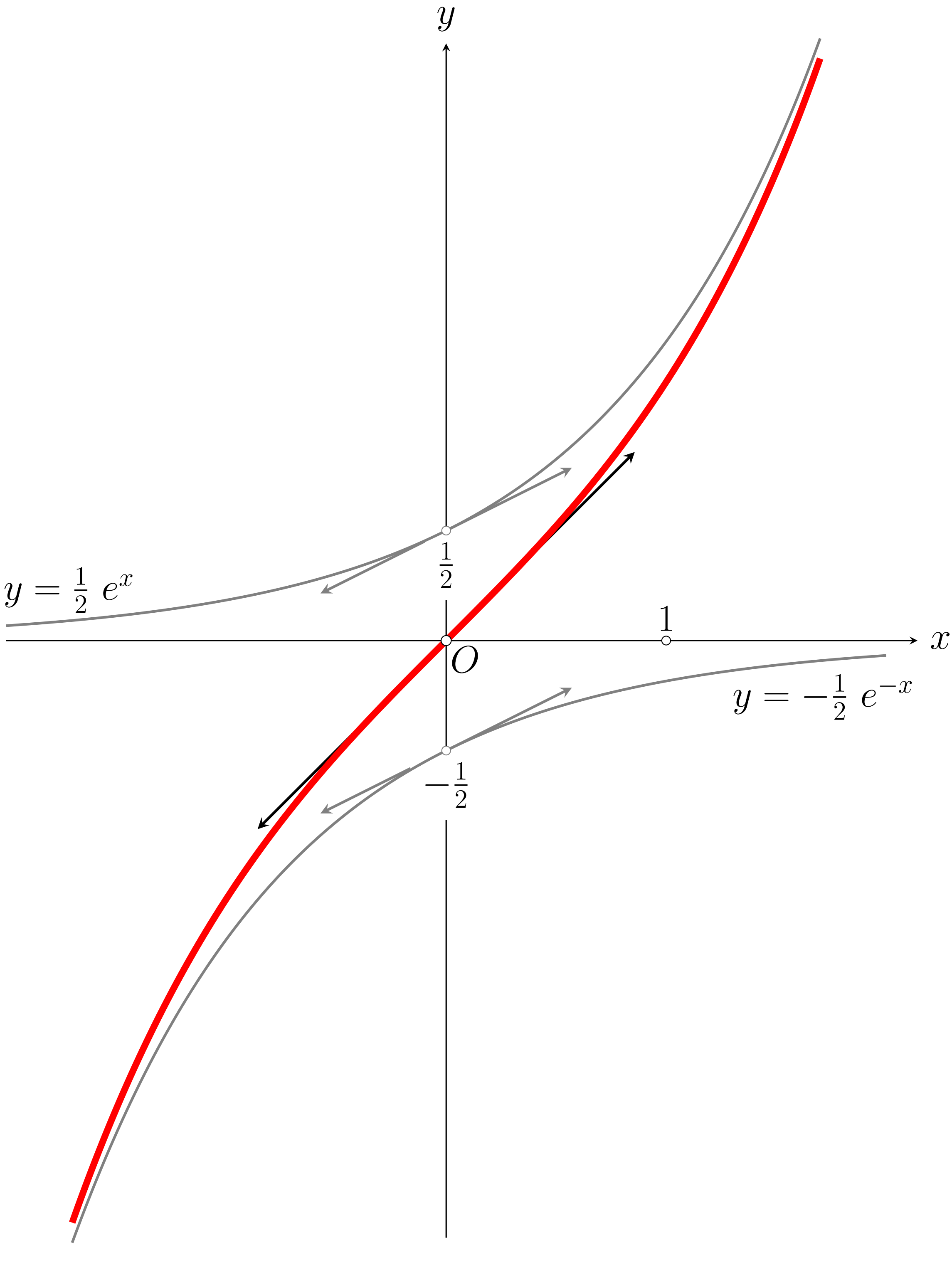
Cosinus hyperbolique

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

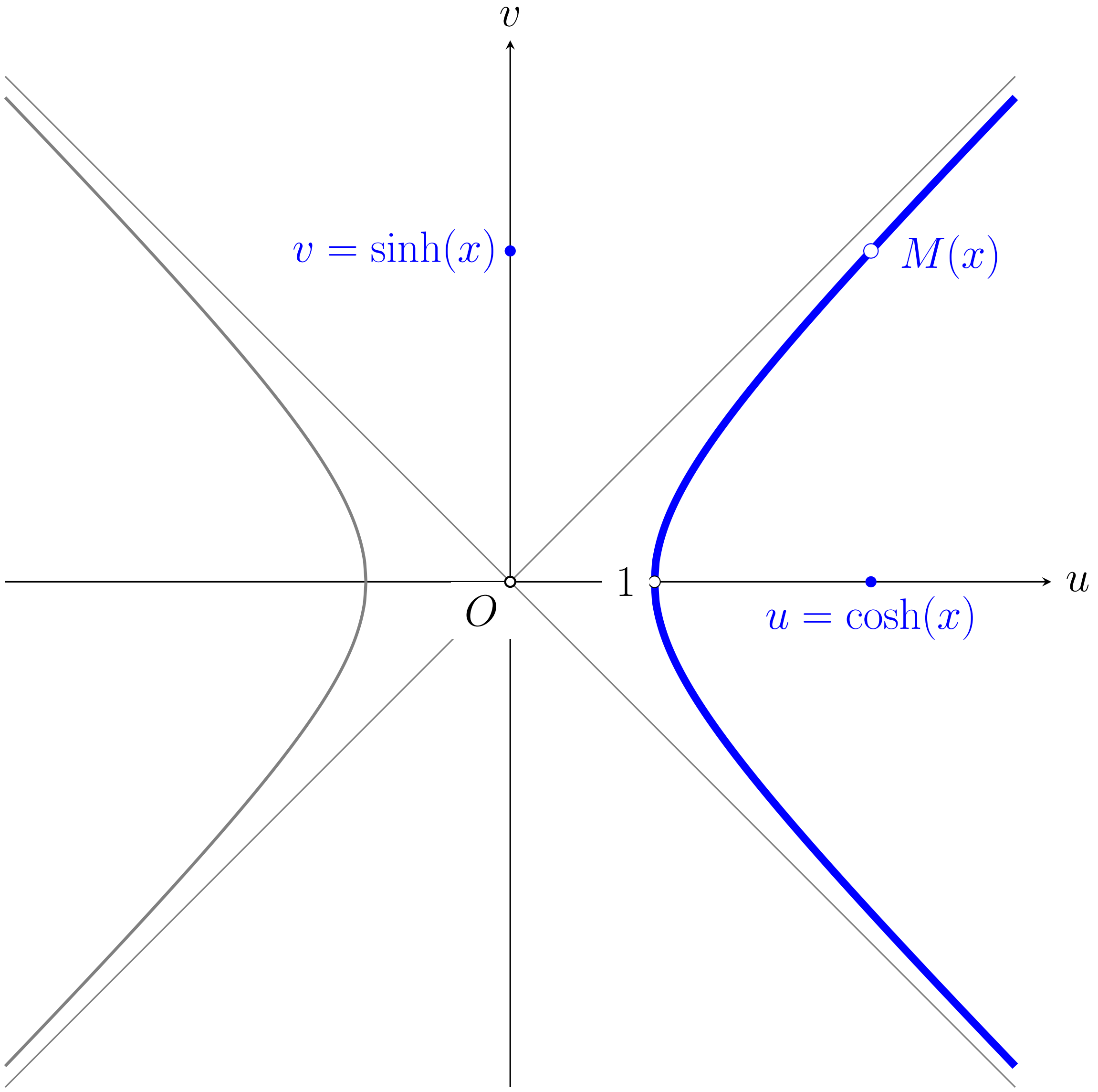


Sinus hyperbolique

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

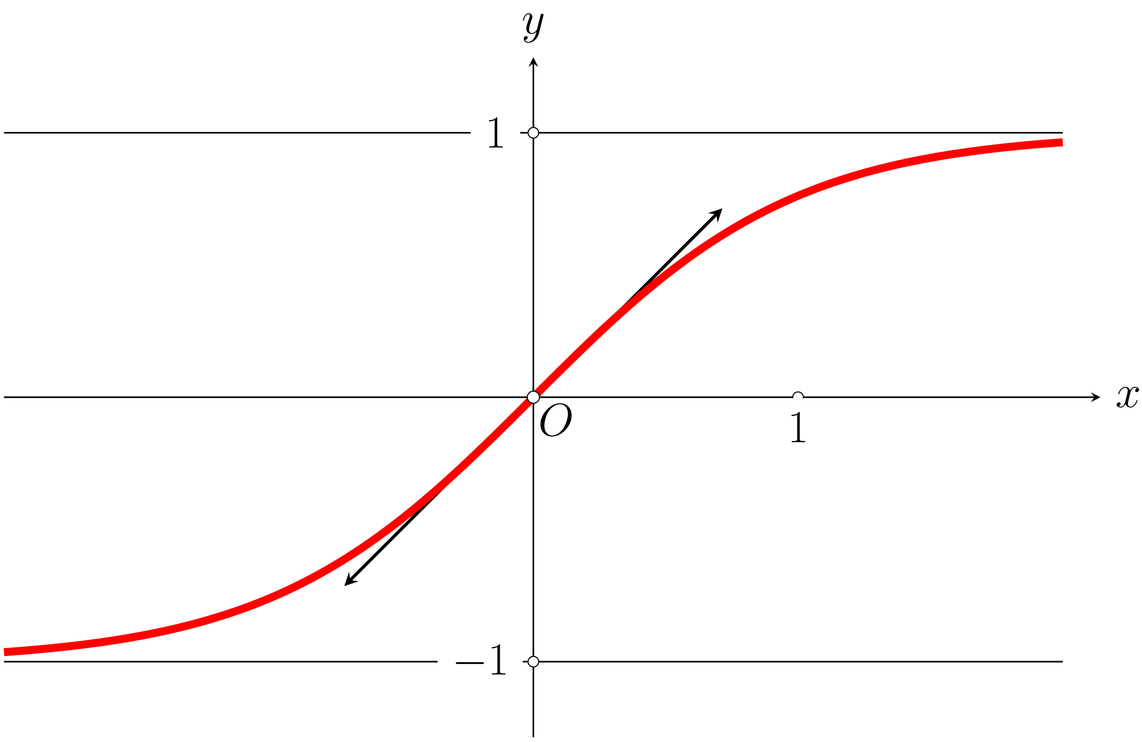


Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques peuvent être décrites comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point qui parcourt l'arc d'hyperbole d'équation $u^2 - v^2 = 1\,, \quad u \geq 0\,.$

D'où leur dénomination et leur analogie avec les fonctions cosinus et sinus circulaires.

Tangente hyperbolique

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1\,.$$