# Chapitre 5.

# Variation locale d’une fonction

# Chapitre 5.
# Variation locale d'une fonction

## 3. Autres points remarquables

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$

(éventuellement dérivable à gauche

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$ (éventuellement dérivable à gauche ou à droite en $x_0$)

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$
(éventuellement dérivable à gauche ou
à droite en $x_0$) et tel que $f'(x_0) = 0$

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$

(éventuellement dérivable à gauche ou

à droite en $x_0$) et tel que $f'(x_0) = 0$

(éventuellement $f'(x_0^-) = 0$

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$ (éventuellement dérivable à gauche ou à droite en $x_0$) et tel que $f'(x_0) = 0$ (éventuellement $f'(x_0^-) = 0$ ou $f'(x_0^+) = 0$).

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$
(éventuellement dérivable à gauche ou
à droite en $x_0$) et tel que $f'(x_0) = 0$
(éventuellement $f'(x_0^-) = 0$ ou
$f'(x_0^+) = 0$).
Alors le graphe de $f$ admet en $x_0$

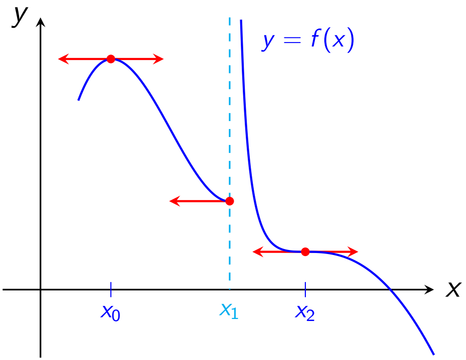
# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$ (éventuellement dérivable à gauche ou à droite en $x_0$) et tel que $f'(x_0) = 0$ (éventuellement $f'(x_0^-) = 0$ ou $f'(x_0^+) = 0$).
Alors le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) horizontale.

# Point à tangente horizontale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0$ (éventuellement dérivable à gauche ou à droite en $x_0$) et tel que $f'(x_0) = 0$ (éventuellement $f'(x_0^-) = 0$ ou $f'(x_0^+) = 0$).

Alors le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) horizontale.



# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$,

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

Si $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :

$f(x) = \sqrt{x}$,

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :

$f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}_+ .$

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :

$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}_+$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.
Si $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :

$f(x) = \sqrt{x}\,, \quad D_f = \mathbb{R}_+\,.$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}_+^*\,.$

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :

$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}_+$.

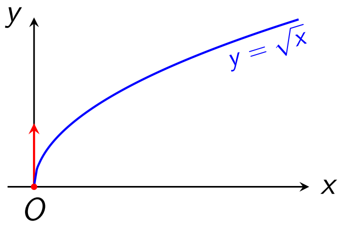
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$.

# Point à tangente verticale

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :




$f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = \mathbb{R}_+$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$.

# Point à tangente verticale

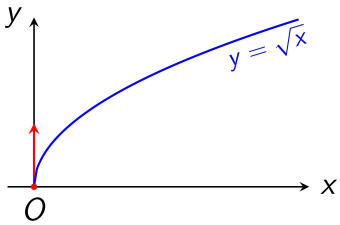
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \infty$, le graphe de $f$ admet en $x_0$ une tangente (demi-tangente) verticale.

**Exemple 1** :

$f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = \mathbb{R}_+ .$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}_+^* . \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty .$




L'origine est un point frontière de $D_f$ à demi-tangente verticale.

# Point à tangente verticale

**Exemple 2** :

# Point à tangente verticale

**Exemple 2** :

$f(x) = \sqrt[3]{x}\,,$

# Point à tangente verticale

**Exemple 2** :

$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

# Point à tangente verticale

**Exemple 2** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

# Point à tangente verticale

**Exemple 2** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

# Point à tangente verticale

**Exemple 2** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty\,.$$

# Point à tangente verticale

**Exemple 2** :

$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty\,.$

L'origine est un point du graphe de $f$

à tangente verticale.

# Point à tangente verticale

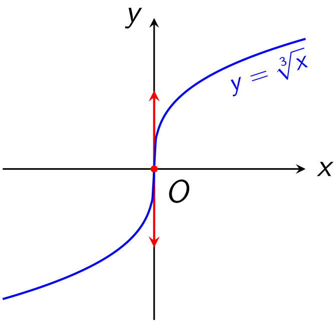
**Exemple 2** :

$f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty\,.$

L'origine est un point du graphe de $f$ à tangente verticale.



