Calcul Intégral

Calcul Intégral

2. L'intégrale indéfinie

2.2 Recherche de primitives

2.2 Recherche de primitives

2.2.3 Intégration par changement de variable

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif de sorte à pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ et $t = \varphi^{-1}(x)$.

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif de sorte à pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ et $t = \varphi^{-1}(x)$.

Posons donc $x = \varphi(t)$,

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif de sorte à pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ et $t = \varphi^{-1}(x)$.

Posons donc $x = \varphi(t)$, $(\varphi \in C^1)$.

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif de sorte à pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ et $t = \varphi^{-1}(x)$.

Posons donc $x = \varphi(t)$, $(\varphi \in C^1)$.

Comment s'écrit, en fonction de t, l'intégrale indéfinie $\int f(x)\, dx$?

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif de sorte à pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ et $t = \varphi^{-1}(x)$.

Posons donc $x = \varphi(t)$, $(\varphi \in C^1)$.

Comment s'écrit, en fonction de t, l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int f(x)\,dx$?

En d'autres termes,

Intégration par changement de variable

Cette méthode consiste à changer de variable en posant $x = \varphi(t)$ de sorte que le nouvel intégrant fonction de t soit plus facile à intégrer.

On choisit φ bijectif de sorte à pouvoir expliciter $x = \varphi(t)$ et $t = \varphi^{-1}(x)$.

Posons donc $x = \varphi(t)$, $(\varphi \in C^1)$.

Comment s'écrit, en fonction de t, l'intégrale indéfinie $\displaystyle\int f(x)\,dx$?

En d'autres termes, comment s'effectue le changement de variable ?

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx =$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx =$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C =$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\left[\varphi(t)\right] + C$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F[\varphi(t)] + C$$

$$= \int (F[\varphi(t)])'\,dt$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\,[\,\varphi(t)\,] + C$$

$$= \int (\,F\,[\,\varphi(t)\,]\,)'\;dt = \int F'\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\left[\varphi(t)\right] + C$$

$$= \int \left(F\left[\varphi(t)\right]\right)'\,dt = \int F'\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\,[\,\varphi(t)\,] + C$$

$$= \int (\,F\,[\,\varphi(t)\,]\,)'\;dt = \int F'\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \int f\;[\,\underbrace{\varphi(t)}_{x}\,]\cdot\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}\;.$$

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\,[\,\varphi(t)\,] + C$$

$$= \int (\,F\,[\,\varphi(t)\,]\,)'\;dt = \int F'\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \int f\;[\,\underbrace{\varphi(t)}_{x}\,]\cdot\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}\;.$$

Rappel :

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\,[\,\varphi(t)\,] + C$$

$$= \int (\,F\,[\,\varphi(t)\,]\,)'\,dt = \int F'\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \int f\,[\,\underbrace{\varphi(t)}_{x}\,]\cdot\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}\,.$$

Rappel :

Si z est une fonction de u,

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\,[\,\varphi(t)\,] + C$$

$$= \int (\,F\,[\,\varphi(t)\,]\,)'\;dt = \int F'\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f\,[\,\varphi(t)\,]\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \int f\;[\,\underbrace{\varphi(t)}_{x}\,]\cdot\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}\;.$$

Rappel :

Si z est une fonction de u, la differentielle de z s'écrit :

Intégration par changement de variable

Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$: $F'(x) = f(x)$,

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + C = F\left[\varphi(t)\right] + C$$

$$= \int \left(F\left[\varphi(t)\right]\right)'\,dt = \int F'\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \int f\;[\underbrace{\varphi(t)}_{x}]\cdot\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}\,.$$

Rappel :

Si z est une fonction de u, la differentielle de z s'écrit : $dz = z'(u)\,du$.

