# Chapitre 7. Calcul Intégral

# Chapitre 7. Calcul Intégral

## 1. L'intégrale définie

# 1. L'intégrale définie

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$.

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$,

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[\,a\,,\,b\,]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$,

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.

L'aire analytique de ce domaine

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.

L'aire analytique de ce domaine
est définie positive si $f(x) \geq 0$

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

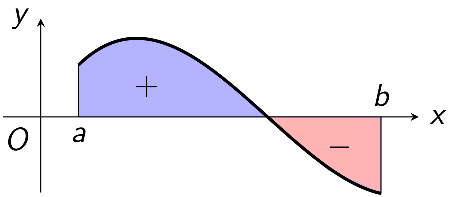
Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.

L'aire analytique de ce domaine
est définie positive si $f(x) \geq 0$
et négative si $f(x) \leq 0$.

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.

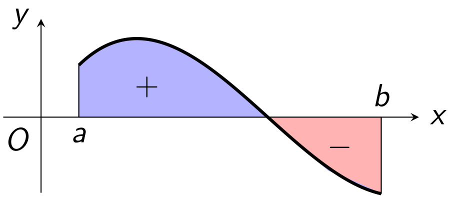
L'aire analytique de ce domaine est définie positive si $f(x) \geq 0$ et négative si $f(x) \leq 0$.



## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.

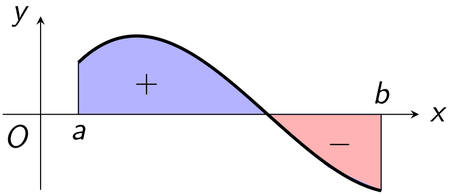
L'aire analytique de ce domaine est définie positive si $f(x) \geq 0$ et négative si $f(x) \leq 0$.




On cherche à déterminer,

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[a, b]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.



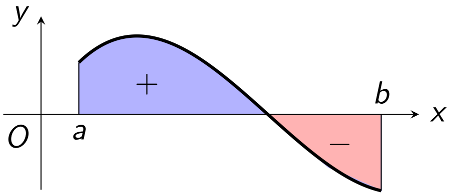

L'aire analytique de ce domaine est définie positive si $f(x) \geq 0$ et négative si $f(x) \leq 0$.

On cherche à déterminer, à définir,

## 1.1 Somme de Riemann et intégrale définie

Soit $f$ continue sur $[\,a\,,\,b\,]$, $a < b$. On considère le domaine $D$ du plan, limité par $y = 0$, $y = f(x)$, $x = a$ et $x = b$.

L'aire analytique de ce domaine est définie positive si $f(x) \geq 0$ et négative si $f(x) \leq 0$.




On cherche à déterminer, à définir, l'aire analytique du domaine $D$.

# Somme de Riemann

Pour cela,

# Somme de Riemann

Pour cela,

- on partage l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$

# Somme de Riemann

Pour cela,

- on partage l'intervalle $[a\,,\,b]$ de façon arbitraire

# Somme de Riemann

Pour cela,

- on partage l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$ de façon arbitraire en $n$ intervalles $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$, $1 \leq k \leq n$ :

# Somme de Riemann

Pour cela,

- on partage l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$ de façon arbitraire en $n$ intervalles $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$, $1 \leq k \leq n$ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\,,$$

# Somme de Riemann

Pour cela,

- on partage l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$ de façon arbitraire en $n$ intervalles $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$, $1 \leq k \leq n$ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\,,$$

- puis on choisit arbitrairement une abscisse $t_k$ $(1 \leq k \leq n)$ dans chaque intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ de la partition.

# Somme de Riemann

Pour cela,

- on partage l'intervalle $[a\,,\,b]$ de façon arbitraire en $n$ intervalles $[x_{k-1}\,,\,x_k]$, $1 \leq k \leq n$ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\,,$$

- puis on choisit arbitrairement une abscisse $t_k$ $(1 \leq k \leq n)$ dans chaque intervalle $[x_{k-1}\,,\,x_k]$ de la partition.

Et on construit sur chaque intervalle $[x_{k-1}\,,\,x_k]$

# Somme de Riemann

Pour cela,

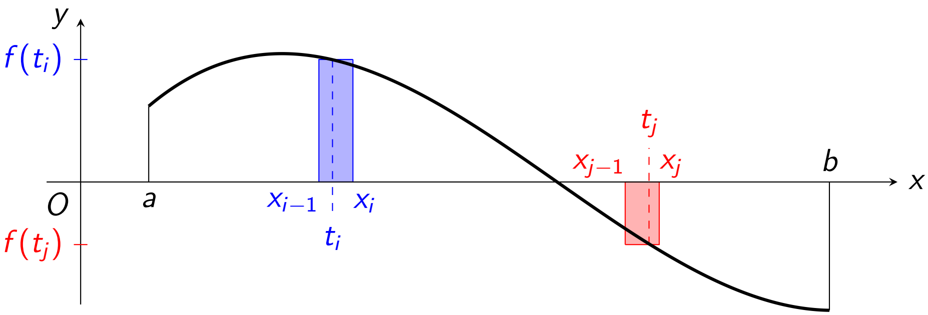
- on partage l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$ de façon arbitraire en $n$ intervalles $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$, $1 \leq k \leq n$ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\,,$$

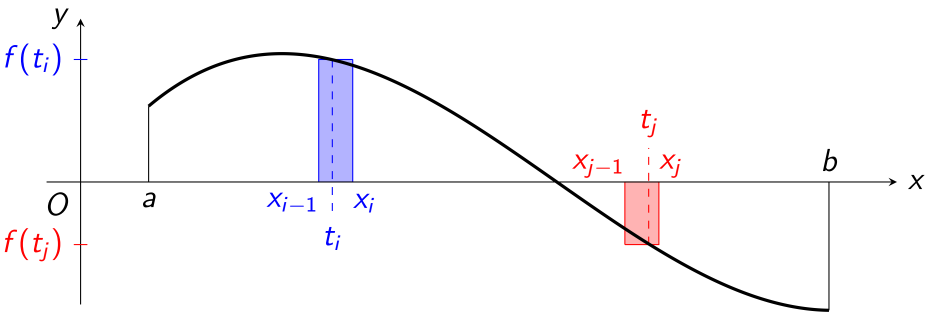
- puis on choisit arbitrairement une abscisse $t_k$ $(1 \leq k \leq n)$ dans chaque intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ de la partition.

Et on construit sur chaque intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ un rectangle de "hauteur analytique" $f(t_k)$, $1 \leq k \leq n$.