# Point à tangente verticale

**Exemple 3** :

# Point à tangente verticale

**Exemple 3** :

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$,

# Point à tangente verticale

**Exemple 3** :

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}.$

# Point à tangente verticale

**Exemple 3** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,,$$

# Point à tangente verticale

**Exemple 3** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

# Point à tangente verticale

**Exemple 3** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty\,,$$

# Point à tangente verticale

**Exemple 3** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$

# Point à tangente verticale

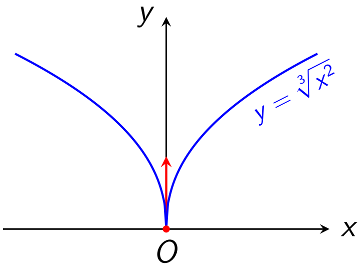
**Exemple 3** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$



# Point à tangente verticale

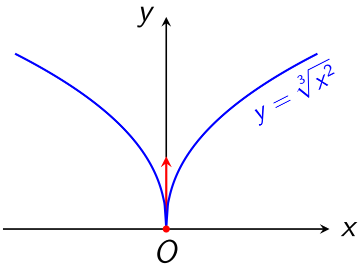
**Exemple 3** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$




L'origine est un point du graphe de $f$ à demi-tangente verticale,

# Point à tangente verticale

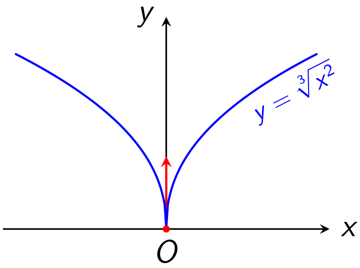
**Exemple 3** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$




L'origine est un point du graphe de $f$ à demi-tangente verticale, (point de rebroussement).

# Point anguleux

**Définition** :

# Point anguleux

**Définition** : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$

continue sur un intervalle ouvert $I$

# Point anguleux

**Définition** : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle ouvert $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.

# Point anguleux

**Définition** : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle ouvert $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.
Le graphe de $f$ admet un point anguleux en $x_0$

# Point anguleux

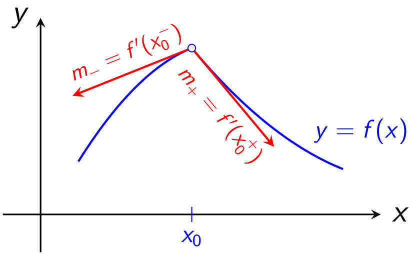
**Définition** : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle ouvert $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.
Le graphe de $f$ admet un point anguleux en $x_0$ si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$

# Point anguleux

**Définition** : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle ouvert $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.
Le graphe de $f$ admet un point anguleux en $x_0$ si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$.

# Point anguleux

**Définition** : Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle ouvert $I$ et dérivable sur $I$ sauf en $x_0 \in I$.
Le graphe de $f$ admet un point anguleux en $x_0$ si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$.



# Point anguleux

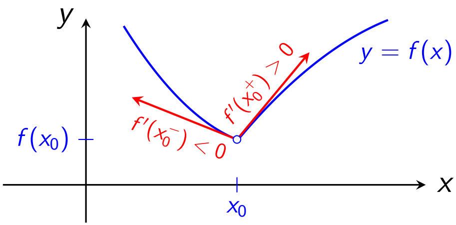
**Remarque** :

# Point anguleux

**Remarque** : Un point anguleux n'est pas nécessairement un extremum.

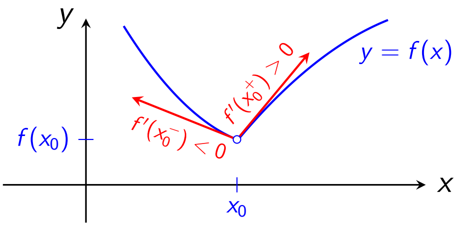
# Point anguleux

**Remarque** : Un point anguleux n'est pas nécessairement un extremum.



# Point anguleux

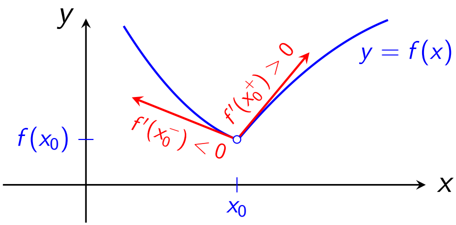
**Remarque** : Un point anguleux n'est pas nécessairement un extremum.



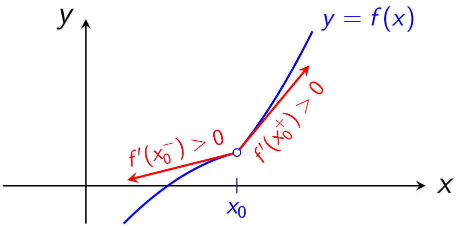

Point anguleux et minimum.

# Point anguleux

**Remarque** : Un point anguleux n'est pas nécessairement un extremum.

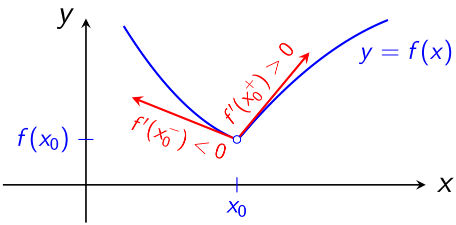



Point anguleux et minimum.

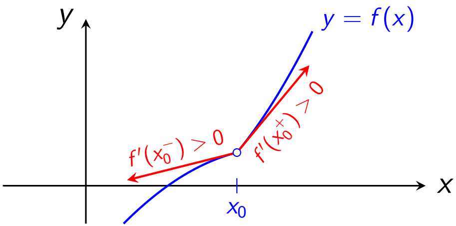


# Point anguleux

**Remarque** : Un point anguleux n'est pas nécessairement un extremum.




Point anguleux et minimum.