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 :

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$,

posons $\quad t = \sqrt{1+x}$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx\,,$

posons $\quad t = \sqrt{1+x}\,, \quad x > -1\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx\,,$

posons $\quad t=\sqrt{1+x}\,, \quad x>-1\,, \quad t>0\,, \quad x=t^2-1\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$,

posons $\quad t = \sqrt{1+x}\,, \quad x > -1\,, \quad t > 0\,, \quad x = t^2 - 1\,,$

$$dx = (t^2-1)'dt = 2t\,dt\,.$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$,

posons $\quad t = \sqrt{1+x}\,, \quad x > -1\,, \quad t > 0\,, \quad x = t^2 - 1\,,$

$$dx = (t^2-1)'dt = 2t\, dt\,.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx = \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2t\, dt$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx\,,$

posons $\quad t=\sqrt{1+x}\,,\quad x>-1\,,\quad t>0\,,\quad x=t^2-1\,,$

$$dx=(t^2-1)'dt=2t\,dt\,.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt=2\int (t^2-1)\,dt$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$,

posons $\quad t = \sqrt{1+x}\,, \quad x > -1\,, \quad t > 0\,, \quad x = t^2 - 1\,,$

$$dx = (t^2-1)'dt = 2t\,dt\,.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right] + C\,,$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx\,,$

posons $\quad t=\sqrt{1+x}\,,\quad x>-1\,,\quad t>0\,,\quad x=t^2-1\,,$

$$dx=(t^2-1)'dt=2t\,dt\,.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt=2\int (t^2-1)\,dt=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]+C\,,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-2\sqrt{1+x}+C$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 1 : $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx\,,$

posons $\quad t = \sqrt{1+x}\,,\quad x > -1\,,\quad t > 0\,,\quad x = t^2 - 1\,,$

$$dx = (t^2-1)'dt = 2t\,dt\,.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right] + C\,,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} - 2\sqrt{1+x} + C = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{1+x} + C\,.$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 :

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$,

on pose $t = \sqrt{x}$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2t\,dt\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2t\, dt$,

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx =$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2t\,dt\,,$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = \int \cos(t) \cdot 2t\,dt$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2t\,dt\,,$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \cos(t)\cdot 2t\, dt = 2\int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)}\; dt$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2t\, dt$,

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \cos(t) \cdot 2t\, dt = 2 \int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)}\ dt$$

$$= 2\left[\, t \cdot \sin(t) - \int 1 \cdot \sin(t)\ dt \right]$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2t\, dt\,,$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = \int \cos(t) \cdot 2t\, dt = 2 \int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)}\ dt$$

$$= 2 \left[t \cdot \sin(t) - \int 1 \cdot \sin(t)\ dt \right] = 2\,[\,t \cdot \sin(t) + \cos(t)\,] + C$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 2 : Reprise de l'exemple $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx$,

on pose $\quad t = \sqrt{x}\,, \quad x \geq 0\,, \quad t \geq 0\,, \quad x = t^2\,, \quad dx = 2t\, dt\,,$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx = \int \cos(t) \cdot 2t\, dt = 2 \int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)}\; dt$$

$$= 2 \left[t \cdot \sin(t) - \int 1 \cdot \sin(t)\; dt \right] = 2\,[\, t \cdot \sin(t) + \cos(t)\,] + C$$

$$= 2\left[\,\sqrt{x} \cdot \sin\left(\sqrt{x}\right) + \cos\left(\sqrt{x}\right)\,\right] + C\,.$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 :

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2 - 1)\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy = \frac{2y}{y^2-1}\,dy\,.$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy = \frac{2y}{y^2-1}\,dy\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} =$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy = \frac{2y}{y^2-1}\,dy\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{2y}{y^2-1}\,dy$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy = \frac{2y}{y^2-1}\;dy\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{2y}{y^2-1}\;dy = 2\int \frac{1}{y^2-1}\;dy\,.$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy = \frac{2y}{y^2-1}\,dy\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{2y}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy\,.$$

Et soit on connaît une primitive de $\dfrac{1}{1-y^2}$, pour $y > 1$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy = \frac{2y}{y^2-1}\,dy\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{2y}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy\,.$$

Et soit on connaît une primitive de $\dfrac{1}{1-y^2}$, pour $y > 1$ $\;(\,\arg\coth(y)\,)$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 3 : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

posons $\quad y = \sqrt{1+e^x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y > 1\,, \quad x = \ln(y^2-1)\,,$

$$dx = [\,\ln(y^2-1)\,]'\,dy = \frac{2y}{y^2-1}\;dy\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{1}{y}\cdot\frac{2y}{y^2-1}\;dy = 2\int \frac{1}{y^2-1}\;dy\,.$$

Et soit on connaît une primitive de $\displaystyle\frac{1}{1-y^2}$, pour $y > 1$ $(\,\arg\coth(y)\,)$, soit ...