# Somme de Riemann

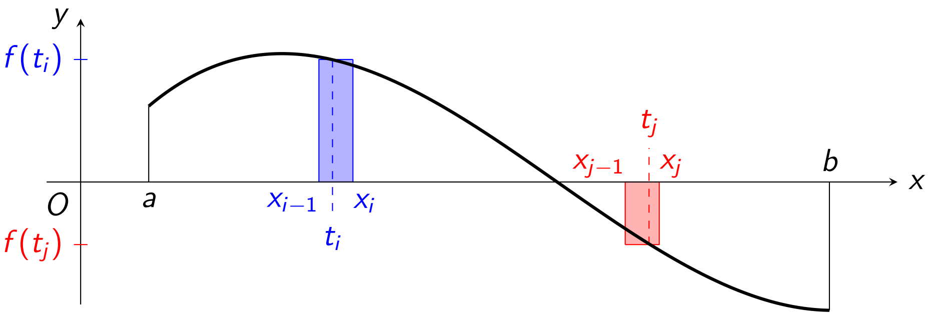


# Somme de Riemann



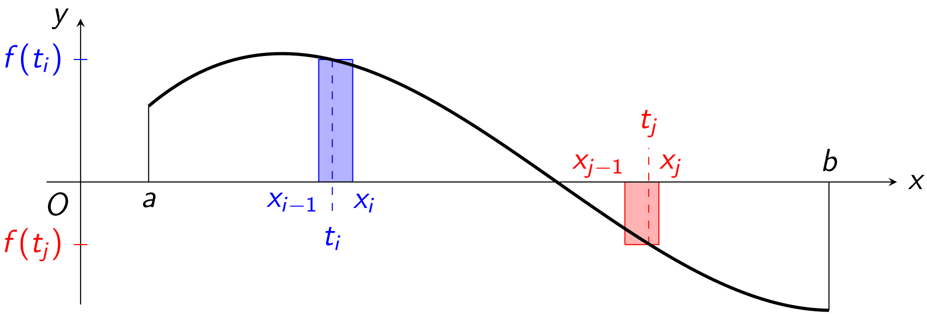

La somme $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$

# Somme de Riemann




La somme $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ , $(1 \leq k \leq n)$ ,

# Somme de Riemann




La somme $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $(1 \leq k \leq n)$, représente la somme des aires analytiques des domaines rectangulaires.

# Somme de Riemann

C'est une approximation de l'aire cherchée,

# Somme de Riemann

C'est une approximation de l'aire cherchée, d'autant plus précise que les $\Delta x_k$ sont petits.

# Somme de Riemann

C'est une approximation de l'aire cherchée, d'autant plus précise que les $\Delta x_k$ sont petits.

**Définition** :

# Somme de Riemann

C'est une approximation de l'aire cherchée, d'autant plus précise que les $\Delta x_k$ sont petits.

**Définition** : La somme $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$

# Somme de Riemann

C'est une approximation de l'aire cherchée, d'autant plus précise que les $\Delta x_k$ sont petits.

**Définition** : La somme $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ est appelée Somme de Riemann de $f$ sur $[a, b]$.

# Somme de Riemann

C'est une approximation de l'aire cherchée, d'autant plus précise que les $\Delta x_k$ sont petits.

**Définition** : La somme $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ est appelée Somme de Riemann de $f$ sur $[a, b]$.

Cette somme dépend du partage de $[a, b]$

# Somme de Riemann

C'est une approximation de l'aire cherchée, d'autant plus précise que les $\Delta x_k$ sont petits.

**Définition** : La somme $\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ est appelée Somme de Riemann de $f$ sur $[a, b]$.

Cette somme dépend du partage de $[a, b]$ et du choix de $t_k$ dans chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann,

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann, les sommes de Darboux :

Pour une partition donnée de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, on définit

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann, les sommes de Darboux :

Pour une partition donnée de l'intervalle $[a, b]$, on définit

- la somme de Darboux inférieure :

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann, les sommes de Darboux :

Pour une partition donnée de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, on définit

- la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$$

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann, les sommes de Darboux :

Pour une partition donnée de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, on définit

- la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{où} \quad m_k \ \text{est le min de } f \text{ sur } [\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$$

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann, les sommes de Darboux :

Pour une partition donnée de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, on définit

- la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{où} \quad m_k \ \text{est le min de } f \text{ sur } [\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$$

- la somme de Darboux supérieure :

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann, les sommes de Darboux :

Pour une partition donnée de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, on définit

- la somme de Darboux inférieure :

  $s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$ où $m_k$ est le min de $f$ sur $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$

- la somme de Darboux supérieure :

  $S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$

# Somme de Darboux

Cas particulier des sommes de Riemann, les sommes de Darboux :

Pour une partition donnée de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, on définit

- la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \quad \text{où} \quad m_k \ \text{ est le min de } f \text{ sur } [\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$$

- la somme de Darboux supérieure :

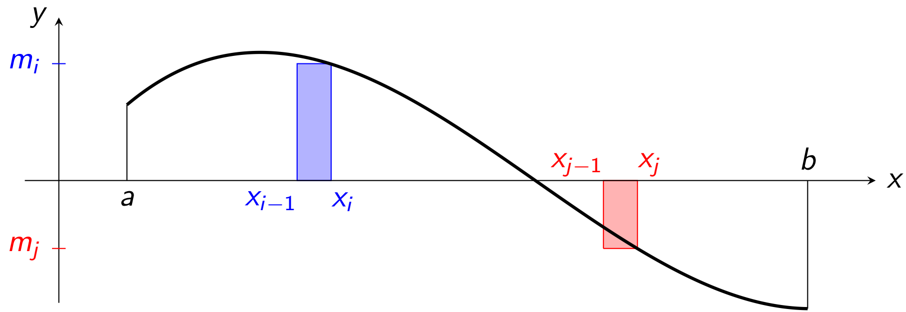
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \quad \text{où} \quad M_k \ \text{ est le max de } f \text{ sur } [\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$$

# Somme de Darboux

Somme de Darboux inférieure

# Somme de Darboux

Somme de Darboux inférieure

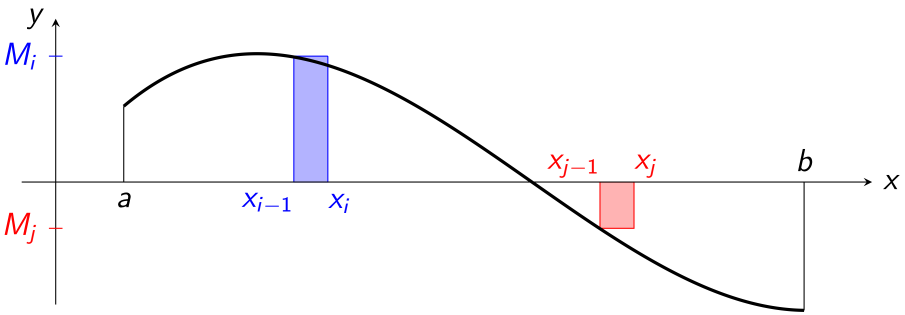


# Somme de Darboux

Somme de Darboux supérieure

# Somme de Darboux

Somme de Darboux supérieure



# Intégrale de Riemann

**Définition** :

# Intégrale de Riemann

**Définition** : Si pour $n \to \infty$, tous les $\Delta x_k \to 0$

# Intégrale de Riemann

**Définition** : Si pour $n \to \infty$, tous les $\Delta x_k \to 0$ et si $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ existe

# Intégrale de Riemann

**Définition** : Si pour $n \to \infty$, tous les $\Delta x_k \to 0$ et si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ existe indépendemment du choix des $x_k$

# Intégrale de Riemann

**Définition** : Si pour $n \to \infty$, tous les $\Delta x_k \to 0$ et si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ existe indépendamment du choix des $x_k$ et des $t_k$,

# Intégrale de Riemann

**Définition** : Si pour $n \to \infty$, tous les $\Delta x_k \to 0$ et si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ existe indépendemment du choix des $x_k$ et des $t_k$, alors $f$ est dite intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann.