Point anguleux, non extremum.

# Exemple

**Exemple** :

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

$D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

$D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $b$ est continue sur $D_b$.

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

$D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $b$ est continue sur $D_b$.

$$b(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,[\,1\,,\,+\infty\,[ \\ & \end{cases}$$

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right|$.

$D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $b$ est continue sur $D_b$.

$$b(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-\infty\,, -1\,[\, \cup \,[\,1\,, +\infty\,[ \\ -\frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-1\,, 1\,[ \end{cases}$$

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right|$.

$D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $b$ est continue sur $D_b$.

$$b(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup \,[\,1\,,\,+\infty\,[ \\ -\frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-1\,,\,1\,[ \end{cases}$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup \,]\,1\,,\,+\infty\,[ \\ & \end{cases}$$

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

$D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $b$ est continue sur $D_b$.

$$b(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup \,[\,1\,,\,+\infty\,[ \\ -\frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-1\,,\,1\,[ \end{cases}$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup \,]\,1\,,\,+\infty\,[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in \,]-1\,,\,1\,[ \end{cases}$$

# Exemple

**Exemple** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

Etude des points remarquables de $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

$D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $b$ est continue sur $D_b$.

$$b(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup \,[\,1\,,\,+\infty\,[ \\ -\frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \in \,]-1\,,\,1\,[ \end{cases}$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup \,]\,1\,,\,+\infty\,[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in \,]-1\,,\,1\,[ \end{cases} \qquad D_{b'} = \mathbb{R}\setminus\{-1\,,\,1\}.$$

# Exemple

On en déduit le signe de $b'(x)$ :

# Exemple

On en déduit le signe de $b'(x)$ :

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b'(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |

# Exemple

On en déduit le signe de $b'(x)$ :

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b'(x)$ | $+$ | $\|$ | $-$ | $\|$ | $+$ |

$x = -1$ n'est pas l'abscisse d'un extremum de $b$

# Exemple

On en déduit le signe de $b'(x)$ :

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b'(x)$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |

$x = -1$ n'est pas l'abscisse d'un extremum de $b$ car $-1 \notin D_b$.

# Exemple

On en déduit le signe de $b'(x)$ :

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & & -1 & & 1 & \\
\hline
b'(x) & + & \| & - & \| & +
\end{array}$$

$x = -1$ n'est pas l'abscisse d'un extremum de $b$ car $-1 \notin D_b$.

Mais que se passe-t-il en $x = 1$ ?

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h}$$

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{2+h}$$

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}\,.$$

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}\,.$$

* Montrons que $b$ est dérivable à droite en $x = 1$.

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}.$$

* Montrons que $b$ est dérivable à droite en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}\,.$$

* Montrons que $b$ est dérivable à droite en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h}$$

# Exemple

* Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}.$$

* Montrons que $b$ est dérivable à droite en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2+h}$$

# Exemple

$*$ Montrons que $b$ est dérivable à gauche en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{2+h} = -\frac{1}{2}\,.$$

$*$ Montrons que $b$ est dérivable à droite en $x = 1$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{(1+h)-1}{(1+h)+1} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2+h} = +\frac{1}{2}\,.$$

# Exemple

Le point $(1, 0)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$

# Exemple

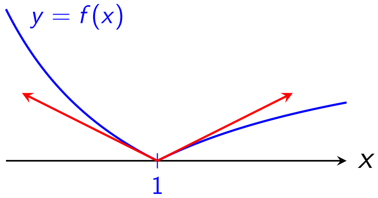
Le point $(1,0)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont les pentes des deux demi-tangentes sont $m_- = f'(1^-) = -\frac{1}{2}$

# Exemple

Le point $(1, 0)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont les pentes des deux demi-tangentes sont $m_- = f'(1^-) = -\frac{1}{2}$ et $m_+ = f'(1^+) = +\frac{1}{2}$.

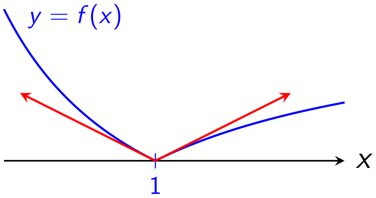
# Exemple

Le point $(1,0)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont les pentes des deux demi-tangentes sont $m_- = f'(1^-) = -\frac{1}{2}$ et $m_+ = f'(1^+) = +\frac{1}{2}$.



# Exemple

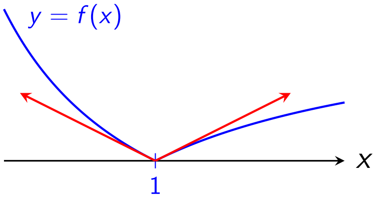
Le point $(1,0)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont les pentes des deux demi-tangentes sont $m_- = f'(1^-) = -\frac{1}{2}$ et $m_+ = f'(1^+) = +\frac{1}{2}$ .