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy =$$

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{(y-1)\,(y+1)}\,dy =$$

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{(y-1)\,(y+1)}\,dy = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy$$

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{(y-1)\,(y+1)}\,dy = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy$$

$$= \ln(y-1) - \ln(y+1) + C$$

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{(y-1)\,(y+1)}\,dy = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy$$

$$= \ln(y-1) - \ln(y+1) + C = \ln\left(\tfrac{y-1}{y+1}\right) + C\,,$$

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{(y-1)\,(y+1)}\,dy = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy$$

$$= \ln(y-1) - \ln(y+1) + C = \ln\left(\tfrac{y-1}{y+1}\right) + C\,, \quad y > 1\,.$$

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{(y-1)\,(y+1)}\,dy = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy$$

$$= \ln(y-1) - \ln(y+1) + C = \ln\left(\tfrac{y-1}{y+1}\right) + C\,, \quad y > 1\,.$$

Et en revenant à la variable initiale :

Suite de l'exemple 3

On décompose cette fraction en une somme de deux éléments plus simples :

$$2\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{1}{(y-1)\,(y+1)}\,dy = \int \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] dy$$

$$= \ln(y-1) - \ln(y+1) + C = \ln\left(\tfrac{y-1}{y+1}\right) + C\,, \quad y > 1\,.$$

Et en revenant à la variable initiale :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \ln\left(\tfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C\,.$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 :

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile :

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,,\quad x > 0\,,\quad y > 0\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,,$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,, \quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,, \quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} =$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,, \quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,,\quad x > 0\,,\quad y > 0\,,\quad y = \sqrt[6]{x}\,,\quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\,.$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,, \quad dx = 6\, y^5\, dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3 + y^2} \cdot 6\, y^5\, dy = 6 \int \frac{y^3}{y+1}\, dy\,.$$

Pour effectuer agréablement cette division euclidienne,

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,,\quad x > 0\,,\quad y > 0\,,\quad y = \sqrt[6]{x}\,,\quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\,.$$

Pour effectuer agréablement cette division euclidienne, on pose $z = y+1$:

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,,\quad x>0\,,\quad y>0\,,\quad y=\sqrt[6]{x}\,,\quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\,.$$

Pour effectuer agréablement cette division euclidienne, on pose $z = y+1$:

$$z = y+1\,,$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,, \quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\,.$$

Pour effectuer agréablement cette division euclidienne, on pose $z = y+1$:

$$z = y+1\,, \quad y > 0\,,$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,, \quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\,.$$

Pour effectuer agréablement cette division euclidienne, on pose $z = y+1$:

$$z = y+1\,, \quad y > 0\,, \quad z > 1\,,$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad y = \sqrt[6]{x}\,, \quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\,.$$

Pour effectuer agréablement cette division euclidienne, on pose $z = y+1$:

$$z = y+1\,, \quad y > 0\,, \quad z > 1\,, \quad y = z-1\,,$$

Intégration par changement de variable, exemples

Exemple 4 : Un exemple un peu plus difficile : $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

posons $\quad x = y^6\,,\quad x > 0\,,\quad y > 0\,,\quad y = \sqrt[6]{x}\,,\quad dx = 6\,y^5\,dy\,.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{y^3+y^2}\cdot 6\,y^5\,dy = 6\int \frac{y^3}{y+1}\,dy\,.$$

Pour effectuer agréablement cette division euclidienne, on pose $z = y + 1$:

$$z = y+1\,,\quad y > 0\,,\quad z > 1\,,\quad y = z-1\,,\quad dy = dz\,.$$

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\, dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\, dz$$

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\,dz = \int \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z}\,dz$$

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\,dz = \int \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z}\,dz$$

$$= \int \left[\, z^2 - 3z + 3 - \tfrac{1}{z} \,\right] dz$$

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\,dz = \int \frac{z^3-3z^2+3z-1}{z}\,dz$$

$$= \int \left[\, z^2 - 3z + 3 - \tfrac{1}{z} \,\right] dz = \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{3}{2}\,z^2 + 3\,z - \ln(z) + C\,.$$

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\,dz = \int \frac{z^3-3z^2+3z-1}{z}\,dz$$

$$= \int \left[\, z^2 - 3z + 3 - \tfrac{1}{z} \,\right] dz = \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{3}{2}\,z^2 + 3\,z - \ln(z) + C\,.$$