# Intégrale de Riemann

**Définition** : Si pour $n \to \infty$, tous les $\Delta x_k \to 0$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ existe indépendamment du choix des $x_k$ et des $t_k$, alors $f$ est dite intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann.

Cette limite est appelée l'intégrale définie de $f$ sur $[a, b]$.

# Intégrale de Riemann

**Définition** : Si pour $n \to \infty$, tous les $\Delta x_k \to 0$ et si $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$ existe indépendemment du choix des $x_k$ et des $t_k$, alors $f$ est dite intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann.

Cette limite est appelée l'intégrale définie de $f$ sur $[a, b]$.

On la note $\int_a^b f(x)\, dx$.

# Intégrale de Riemann

L'intégrale définie de $f$ sur $[a, b]$

# Intégrale de Riemann

L'intégrale définie de $f$ sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

# Intégrale de Riemann

L'intégrale définie de $f$ sur $[\,a\,,\,b\,]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$

# Intégrale de Riemann

L'intégrale définie de $f$ sur $[\,a\,,\,b\,]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k$$

est par définition la mesure de l'aire

analytique du domaine $D$

# Intégrale de Riemann

L'intégrale définie de $f$ sur $[\,a\,,\,b\,]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$

est par définition la mesure de l'aire

analytique du domaine $D$ limité par

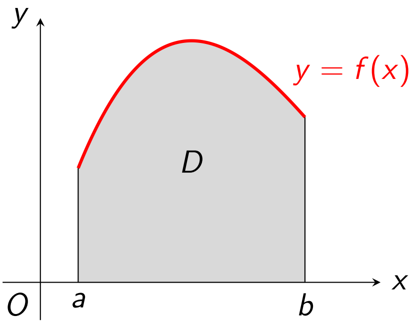
$y = 0\,,\;\; y = f(x)\,,\;\; x = a$ et $x = b\,.$

# Intégrale de Riemann

L'intégrale définie de $f$ sur $[\,a\,,\,b\,]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k$$

est par définition la mesure de l'aire analytique du domaine $D$ limité par $y=0\,,\;\; y=f(x)\,,\;\; x=a$ et $x=b\,.$



# Théorème

Une question importante reste en suspend :

# Théorème

Une question importante reste en suspend :

Quelles sont les fonctions intégrables au sens de Riemann ?

# Théorème

Une question importante reste en suspend :

Quelles sont les fonctions intégrables au sens de Riemann ?

Une réponse très partielle à cette question difficile est donnée par le théorème suivant :

# Théorème

Une question importante reste en suspend :

Quelles sont les fonctions intégrables au sens de Riemann ?

Une réponse très partielle à cette question difficile est donnée par le théorème suivant :

**Théorème** :

# Théorème

Une question importante reste en suspend :

Quelles sont les fonctions intégrables au sens de Riemann ?

Une réponse très partielle à cette question difficile est donnée par le théorème suivant :

**Théorème** : Toute fonction continue sur $[a\,,\,b]$

# Théorème

Une question importante reste en suspend :

Quelles sont les fonctions intégrables au sens de Riemann ?

Une réponse très partielle à cette question difficile est donnée par le théorème suivant :

**Théorème** : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann.

# Exemple

Calculons les sommes de Darboux

inférieure

# Exemple

Calculons les sommes de Darboux
inférieure et supérieure

# Exemple

Calculons les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f(x) = x$

# Exemple

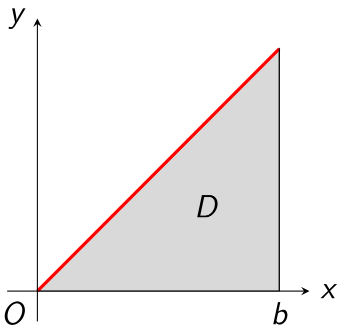
Calculons les sommes de Darboux
inférieure et supérieure de la fonction
$f(x) = x$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,b\,]$,

# Exemple

Calculons les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,b\,]$, associées à une partition régulière de $[\,0\,,\,b\,]$, $(b > 0)$.

# Exemple

Calculons les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,,\,b]$, associées à une partition régulière de $[0\,,\,b]$, $(b > 0)$.



# Exemple

Une partition régulière de $[0\,,\,b]$

# Exemple

Une partition régulière de $[\,0\,,\,b\,]$ consiste à partager cet intervalle en $n$ intervalles $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ de même longueurs.

# Exemple

Une partition régulière de $[\,0\,,\,b\,]$ consiste à partager cet intervalle en $n$ intervalles $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ de même longueurs.

Tous ces intervalles ont donc pour longueur $\Delta x_k = \dfrac{b}{n}\,, \quad 1 \leq k \leq n\,.$

# Exemple

Une partition régulière de $[0\,,\,b]$ consiste à partager cet intervalle en $n$ intervalles $[x_{k-1}\,,\,x_k]$ de même longueurs.

Tous ces intervalles ont donc pour longueur $\Delta x_k = \dfrac{b}{n}\,, \quad 1 \leq k \leq n\,.$

Et les abscisses $x_k$ ont pour expression

# Exemple

Une partition régulière de $[\,0\,,\,b\,]$ consiste à partager cet intervalle en $n$ intervalles $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ de même longueurs.

Tous ces intervalles ont donc pour longueur $\Delta x_k = \dfrac{b}{n}\,, \quad 1 \le k \le n\,.$

Et les abscisses $x_k$ ont pour expression

$$x_k = k \cdot \frac{b}{n}\,, \quad 1 \le k \le n\,.$$

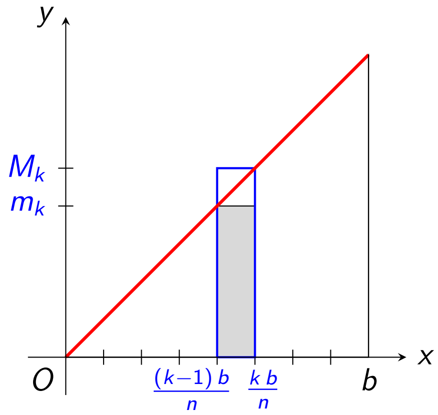
# Exemple

Une partition régulière de $[0\,,\,b]$ consiste à partager cet intervalle en $n$ intervalles $[x_{k-1}\,,\,x_k]$ de même longueurs.