**Remarque** :

# Exemple

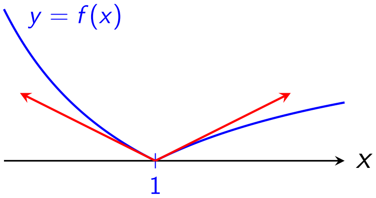
Le point $(1,0)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont les pentes des deux demi-tangentes sont $m_- = f'(1^-) = -\frac{1}{2}$ et $m_+ = f'(1^+) = +\frac{1}{2}$.




**Remarque** : Pour calculer ces deux pentes,

# Exemple

Le point $(1,0)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont les pentes des deux demi-tangentes sont $m_- = f'(1^-) = -\frac{1}{2}$ et $m_+ = f'(1^+) = +\frac{1}{2}$ .




**Remarque** : Pour calculer ces deux pentes, on peut se simplifier la vie en utilisant le théorème suivant.

# Théorème

**Théorème** :

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$ .

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe,

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$ .

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$ .

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ .

Plus précisément :

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Plus précisément :

$*$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ existe,

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Plus précisément :

$*$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0^-)$,

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Plus précisément :

$*$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0^-)$,

$*$ si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ existe,

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Plus précisément :

* si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = f'(x_0^-)$,
* si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = f'(x_0^+)$.

# Théorème

**Théorème** :

Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Plus précisément :

* si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = f'(x_0^-)$,
* si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = f'(x_0^+)$.

# Démonstration du théorème

Démonstration :

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage,

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,x_0\,,\,x_0 + h\,]$

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,x_0\,,\,x_0+h\,]$ ou $[\,x_0+h\,,\,x_0\,]$

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,x_0\,,\, x_0 + h\,]$ ou $[\,x_0 + h\,,\, x_0\,]$ selon que $h$ est positif ou négatif :

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,x_0\,,\,x_0 + h\,]$ ou $[\,x_0 + h\,,\,x_0\,]$ selon que $h$ est positif ou négatif :

$$\exists\,\vartheta \in ]\,0\,,\,1\,[$$

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,x_0\,,\,x_0 + h\,]$ ou $[\,x_0 + h\,,\,x_0\,]$ selon que $h$ est positif ou négatif :

$$\exists\ \vartheta \in ]\,0\,,\,1\,[ \quad \text{tel que} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \vartheta\, h)\,.$$

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x_0\,,\, x_0 + h]$ ou $[x_0 + h\,,\, x_0]$ selon que $h$ est positif ou négatif :

$$\exists\, \vartheta \in ]0\,,\,1[ \quad \text{tel que} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \vartheta\, h)\,.$$

Et lorsque $h \to 0$ :

# Démonstration du théorème

Démonstration :

$f$ est continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Donc pour tout $h$ tel que $x_0 + h$ soit dans ce voisinage, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[\,x_0\,,\,x_0+h\,]$ ou $[\,x_0+h\,,\,x_0\,]$ selon que $h$ est positif ou négatif :

$$\exists\,\vartheta \in \,]\,0\,,\,1\,[\quad \text{tel que} \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0+\vartheta\,h)\,.$$

Et lorsque $h \to 0$ : $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(x_0+\vartheta\,h)\,.$

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe.

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$.

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$$

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L = \lim_{h \to 0} f'(x_0 + \vartheta\, h).$$

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L = \lim_{h \to 0} f'(x_0 + \vartheta\, h)\,.$$

En résumé :

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L = \lim_{h \to 0} f'(x_0 + \vartheta\, h) .$$

En résumé :

$$* \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L ,$$

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L = \lim_{h \to 0} f'(x_0 + \vartheta\, h).$$

En résumé :

$*\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$, donc $f$ est dérivable en $x_0$ :

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L = \lim_{h \to 0} f'(x_0 + \vartheta\, h).$$

En résumé :

$\ast$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$, donc $f$ est dérivable en $x_0$ : $f'(x_0) = L$

# Démonstration du théorème

Or par hypothèse, $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe. Posons $\lim_{x \to x_0} f'(x) = L$.

Cette limite est unique et ne dépend pas de la façon dont $x$ tend vers $x_0$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = L = \lim_{h \to 0} f'(x_0 + \vartheta\, h)\,.$$

En résumé :

$\ast$ $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = L$, donc $f$ est dérivable en $x_0$ : $f'(x_0) = L$

$\ast$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$. $\square$

# Trois exemples

**Exemple 1** :

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$,

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

En calculant sa fonction dérivée sur un voisinage épointé de $x = 0$, on obtient :

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

En calculant sa fonction dérivée sur un voisinage épointé de $x = 0$, on obtient :

$$f'(x) = 2x^{\cdot} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

En calculant sa fonction dérivée sur un voisinage épointé de $x = 0$, on obtient :

$$f'(x) = 2x^{\cdot} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \; = 2x \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

En calcululant sa fonction dérivée sur un voisinage épointé de $x = 0$, on obtient :

$$f'(x) = 2x^{\cdot} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mais $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

En calculant sa fonction dérivée sur un voisinage épointé de $x = 0$, on obtient :

$$f'(x) = 2x^{\cdot} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \;= 2x \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Mais $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Peut-on en déduire que $f$ n'est pas dérivable en $x = 0$ ?