Et en revenant à la variable y,

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\, dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\, dz = \int \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z}\, dz$$

$$= \int \left[\, z^2 - 3z + 3 - \tfrac{1}{z} \,\right] dz = \frac{1}{3}\, z^3 - \frac{3}{2}\, z^2 + 3\, z - \ln(z) + C\,.$$

Et en revenant à la variable y, puis à x :

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\,dz = \int \frac{z^3-3z^2+3z-1}{z}\,dz$$

$$= \int \left[\, z^2 - 3z + 3 - \tfrac{1}{z} \,\right] dz = \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{3}{2}\,z^2 + 3\,z - \ln(z) + C\,.$$

Et en revenant à la variable y, puis à x :

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \frac{1}{3}\,(y+1)^3 - \frac{3}{2}\,(y+1)^2 + 3\,(y+1) - \ln(y+1) + C\,,$$

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\,dz = \int \frac{z^3-3z^2+3z-1}{z}\,dz$$

$$= \int \left[\, z^2 - 3z + 3 - \tfrac{1}{z} \,\right] dz = \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{3}{2}\,z^2 + 3\,z - \ln(z) + C\,.$$

Et en revenant à la variable y, puis à x :

$$\int \frac{y^3}{y+1}\,dy = \frac{1}{3}\,(y+1)^3 - \frac{3}{2}\,(y+1)^2 + 3\,(y+1) - \ln(y+1) + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} =$$

Suite de l'exemple 4

$$\int \frac{y^3}{y+1}\, dy = \int \frac{(z-1)^3}{z}\, dz = \int \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 1}{z}\, dz$$

$$= \int \left[\, z^2 - 3z + 3 - \tfrac{1}{z} \,\right] dz = \frac{1}{3}\, z^3 - \frac{3}{2}\, z^2 + 3\, z - \ln(z) + C\,.$$

Et en revenant à la variable y, puis à x :

$$\int \frac{y^3}{y+1}\, dy = \frac{1}{3}\,(y+1)^3 - \frac{3}{2}\,(y+1)^2 + 3\,(y+1) - \ln(y+1) + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\,(\sqrt[6]{x}+1)^3 - 9\,(\sqrt[6]{x}+1)^2 + 18\,(\sqrt[6]{x}+1) - 6\,\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C\,.$$

Quelques changements de variable usuels

On présente ici, quelques changements de variable

Quelques changements de variable usuels

On présente ici, quelques changements de variable qui se déduisent de l'équation du cercle

Quelques changements de variable usuels

On présente ici, quelques changements de variable qui se déduisent de l'équation du cercle et de celle de l'hyperbole :

Quelques changements de variable usuels

On présente ici, quelques changements de variable qui se déduisent de l'équation du cercle et de celle de l'hyperbole :

a) changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$,

Quelques changements de variable usuels

On présente ici, quelques changements de variable qui se déduisent de l'équation du cercle et de celle de l'hyperbole :

a) changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$,

b) changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1 - x^2}$,

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1 - x^2}$, on peut poser

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1 - x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)$,

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1 - x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,,$

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)$, $\quad x \in [-1\,,\,1]$, $\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$,

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)$, $\quad x \in [-1\,,\,1]$, $\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$, $\quad t = \arcsin(x)$,

$$dx = \cos(t)\,dt\,,$$

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,,$$

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)$, $\quad x \in [-1\,,\,1]$, $\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$, $\quad t = \arcsin(x)$,

$$dx = \cos(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,,$$

- ou $x = \cos(t)$,

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1 - x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1 - x^2} = \cos(t)\,,$$

- ou $x = \cos(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,,$

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)$, $\quad x \in [-1\,,\,1]$, $\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$, $\quad t = \arcsin(x)$,

$$dx = \cos(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,,$$

- ou $x = \cos(t)$, $\quad x \in [-1\,,\,1]$, $\quad t \in [0\,,\,\pi]$,

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,,$$

- ou $x = \cos(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [0\,,\,\pi]\,, \quad t = \arccos(x)\,,$

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)\,,\quad x \in [-1\,,\,1]\,,\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,,\quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\,dt\,,\quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,,$$

- ou $x = \cos(t)\,,\quad x \in [-1\,,\,1]\,,\quad t \in [0\,,\,\pi]\,,\quad t = \arccos(x)\,,$

$$dx = -\sin(t)\,dt\,,$$

Quelques changements de variable usuels

a) Changements de variable déduits de la relation $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser

- $x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,,$$

- ou $x = \cos(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [0\,,\,\pi]\,, \quad t = \arccos(x)\,,$

$$dx = -\sin(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin(t)\,.$$

Exemple 5 :

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx\,.$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx$.