Tous ces intervalles ont donc pour longueur $\Delta x_k = \dfrac{b}{n}\,,\quad 1 \le k \le n\,.$

Et les abscisses $x_k$ ont pour expression

$$x_k = k \cdot \frac{b}{n}\,,\quad 1 \le k \le n\,.$$



# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante,

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le $\min$ de $f$ sur $[x_{k-1}, x_k]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\frac{b}{n}$.

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le $\min$ de $f$ sur $[\, x_{k-1}\, ,\, x_k \,]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\,\frac{b}{n}$.

  On en déduit l'expression de la somme de Darboux inférieure :

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le $\min$ de $f$ sur $[x_{k-1}, x_k]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\frac{b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x_k$$

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le $\min$ de $f$ sur $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\,\frac{b}{n}$.

On en déduit l'expresion de la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\,\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n}$$

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le $\min$ de $f$ sur $[\, x_{k-1}\,,\, x_k\,]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\,\frac{b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[ (k-1)\,\frac{b}{n} \right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)\,,$$

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le min de $f$ sur $[x_{k-1}, x_k]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\frac{b}{n}$.

On en déduit l'expresion de la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1),$$

$$s_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j$$

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le $\min$ de $f$ sur $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\,\frac{b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\,\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)\,,$$

$$s_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\,n}{2}$$

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le $\min$ de $f$ sur $[\, x_{k-1} \,,\, x_k \,]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\,\frac{b}{n}$.

  On en déduit l'expression de la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[ (k-1)\,\frac{b}{n} \right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)\,,$$

$$s_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n^2 - n}{n^2}$$

# Exemple

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f(x) = x$ étant strictement croissante, le min de $f$ sur $[x_{k-1}\,,\,x_k]$ est atteint en $x_{k-1} = (k-1)\,\frac{b}{n}$.

  On en déduit l'expression de la somme de Darboux inférieure :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\,\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)\,,$$

$$s_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{b^2}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{n}\right].$$

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son max sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son max sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux supérieure :

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son $\max$ sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta x_k$$

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son max sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[k\,\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n}$$

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son max sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[k\,\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k\,,$$

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son max sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[k\,\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k\,,$$

$$S_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2}$$

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son max sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[k\,\frac{b}{n}\right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k\,,$$

$$S_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n^2+n}{n^2}$$

# Exemple

- Somme de Darboux supérieure

  La fonction $f(x) = x$ atteint son max sur $[x_{k-1}, x_k]$ en $x_k = \frac{k\,b}{n}$.

  On en déduit l'expresion de la somme de Darboux supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left[ k\,\frac{b}{n} \right] \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k\,,$$

$$S_n = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{b^2}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{n} \right].$$

# Exemple

- Conclusion :

# Exemple

- Conclusion :

  Ces deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur

# Exemple

- Conclusion :

  Ces deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur $\dfrac{b^2}{2}$.

# Exemple

- Conclusion :

  Ces deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur $\dfrac{b^2}{2}$ .

  Ce n'est pas une surprise car la fonction $f(x) = x$ est continue,

# Exemple

- Conclusion :

  Ces deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur $\dfrac{b^2}{2}$.

  Ce n'est pas une surprise car la fonction $f(x) = x$ est continue, donc intégrable au sens de Riemann.

# Exemple

- Conclusion :

  Ces deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur $\dfrac{b^2}{2}$.

  Ce n'est pas une surprise car la fonction $f(x) = x$ est continue, donc intégrable au sens de Riemann.

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}\,.$$

# Propriétés de l'intégrale définie

Quelques conséquences de la définition :

# Propriétés de l'intégrale définie

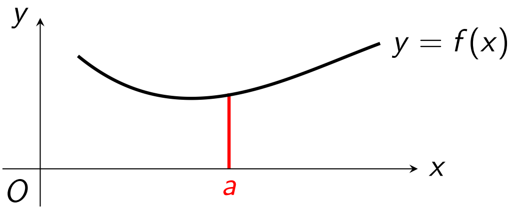
Quelques conséquences de la définition :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

# Propriétés de l'intégrale définie

Quelques conséquences de la définition :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$



# Propriétés de l'intégrale définie

- $\int_a^b f(x)\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

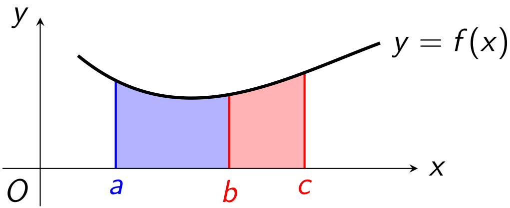
- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$



# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier :

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$$

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$$

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

# Propriétés de l'intégrale définie

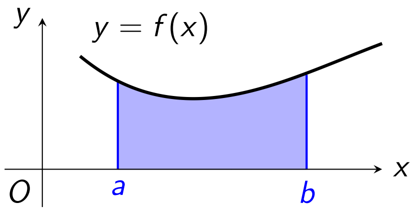
Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

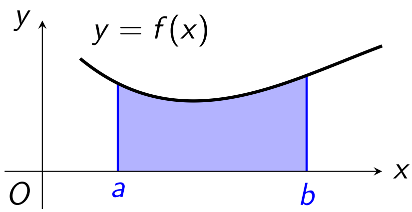



Sur cet exemple,

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

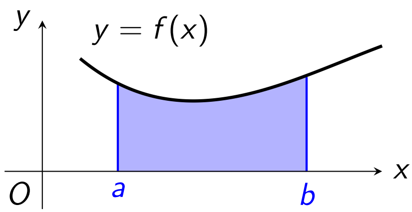



Sur cet exemple, $\int_b^a f(x)\,dx$ est négative

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

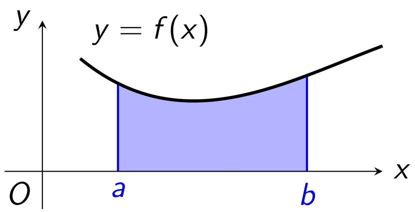



Sur cet exemple, $\int_b^a f(x)\,dx$ est négative car les $\Delta x_k$ des partitions permettant de décrire le cheminement de $b$ vers $a$

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

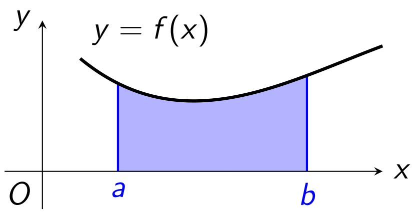



Sur cet exemple, $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ est négative car les $\Delta x_k$ des partitions permettant de décrire le cheminement de $b$ vers $a$ sont tous négatifs.

# Propriétés de l'intégrale définie

Cas particulier : en posant $c = a$ dans l'identité précédente, on obtient

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$




Sur cet exemple, $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ est négative car les $\Delta x_k$ des partitions permettant de décrire le cheminement de $b$ vers $a$ sont tous négatifs. Les aires analytiques des domaines rectangulaires sont donc négatives.