# Trois exemples

**Exemple 1** : Soit $f$ la fonction définie sur un voisinage de $x = 0$ par

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\,.$$

Cette fonction est continue en $x = 0$, car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

En calculant sa fonction dérivée sur un voisinage épointé de $x = 0$, on obtient :

$$f'(x) = 2x^{\cdot} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \; = 2x \cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Mais $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Peut-on en déduire que $f$ n'est pas dérivable en $x = 0$ ? Certainement pas !

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée,

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure :

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure : le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure : le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$,

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure : le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$, il faut revenir à sa définition :

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure : le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$, il faut revenir à sa définition :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure : le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$, il faut revenir à sa définition :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure : le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$, il faut revenir à sa définition :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure : le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$, il faut revenir à sa définition :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

$f$ est donc dérivable en $x = 0$

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure :

le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$, il faut revenir à sa définition :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

$f$ est donc dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$,

# Exemple 1

L'hypothèse du théorème n'étant pas vérifiée, on ne peut rien en conclure :

le théorème ne s'applique pas dans ce cas-là.

Pour vérifier la dérivabilité de $f$ en $x = 0$, il faut revenir à sa définition :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,.$$

$f$ est donc dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$, alors que $\lim_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

# Trois exemples

**Exemple 2** :

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right| ,$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[ \\ & \end{cases}$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \qquad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-\infty\,, -1\,[\, \cup \,]\,1\,, +\infty\,[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-1\,, 1\,[\,, \end{cases}$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \left]-\infty\,, -1\right[ \cup \left]1\,, +\infty\right[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \left]-1\,, 1\right[\,, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}\,.$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-\infty\,,\, -1\,[\, \cup \,]\,1\,,\, +\infty\,[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-1\,,\, 1\,[\,, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}\,.$$

Les pentes des demi-tangentes du point anguleux en $x = 1$ sont données par :

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,,$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \;\; x \in \,]-\infty\,, -1\,[\, \cup \,]\,1\,, +\infty\,[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \;\; x \in \,]-1\,, 1\,[\,, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}\,.$$

Les pentes des demi-tangentes du point anguleux en $x = 1$ sont données par :

$$m_- = \lim_{x \to 1^-} f'(x)$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[ \\ -\,\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-1\,,\,1\,[\,, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}\,.$$

Les pentes des demi-tangentes du point anguleux en $x = 1$ sont données par :

$$m_- = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{(x+1)^2}$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in \left]-\infty, -1\right[ \cup \left]1, +\infty\right[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x \in \left]-1, 1\right[, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}.$$

Les pentes des demi-tangentes du point anguleux en $x = 1$ sont données par :

$$m_- = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \tfrac{-2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \left]-\infty\,, -1\right[ \cup \left]1\,, +\infty\right[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \left]-1\,, 1\right[\,, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}\,.$$

Les pentes des demi-tangentes du point anguleux en $x = 1$ sont données par :

$$m_- = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \tfrac{-2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad m_+ = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \quad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \; x \in \,]-1\,,\,1\,[\,, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}\,.$$

Les pentes des demi-tangentes du point anguleux en $x = 1$ sont données par :

$$m_- = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad m_+ = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(x+1)^2}$$

# Trois exemples

**Exemple 2** : Reprise de l'exercice **4.** b) de la série 13.

$$b(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \qquad D_b = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$b'(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \ x \in \,]-\infty\,,\, -1\,[\, \cup \,]\,1\,,\, +\infty\,[ \\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } \ x \in \,]-1\,,\, 1\,[\,, \end{cases} \qquad D_{b'} = D_b \setminus \{1\}\,.$$

Les pentes des demi-tangentes du point anguleux en $x = 1$ sont données par :

$$m_- = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \tfrac{-2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad m_+ = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \tfrac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\,.$$

# Trois exemples

**Exemple 3** :

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } \ x \leq 2 \\ \end{cases}$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } \; x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } \; x > 2\,, \end{cases} \qquad x_0 = 2\,,$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases} \qquad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } \; x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } \; x > 2\,, \end{cases} \qquad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } \ x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } \ x > 2\,, \end{cases} \qquad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ & \end{cases}$$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x > 2\,, \end{cases} \qquad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \\ 2\,(x-4) & \text{si} \quad x > 2\,, \end{cases}$$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ 2\,(x-4) & \text{si } x > 2\,, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ 2(x-4) & \text{si } x > 2\,, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

$\ast$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x)$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ 2\,(x-4) & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$ $\quad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$

$*\ \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} -(x-2)$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ 2(x-4) & \text{si } x > 2\,, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

$*$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x-2) = 0\,,$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } \; x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } \; x > 2\,, \end{cases} \qquad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } \; x < 2 \\ 2\,(x-4) & \text{si } \; x > 2\,, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