Posons $\quad x = \sin(t)$,

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\; dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\, dt\,,$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\; dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\,dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,.$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\, dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,.$$

$$\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\; dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\, dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,.$$

$$\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\; dx = \int \sin^3(t) \cdot \cos(t) \cdot [\cos(t)\, dt]$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\, dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,.$$

$$\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sin^3(t) \cdot \cos(t) \cdot [\,\cos(t)\, dt\,] = \int \sin^3(t) \cdot \cos^2(t)\, dt$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,, \quad x \in [-1\,,\,1]\,, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,, \quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\, dt\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,.$$

$$\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sin^3(t) \cdot \cos(t) \cdot [\cos(t)\, dt] = \int \sin^3(t) \cdot \cos^2(t)\, dt$$

$$= \int \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) \cdot \sin(t)\, dt$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 5 : $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx\,.$

Posons $\quad x = \sin(t)\,,\quad x \in [-1\,,\,1]\,,\quad t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]\,,\quad t = \arcsin(x)\,,$

$$dx = \cos(t)\, dt\,,\quad \sqrt{1-x^2} = \cos(t)\,.$$

$$\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sin^3(t) \cdot \cos(t) \cdot [\cos(t)\, dt\,] = \int \sin^3(t) \cdot \cos^2(t)\, dt$$

$$= \int \sin^2(t) \cdot \cos^2(t) \cdot \sin(t)\, dt = \int \left[1 - \cos^2(t)\right] \cdot \cos^2(t) \cdot \sin(t)\, dt\,,$$

Suite de l'exemple 5

$$\int \sin^3(t) \cdot \cos^2(t) = \int \cos^2(t) \cdot \sin(t)\, dt - \int \cos^4(t) \cdot \sin(t)\, dt$$

Suite de l'exemple 5

$$\int \sin^3(t) \cdot \cos^2(t) = \int \cos^2(t) \cdot \sin(t)\, dt - \int \cos^4(t) \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ \cos^3(t) + \frac{1}{5}\ \cos^5(t) + C\,.$$

Suite de l'exemple 5

$$\int \sin^3(t) \cdot \cos^2(t) = \int \cos^2(t) \cdot \sin(t)\, dt - \int \cos^4(t) \cdot \sin(t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ \cos^3(t) + \frac{1}{5}\ \cos^5(t) + C\,.$$

Et en revenant à la variable initiale, on obtient :

$$\int x^3 \cdot \sqrt{1 - x^2}\ dx =$$

Suite de l'exemple 5

$$\int \sin^3(t) \cdot \cos^2(t) = \int \cos^2(t) \cdot \sin(t)\,dt - \int \cos^4(t) \cdot \sin(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ \cos^3(t) + \frac{1}{5}\ \cos^5(t) + C\,.$$

Et en revenant à la variable initiale, on obtient :

$$\int x^3 \cdot \sqrt{1-x^2}\ dx = \ -\frac{1}{3}\ \sqrt{1-x^2}^{\ 3} + \frac{1}{5}\ \sqrt{1-x^2}^{\ 5} + C\,.$$

Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

i) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}$,

on peut poser

Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1\,.$

i) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}\,,$

on peut poser

$$x = \sinh(t)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

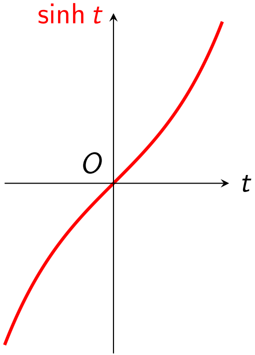
Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

i) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}$,

on peut poser

$$x = \sinh(t)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$



Quelques changements de variable usuels

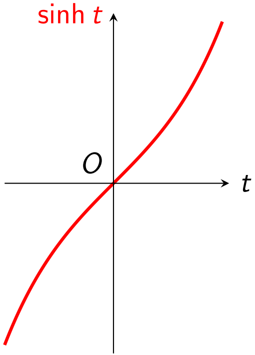
b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

i) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}$,

on peut poser

$$x = \sinh(t)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

$$t = \arg\sinh(x)\,,$$



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

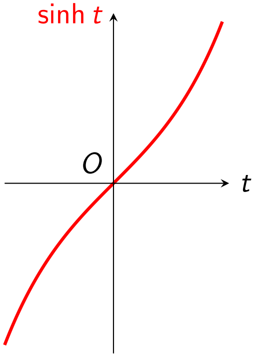
i) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}$,

on peut poser

$$x = \sinh(t)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

$$t = \operatorname{arg\,sinh}(x)\,,$$

$$dx = \cosh(t)\,dt\,,$$



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

i) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{1+x^2}$,

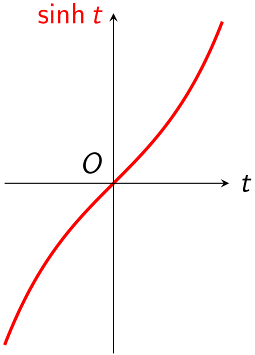
on peut poser

$$x = \sinh(t)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

$$t = \arg\sinh(x)\,,$$

$$dx = \cosh(t)\,dt\,,$$

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh(t)\,.$$



Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\, dx =$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\; dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\; dx =$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\; dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\; dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\; dx\,,$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\, dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\, dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\, dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $\quad \dfrac{x}{2} = \sinh(t)\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $\quad \dfrac{x}{2} = \sinh(t)\,, \quad x = 2\sinh(t)\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\; dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\; dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\; dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $\quad \dfrac{x}{2} = \sinh(t)\,, \quad x = 2\,\sinh(t)\,, \quad dx = 2\,\cosh(t)\,dt\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $\quad \dfrac{x}{2} = \sinh(t)\,, \quad x = 2\,\sinh(t)\,, \quad dx = 2\,\cosh(t)\,dt\,,$

$$t = \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\,,$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $\quad \dfrac{x}{2} = \sinh(t)\,, \quad x = 2\sinh(t)\,, \quad dx = 2\cosh(t)\,dt\,,$

$$t = \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \cosh(t)\,.$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\, dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\, dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\, dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On pose $\quad \dfrac{x}{2} = \sinh(t)\,, \quad x = 2\sinh(t)\,, \quad dx = 2\cosh(t)\, dt\,,$

$$t = \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \cosh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2+4}\, dx =$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \sqrt{4\left(\tfrac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = 2\int \sqrt{\left(\tfrac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

$$\text{On pose} \quad \frac{x}{2} = \sinh(t)\,, \quad x = 2\sinh(t)\,, \quad dx = 2\cosh(t)\,dt\,,$$

$$t = \operatorname{arg\,sinh}\left(\tfrac{x}{2}\right)\,, \quad \sqrt{\left(\tfrac{x}{2}\right)^2+1} = \cosh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = 2\int \cosh(t)\cdot[2\cosh(t)\,dt] =$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 6 :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \int \sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

$$\text{On pose} \quad \frac{x}{2} = \sinh(t)\,, \quad x = 2\sinh(t)\,, \quad dx = 2\cosh(t)\,dt\,,$$

$$t = \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \cosh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = 2\int \cosh(t)\cdot[2\cosh(t)\,dt] = 2\int 2\cosh^2(t)\,dt\,.$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t)$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\cosh^2(t) - 1$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\cosh^2(t) - 1 \;\Rightarrow\; 2\cosh^2(t) = 1 + \cosh(2t)\,.$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\cosh^2(t) - 1 \;\Rightarrow\; 2\cosh^2(t) = 1 + \cosh(2t)\,.$$

$$2\int 2\cosh^2(t)\,dt =$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\cosh^2(t) - 1 \Rightarrow 2\cosh^2(t) = 1 + \cosh(2t)$.