# Propriétés de l'intégrale définie

- $\displaystyle\int_a^b [\,f(x) + g(x)\,]\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

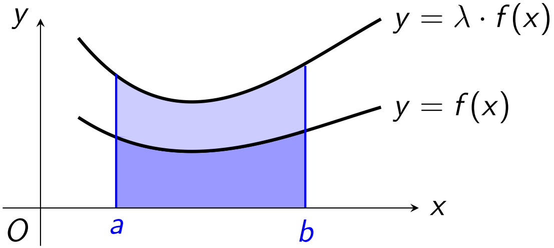
- $\displaystyle\int_a^b [\, f(x) + g(x)\,]\; dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
- et $\displaystyle\int_a^b \lambda \cdot f(x)\, dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
- et $\displaystyle\int_a^b \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\, dx\,, \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$

# Propriétés de l'intégrale définie

- $\displaystyle\int_a^b [\,f(x)+g(x)\,]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- et $\displaystyle\int_a^b \lambda\cdot f(x)\,dx = \lambda\cdot\int_a^b f(x)\,dx\,,\quad (\lambda\in\mathbb{R})\,.$



# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $a < b$

# Propriétés de l'intégrale définie

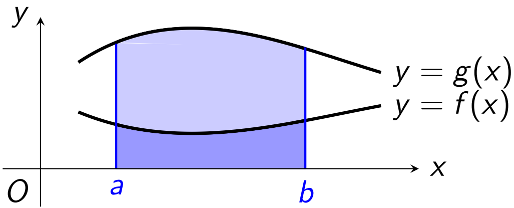
- Si $a < b$ et si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$,

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $a < b$ et si $f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [\,a\,,\; b\,]$, alors $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

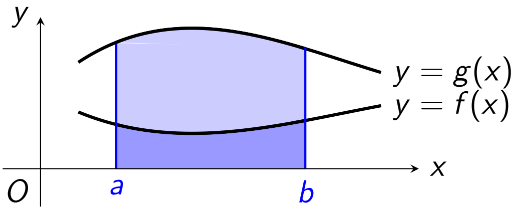
# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $a < b$ et si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.



# Propriétés de l'intégrale définie

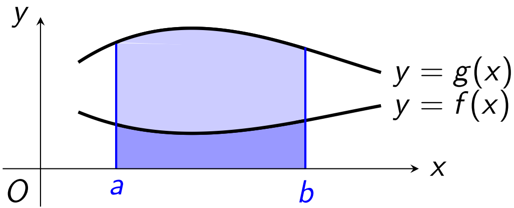
- Si $a < b$ et si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.




Attention :

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $a < b$ et si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, alors
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$




Attention : la réciproque est fausse !

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $a < b$

# Propriétés de l'intégrale définie

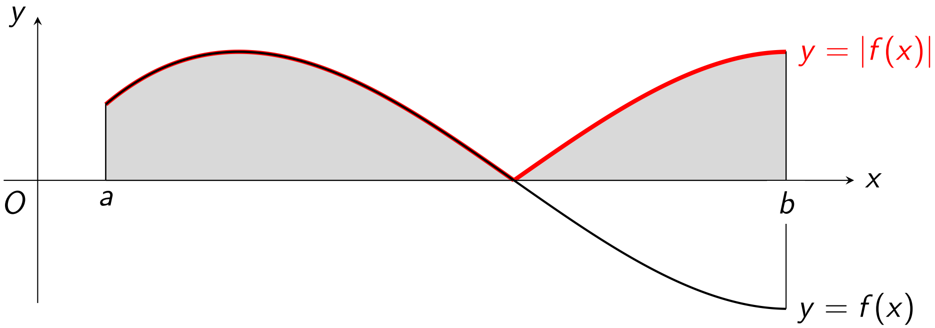
- Si $a < b$ alors $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $a < b$ alors $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\, f(x)\,|\, dx$ .

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $a < b$ alors $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\, f(x) \,|\, dx\,.$



# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\ a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\;a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$
- Si $f$ est impaire sur $[-a\,,\;a]$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$
- Si $f$ est impaire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$
- Si $f$ est impaire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$

**Exemples** :

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$

- Si $f$ est impaire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$

**Exemples** : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$
- Si $f$ est impaire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$

**Exemples** : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$

- Si $f$ est impaire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$

**Exemples** : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx$

# Propriétés de l'intégrale définie

- Si $f$ est paire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$
- Si $f$ est impaire sur $[-a\,,\,a]$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$

**Exemples** : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = 0\,.$

# Exemple

**Exemple** :

# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$

# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$.

# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

# Exemple

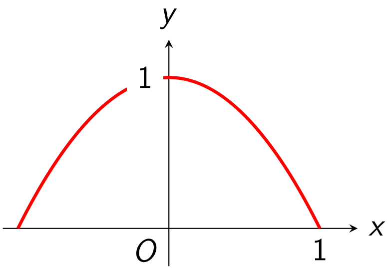
**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\, dx\,.$$

# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx\,.$$

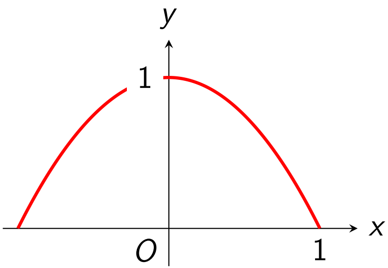


# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x)\, dx\,.$$

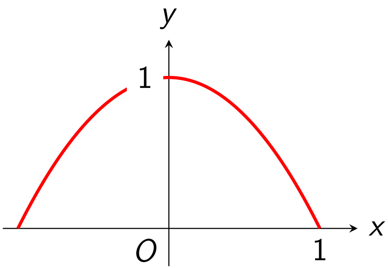
Pour calculer $A$,



# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\, dx\,.$$

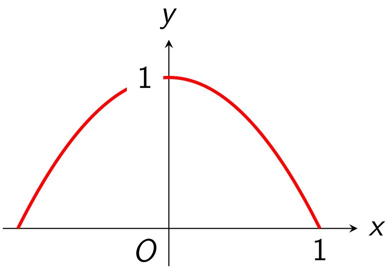



Pour calculer $A$, on construit les sommes de Darboux inférieure

# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx\,.$$

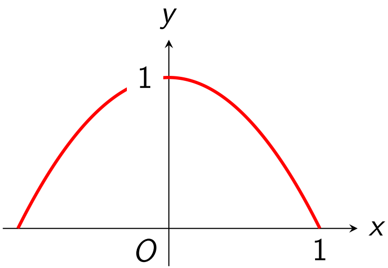



Pour calculer $A$, on construit les sommes de Darboux inférieure et supérieure

# Exemple

**Exemple** : Soient $f(x) = 1 - x^2$ et $A$ l'aire du domaine limité par le graphe de $f$ et l'axe $Ox$. Or $f$ est paire, on a donc

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{1} f(x)\, dx\,.$$



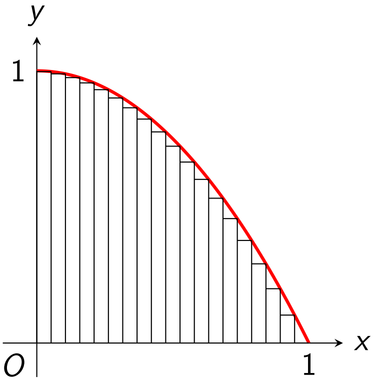

Pour calculer $A$, on construit les sommes de Darboux inférieure et supérieure de $f$ sur une partition régulière de l'intervalle $[0\,,\,1]$.

# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

# Somme de Darboux inférieure

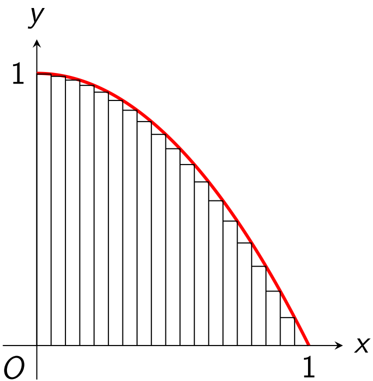
- Somme de Darboux inférieure



# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

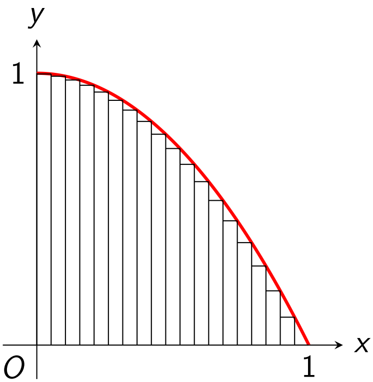
  La fonction $f$ étant décroissante sur $[0\,,\,1]$,



# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

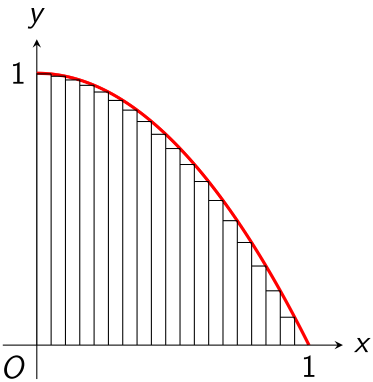
  La fonction $f$ étant décroissante sur $[\,0\,,\,1\,]$, la plus petite ordonnée sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$



# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f$ étant décroissante sur $[\,0\,,\,1\,]$, la plus petite ordonnée sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ est égale à $f(x_k)$.

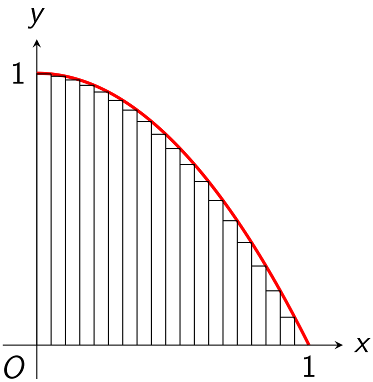


# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f$ étant décroissante sur $[\,0\,,\,1\,]$, la plus petite ordonnée sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ est égale à $f(x_k)$.

  $$\Delta x_k = \frac{1}{n}$$

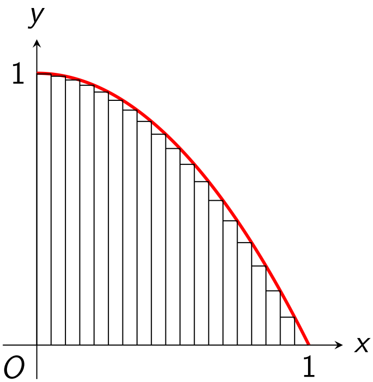


# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f$ étant décroissante sur $[\,0\,,\,1\,]$, la plus petite ordonnée sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ est égale à $f(x_k)$.

$$\Delta x_k = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_k = \frac{k}{n}\,, \quad 1 \leq k \leq n\,,$$



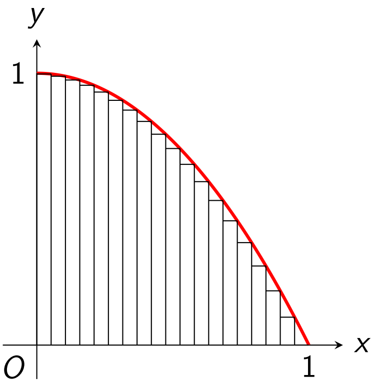
# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f$ étant décroissante sur $[\,0\,,\,1\,]$, la plus petite ordonnée sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$ est égale à $f\,(x_k)$.

  $$\Delta x_k = \frac{1}{n} \;\text{ et }\; x_k = \frac{k}{n}\,, \quad 1 \le k \le n\,,$$

  $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f\,(x_k) \qquad .$$



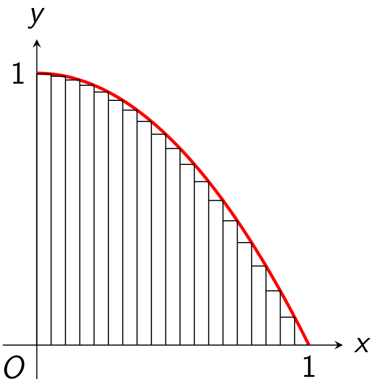
# Somme de Darboux inférieure

- Somme de Darboux inférieure

  La fonction $f$ étant décroissante sur $[0\,,\,1]$, la plus petite ordonnée sur l'intervalle $[x_{k-1}\,,\,x_k]$ est égale à $f(x_k)$.

$$\Delta x_k = \frac{1}{n} \text{ et } x_k = \frac{k}{n},\quad 1 \le k \le n\,,$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(x_k) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$



# Somme de Darboux inférieure

$$s_n \;=\; \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

# Somme de Darboux inférieure

$$s_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

# Somme de Darboux inférieure

$$s_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

# Somme de Darboux inférieure

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

# Somme de Darboux inférieure

$$s_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

# Somme de Darboux inférieure

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 .
\end{aligned}
$$

# Somme de Darboux inférieure

$$s_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la somme des carrés des $n$ premiers entiers consécutifs.

# Somme de Darboux inférieure

$$s_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{k}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la somme des carrés des $n$ premiers entiers consécutifs. Ouvrons une parenthèse pour calculer cette somme.

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers,

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n\,,$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, c'est une somme connue :

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, c'est une somme connue : $\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, c'est une somme connue : $\sigma_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.
* $\sigma_n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$,

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, c'est une somme connue : $\sigma_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.
* $\sigma_n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$, c'est la somme cherchée.

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ , c'est une somme connue : $\sigma_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ .
* $\sigma_n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$ , c'est la somme cherchée.
* $\sigma_n^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$ .

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, c'est une somme connue : $\sigma_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

* $\sigma_n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$, c'est la somme cherchée.

* $\sigma_n^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$.

Et nous allons déterminer $\sigma_n^2$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

Notons de la façon suivante la somme des $n$ premiers entiers, la somme des carrés des $n$ premiers entiers et la somme des cubes des $n$ premiers entiers :

* $\sigma_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, c'est une somme connue : $\sigma_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$.
* $\sigma_n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$, c'est la somme cherchée.
* $\sigma_n^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$.