$\ast \quad \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x-2) = 0\,, \qquad f'(2^-) = 0\,.$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2, \quad D_f = \mathbb{R}.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ 2(x-4) & \text{si } x > 2, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

* $\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x-2) = 0, \quad f'(2^-) = 0.$
* $\lim\limits_{x \to 2^+} f'(x)$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ 2(x-4) & \text{si } x > 2\,, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

* $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} -(x-2) = 0\,, \quad f'(2^-) = 0\,.$
* $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} 2(x-4)$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } \ x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } \ x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } \ x < 2 \\ 2\,(x-4) & \text{si } \ x > 2\,, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

- $\ast$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x-2) = 0\,, \quad f'(2^-) = 0\,.$
- $\ast$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 2\,(x-4) = -4\,,$

# Trois exemples

**Exemple 3** : $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 4 & \text{si } \; x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{si } \; x > 2\,, \end{cases}$ $\quad x_0 = 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$

$f$ est continue en $x_0 = 2$ et $f(2) = 4\,.$

$$f'(x) = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } \; x < 2 \\ 2\,(x-4) & \text{si } \; x > 2\,, \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}\,.$$

$*$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x-2) = 0\,, \quad f'(2^-) = 0\,.$

$*$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 2\,(x-4) = -4\,, \quad f'(2^+) = -4\,.$

# Exemple 3

Le point $(2,4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$

# Exemple 3

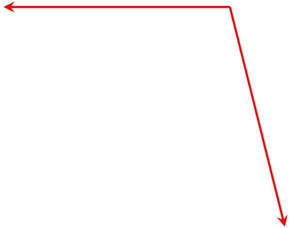
Le point $(2, 4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont une demi-tangente est horizontale

# Exemple 3

Le point $(2, 4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont une demi-tangente est horizontale et l'autre est de pente $m = -4$.

# Exemple 3

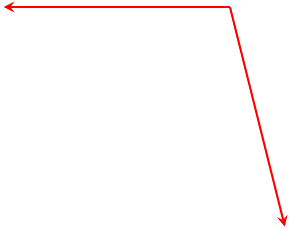
Le point $(2, 4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont une demi-tangente est horizontale et l'autre est de pente $m = -4$.



# Exemple 3

Le point $(2,4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont une demi-tangente est horizontale et l'autre est de pente $m=-4$.

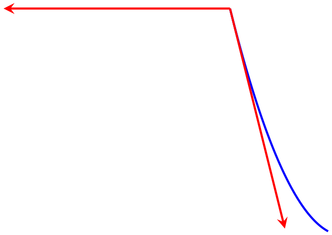
Ce point anguleux est-il un extremum de $f$ ?



# Exemple 3

Le point $(2, 4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont une demi-tangente est horizontale et l'autre est de pente $m = -4$.

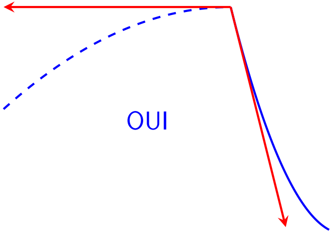
Ce point anguleux est-il un extremum de $f$ ?



# Exemple 3

Le point $(2,4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont une demi-tangente est horizontale et l'autre est de pente $m = -4$.

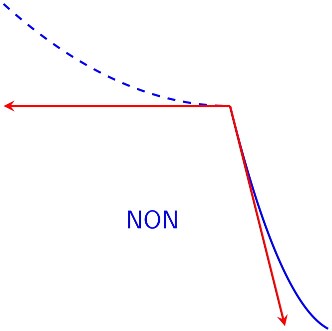
Ce point anguleux est-il un extremum de $f$ ?



# Exemple 3

Le point $(2, 4)$ est donc un point anguleux du graphe de $f$ dont une demi-tangente est horizontale et l'autre est de pente $m = -4$.

Ce point anguleux est-il un extremum de $f$ ?



# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite.

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche,

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

Il faut donc étudier le signe de la dérivée

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

Il faut donc étudier le signe de la dérivée sur un voisinage à gauche de $x_0 = 2$.

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

Il faut donc étudier le signe de la dérivée sur un voisinage à gauche de $x_0 = 2$.

Si $x < 2$,

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

Il faut donc étudier le signe de la dérivée sur un voisinage à gauche de $x_0 = 2$.

Si $x < 2$, alors $f'(x) = -(x-2) > 0$.

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

Il faut donc étudier le signe de la dérivée sur un voisinage à gauche de $x_0 = 2$.

Si $x < 2$, alors $f'(x) = -(x-2) > 0$.

Le point anguleux $(2\,,\,4)$ est donc un extremum

# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

Il faut donc étudier le signe de la dérivée sur un voisinage à gauche de $x_0 = 2$.

Si $x < 2$, alors $f'(x) = -(x-2) > 0$.

Le point anguleux $(2, 4)$ est donc un extremum (maximum) de $f$.

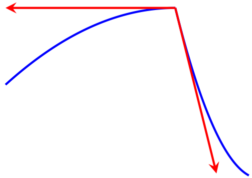
# Exemple 3

Le nombre dérivé à droite de $x_0 = 2$ nous assure que $f$ est décroissante sur ce voisinage à droite. Par contre à gauche, nous ne savons pas si $f$ est croissante ou décroissante.

Il faut donc étudier le signe de la dérivée sur un voisinage à gauche de $x_0 = 2$.

Si $x < 2$, alors $f'(x) = -(x-2) > 0$.

Le point anguleux $(2\,,\,4)$ est donc un extremum (maximum) de $f$.



# Point de rebroussement

**Définition** :

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$$

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si
$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si
$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Le point $(x_0\,,\, f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,,$

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si

$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,,$$

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.

Le point $(x_0\,, f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si
$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,,\quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,,\quad x_0 = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty\,,$$

# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\, f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si
$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$

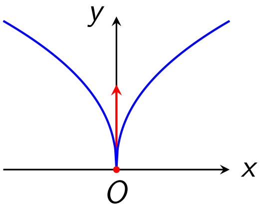
# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si
$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$



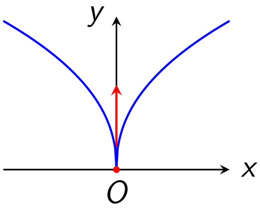
# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si
$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,,\quad f'(x) = \frac{2}{3\,\sqrt[3]{x}}\,,\quad x_0 = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty\,,\qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$




**Remarque** :

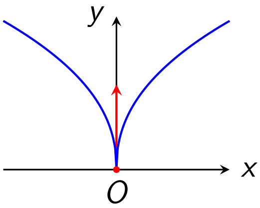
# Point de rebroussement

**Définition** : Soit $f$ continue en $x_0$ et dérivable sur un voisinage épointé de $x_0$.
Le point $(x_0\,,\,f(x_0))$ est un point de rebroussement du graphe de $f$ si
$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \pm\infty$ et si $f'(x)$ change de signe en $x_0$.

**Exemple** :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad f'(x) = \frac{2}{3\,\sqrt[3]{x}}\,, \quad x_0 = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty\,.$$




**Remarque** : Un point de rebroussement est toujours un extremum.

# Exemple complet

**Exemple** :

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$,

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $\quad D_f = [-3\,,\,+\infty\,[$,

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $D_f = [-3\,,\, +\infty\,[$, $f$ est continue sur $D_f$.

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $D_f = [-3\,,\,+\infty\,[$, $f$ est continue sur $D_f$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}}$$

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $D_f = [-3\,,\,+\infty\,[$, $f$ est continue sur $D_f$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x\,(x+2)}{\sqrt{x^3+3x^2}}$$

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $\quad D_f = [-3\,,\,+\infty\,[$, $\quad f$ est continue sur $D_f$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x\,(x+2)}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x+2}{\sqrt{x+3}} \cdot \operatorname{sgn}(x)\,,$$

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $D_f = [-3\,, +\infty\,[$, $f$ est continue sur $D_f$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x\,(x+2)}{\sqrt{x^3+3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x+2}{\sqrt{x+3}} \cdot \mathrm{sgn}(x)\,, \quad D_{f'} = D_f \backslash \{-3, 0\}.$$

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $D_f = [-3\,,\,+\infty\,[$, $f$ est continue sur $D_f$ .

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x\,(x+2)}{\sqrt{x^3 + 3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x+2}{\sqrt{x+3}} \cdot \mathrm{sgn}(x)\,, \quad D_{f'} = D_f \backslash \{-3, 0\}.$$

Signe

de $f'(x)$ :

# Exemple complet

**Exemple** : Détermination des points remarquables de $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$.

$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$, $\quad D_f = [-3\,,\,+\infty\,[$, $\quad f$ est continue sur $D_f$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3+3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x\,(x+2)}{\sqrt{x^3+3x^2}} = \frac{3}{2}\,\frac{x+2}{\sqrt{x+3}} \cdot \mathrm{sgn}(x)\,, \quad D_{f'} = D_f \backslash \{-3, 0\}.$$

Signe de $f'(x)$ :

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum,

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$),

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3, 0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.
  $(-2\,,\,2)$ est un maximum

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.
  $(-2\,,\,2)$ est un maximum à tangente horizontale.

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.
  $(-2\,,\,2)$ est un maximum à tangente horizontale.

* En $x = 0$, $f(x) = 0$,

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.

  $(-3\,, 0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.

  $(-2\,, 2)$ est un maximum à tangente horizontale.

* En $x = 0$, $f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\sqrt{3}$

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.
  $(-2\,,\,2)$ est un maximum à tangente horizontale.

* En $x = 0$, $f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\sqrt{3}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\sqrt{3}$.

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3, 0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.
  $(-2, 2)$ est un maximum à tangente horizontale.

* En $x = 0$, $f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\sqrt{3}$ et $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\sqrt{3}$.
  $(0, 0)$ est un minimum

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

* En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.
  $(-3\,,\,0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

* En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.
  $(-2\,,\,2)$ est un maximum à tangente horizontale.