Et nous allons déterminer $\sigma_n^2$ à partir du développement de $(n+1)^3$.

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$(n+1)^3 = n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1
\end{array}
$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1 \\
(n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + & 3\,(n-2)^2 & + & 3\,(n-2) & + & 1
\end{array}$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1 \\
(n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + & 3\,(n-2)^2 & + & 3\,(n-2) & + & 1 \\
(n-2)^3 & = & (n-3)^3 & + & 3\,(n-3)^2 & + & 3\,(n-3) & + & 1
\end{array}
$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1 \\
(n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + & 3\,(n-2)^2 & + & 3\,(n-2) & + & 1 \\
(n-2)^3 & = & (n-3)^3 & + & 3\,(n-3)^2 & + & 3\,(n-3) & + & 1 \\
\dots & & & & & & & &
\end{array}
$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1 \\
(n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + & 3\,(n-2)^2 & + & 3\,(n-2) & + & 1 \\
(n-2)^3 & = & (n-3)^3 & + & 3\,(n-3)^2 & + & 3\,(n-3) & + & 1 \\
\dots & & & & & & & & \\
(3)^3 & = & (2)^3 & + & 3\,(2)^2 & + & 3\,(2) & + & 1
\end{array}
$$

---

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1 \\
(n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + & 3\,(n-2)^2 & + & 3\,(n-2) & + & 1 \\
(n-2)^3 & = & (n-3)^3 & + & 3\,(n-3)^2 & + & 3\,(n-3) & + & 1 \\
\cdots & & & & & & & & \\
(3)^3 & = & (2)^3 & + & 3\,(2)^2 & + & 3\,(2) & + & 1 \\
(2)^3 & = & (1)^3 & + & 3\,(1)^2 & + & 3\,(1) & + & 1
\end{array}$$

---

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1 \\
(n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + & 3\,(n-2)^2 & + & 3\,(n-2) & + & 1 \\
(n-2)^3 & = & (n-3)^3 & + & 3\,(n-3)^2 & + & 3\,(n-3) & + & 1 \\
\dots & & & & & & & & \\
(3)^3 & = & (2)^3 & + & 3\,(2)^2 & + & 3\,(2) & + & 1 \\
(2)^3 & = & (1)^3 & + & 3\,(1)^2 & + & 3\,(1) & + & 1 \\
(1)^3 & = & (0)^3 & + & 3\,(0)^2 & + & 3\,(0) & + & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\,n^2 & + & 3\,n & + & 1 \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\,(n-1)^2 & + & 3\,(n-1) & + & 1 \\
(n-1)^3 & = & (n-2)^3 & + & 3\,(n-2)^2 & + & 3\,(n-2) & + & 1 \\
(n-2)^3 & = & (n-3)^3 & + & 3\,(n-3)^2 & + & 3\,(n-3) & + & 1 \\
\cdots & & & & & & & & \\
(3)^3 & = & (2)^3 & + & 3\,(2)^2 & + & 3\,(2) & + & 1 \\
(2)^3 & = & (1)^3 & + & 3\,(1)^2 & + & 3\,(1) & + & 1 \\
(1)^3 & = & (0)^3 & + & 3\,(0)^2 & + & 3\,(0) & + & 1 \\
\hline
\sigma^3_{n+1} & = & \sigma^3_n & + & 3\,\sigma^2_n & + & 3\,\sigma_n & + & (n+1)
\end{array}
$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3\,,$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3$, on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)$.

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3$, on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$

Et on en déduit l'expression de $\sigma_n^2$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3$, on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$

Et on en déduit l'expression de $\sigma_n^2$ car $\sigma_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ :

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3\,,$ on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$

Et on en déduit l'expression de $\sigma_n^2$ car $\sigma_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{3}\,[\,(n+1)^3 - 3\,\sigma_n - (n+1)\,]$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3$, on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)$.

Et on en déduit l'expression de $\sigma_n^2$ car $\sigma_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{3}\,[\,(n+1)^3 - 3\,\sigma_n - (n+1)\,] = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 3\,\frac{n\,(n+1)}{2} - (n+1)\right]$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3$, on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$

Et on en déduit l'expression de $\sigma_n^2$ car $\sigma_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{3}\left[\,(n+1)^3 - 3\,\sigma_n - (n+1)\,\right] = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 3\,\frac{n\,(n+1)}{2} - (n+1)\right]$$

$$\sigma_n^2 = \frac{n+1}{6}\left[\,2\,(n+1)^2 - 3n - 2\,\right]$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3$, on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$

Et on en déduit l'expression de $\sigma_n^2$ car $\sigma_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{3}\,[\,(n+1)^3 - 3\,\sigma_n - (n+1)\,] = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 3\;\frac{n\,(n+1)}{2} - (n+1)\right]$$

$$\sigma_n^2 = \frac{n+1}{6}\,[\,2\,(n+1)^2 - 3n - 2\,] = \frac{n+1}{6}\,[\,2n^2 + n\,]$$

# Somme des carrés des $n$ premiers entiers

$$\sigma_{n+1}^3 = \sigma_n^3 + 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$$

Or $\sigma_{n+1}^3 - \sigma_n^3 = (n+1)^3$, on a donc $(n+1)^3 = 3\,\sigma_n^2 + 3\,\sigma_n + (n+1)\,.$

Et on en déduit l'expression de $\sigma_n^2$ car $\sigma_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{3}\,[\,(n+1)^3 - 3\,\sigma_n - (n+1)\,] = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 3\,\frac{n\,(n+1)}{2} - (n+1)\right]$$

$$\sigma_n^2 = \frac{n+1}{6}\,[\,2\,(n+1)^2 - 3n - 2\,] = \frac{n+1}{6}\,[\,2n^2 + n\,] = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,.$$

# Somme de Darboux inférieure

Et en revenant à la somme de Darboux inférieure, on obtient

# Somme de Darboux inférieure

Et en revenant à la somme de Darboux inférieure, on obtient

$$s_n \;=\; 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$$

# Somme de Darboux inférieure

Et en revenant à la somme de Darboux inférieure, on obtient

$$s_n \;=\; 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

# Somme de Darboux inférieure

Et en revenant à la somme de Darboux inférieure, on obtient

$$s_n = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$

# Somme de Darboux inférieure

Et en revenant à la somme de Darboux inférieure, on obtient

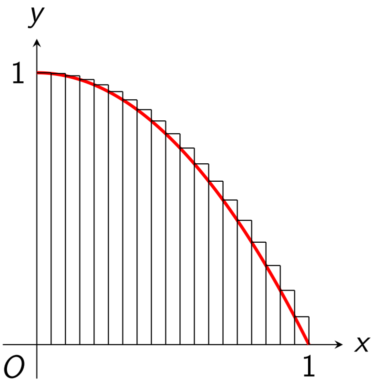
$$
\begin{aligned}
s_n &= 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \\
&= 1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = 1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{3}\,.
\end{aligned}
$$

# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

# Somme de Darboux supérieure

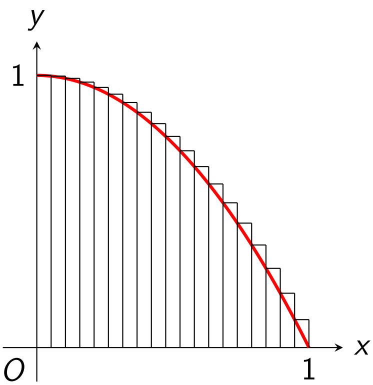
- Somme de Darboux supérieure



# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

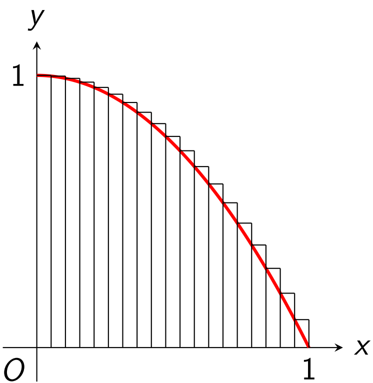
  De façon analogue,



# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

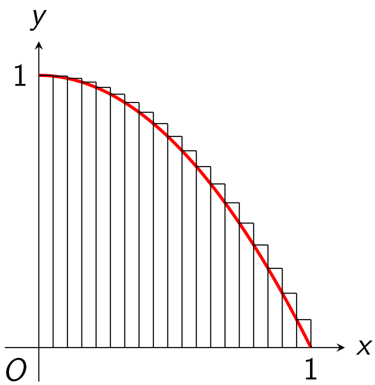
  De façon analogue, la plus grande ordonnée sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$



# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

  De façon analogue, la plus grande ordonnée sur l'intervalle $[\, x_{k-1} \, , \, x_k \,]$ est égale à $f(x_{k-1})$.

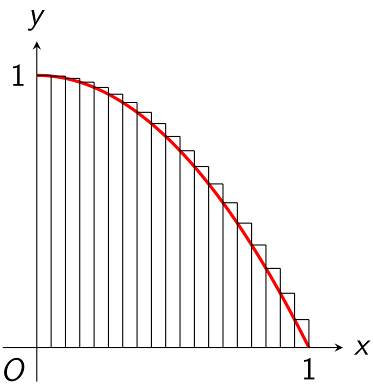


# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

  De façon analogue, la plus grande ordonnée sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ est égale à $f(x_{k-1})$.

$$\Delta x_k = \frac{1}{n}$$

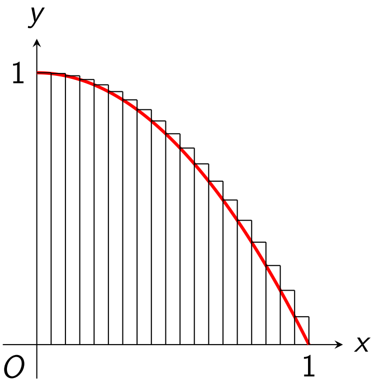


# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

  De façon analogue, la plus grande ordonnée sur l'intervalle $[\, x_{k-1}\,,\, x_k\,]$ est égale à $f(x_{k-1})$.

  $$\Delta x_k = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_k = \frac{k}{n}, \quad 1 \leq k \leq n\,,$$



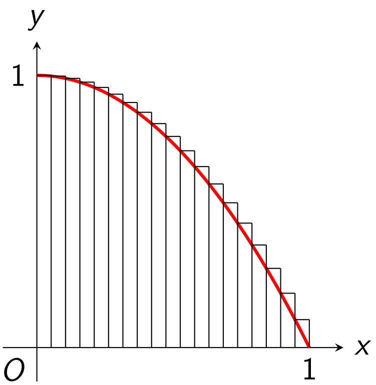
# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

  De façon analogue, la plus grande ordonnée sur l'intervalle $[\, x_{k-1}\,,\ x_k\,]$ est égale à $f(x_{k-1})$.

  $$\Delta x_k = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_k = \frac{k}{n}\,, \quad 1 \le k \le n\,,$$

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(x_{k-1})$$



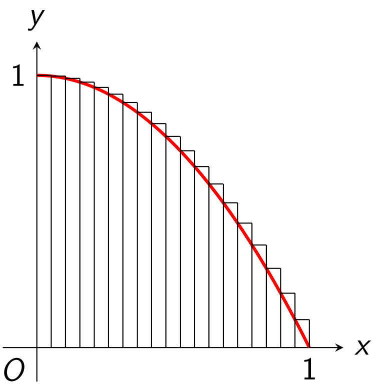
# Somme de Darboux supérieure

- Somme de Darboux supérieure

  De façon analogue, la plus grande ordonnée sur l'intervalle $[\, x_{k-1}\,,\, x_k\,]$ est égale à $f(x_{k-1})$.

  $$\Delta x_k = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad x_k = \frac{k}{n}, \quad 1 \le k \le n\,,$$

  $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \cdot f(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\tfrac{k-1}{n}\right).$$



# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\tfrac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right]$$

# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\tfrac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right]$$

# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2\right]$$

# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\tfrac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2$$

# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\tfrac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2$$

# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\tfrac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2$$

$$= 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j^2$$

# Somme de Darboux supérieure

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\tfrac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2$$

$$= 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6}$$

# Somme de Darboux supérieure

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\tfrac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n-1} 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\tfrac{j}{n}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \\
&= 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = 1 - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)\, n\, (2n-1)}{6} = 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{3} .
\end{aligned}
$$

# Exemple

- Conclusion :

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \le \int_0^1 f(x)\,dx \le S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \ \leq \ \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \ \leq \ S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  * $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  * $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[ 1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{3} \right]$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,,\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  $*$ $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{(1+\frac{1}{n})\,(1+\frac{1}{2n})}{3}\right] = \frac{2}{3}\,,$$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  $*$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{(1+\frac{1}{n})\,(1+\frac{1}{2n})}{3}\right] = \frac{2}{3}\,,$

  $*$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  $*$ $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{(1+\frac{1}{n})\,(1+\frac{1}{2n})}{3}\right] = \frac{2}{3}\,,$$

  $*$ $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{(1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{1}{2n})}{3}\right]$$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  $*$ $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[ 1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{3} \right] = \frac{2}{3}\,,$$

  $*$ $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[ 1 - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{3} \right] = \frac{2}{3}\,.$$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  * $\displaystyle \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[ 1 - \frac{(1+\frac{1}{n})\,(1+\frac{1}{2n})}{3} \right] = \frac{2}{3}\,,$

  * $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[ 1 - \frac{(1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{1}{2n})}{3} \right] = \frac{2}{3}\,.$

  On en déduit que $\displaystyle \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$

# Exemple

- Conclusion : $\quad s_n \;\leq\; \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \;\leq\; S_n\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$

  Et les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

  $*$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{(1+\frac{1}{n})\,(1+\frac{1}{2n})}{3}\right] = \frac{2}{3}\,,$

  $*$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{(1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{1}{2n})}{3}\right] = \frac{2}{3}\,.$

  On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}$ et donc que $A = \dfrac{4}{3}\,.$