* En $x = 0$, $f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\sqrt{3}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\sqrt{3}$.
  $(0\,,\,0)$ est un minimum et un point anguleux

# Exemple complet

Caractérisation des points remarquables :

$*$ En $x = -3$, $f(x) = 0$ et $\lim_{x \to -3^+} f'(x) = +\infty$.

$(-3, 0)$ est un minimum, (point frontière de $D_f$), à demi-tangente verticale.

$*$ En $x = -2$, $f(x) = 2$ et $f'(x) = 0$.

$(-2, 2)$ est un maximum à tangente horizontale.

$*$ En $x = 0$, $f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\sqrt{3}$ et $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\sqrt{3}$.

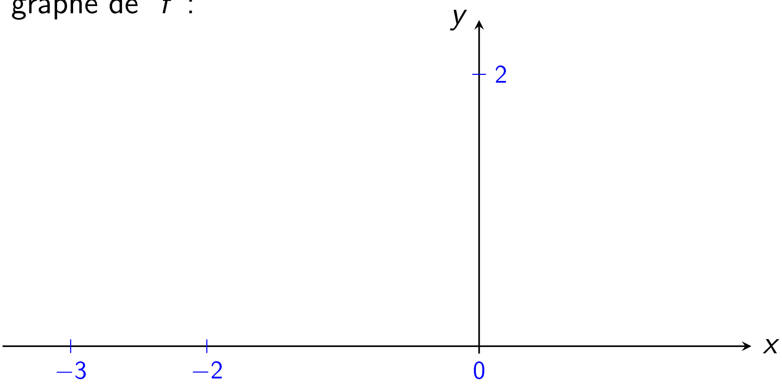
$(0, 0)$ est un minimum et un point anguleux dont les demi-tangentes sont de pente $m_{\pm} = \pm\sqrt{3}$.

# Exemple complet

Esquisse du graphe de $f$ :

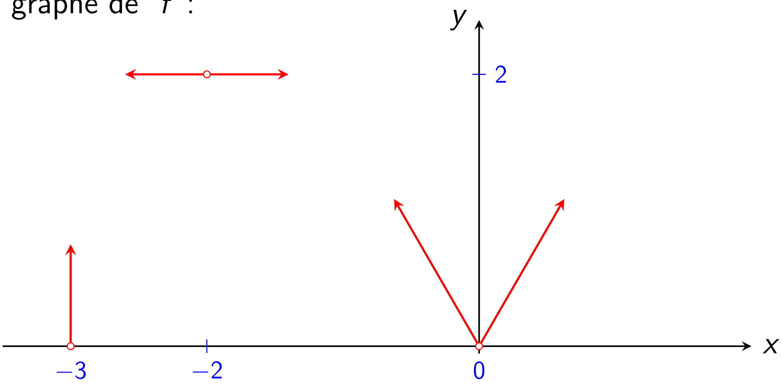
# Exemple complet

Esquisse du graphe de $f$ :



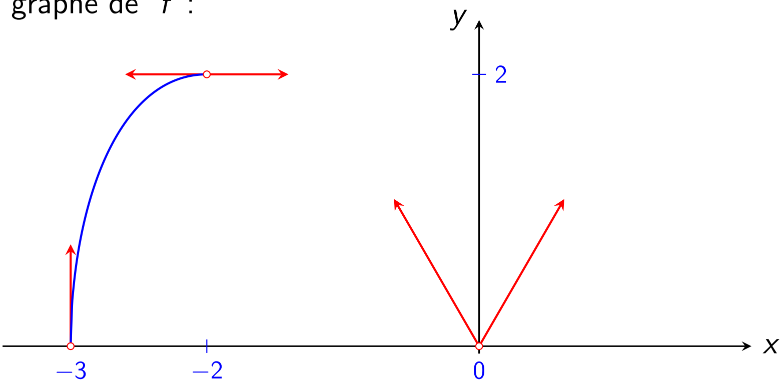
# Exemple complet

Esquisse du graphe de $f$ :



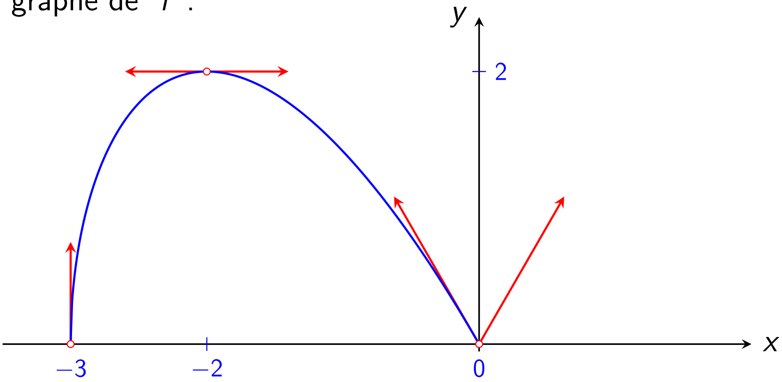
# Exemple complet

Esquisse du graphe de $f$ :



# Exemple complet

Esquisse du graphe de $f$ :



# Exemple complet

Esquisse du graphe de $f$ :