$$2\int 2\cosh^2(t)\,dt = 2\int [1 + \cosh(2t)]\,dt =$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\cosh^2(t) - 1 \;\Rightarrow\; 2\cosh^2(t) = 1 + \cosh(2t)\,.$

$$2\int 2\cosh^2(t)\,dt = 2\int \left[1 + \cosh(2t)\right]\,dt = 2t + \sinh(2t) + C$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\cosh^2(t) - 1 \;\Rightarrow\; 2\cosh^2(t) = 1 + \cosh(2t)\,.$

$$2\int 2\cosh^2(t)\,dt = 2\int [1 + \cosh(2t)]\,dt = 2t + \sinh(2t) + C$$

$$= 2t + 2\sinh(t)\cdot\cosh(t) + C.$$

Suite de l'exemple 6

Et on intègre $2\cosh^2(t)$ en l'exprimant à l'aide de $\cosh(2t)$:

$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 2\cosh^2(t) - 1 \ \Rightarrow\ 2\cosh^2(t) = 1 + \cosh(2t)\,.$

$$2\int 2\cosh^2(t)\,dt = 2\int [1 + \cosh(2t)]\,dt = 2t + \sinh(2t) + C$$

$$= 2t + 2\sinh(t)\cdot\cosh(t) + C.$$

Et en revenant à la variable initiale :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = 2\,\operatorname{arg\,sinh}\left(\tfrac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4} + C.$$

Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1\,.$

Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in]-\infty\,,\, -1] \cup [1\,,\, +\infty[$,

Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[$,

on peut poser

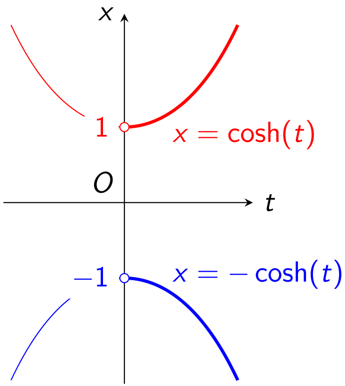
Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in \,]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[$,

on peut poser



Quelques changements de variable usuels

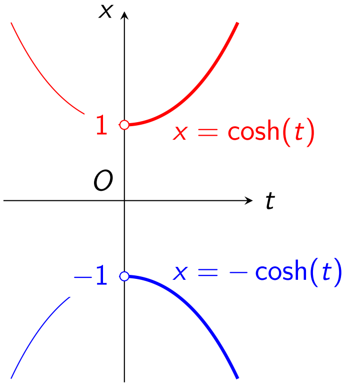
b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in \,]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$,



Quelques changements de variable usuels

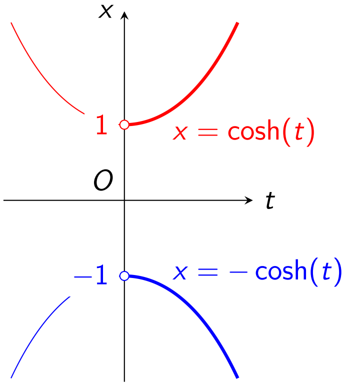
b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$,



Quelques changements de variable usuels

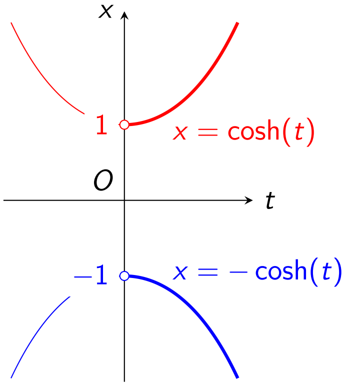
b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}$,

$x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

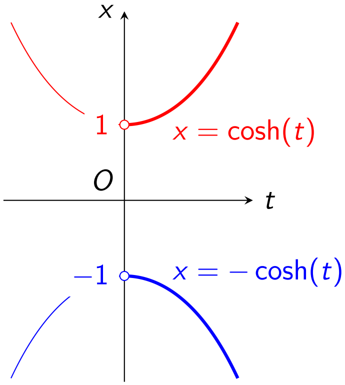
ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = \sinh(t)\, dt$,



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

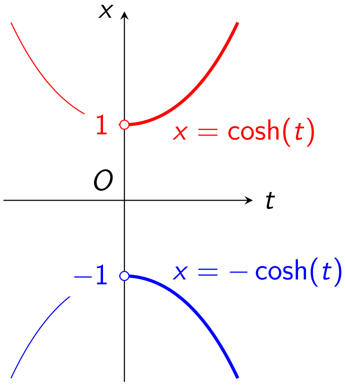
ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = \sinh(t)\, dt$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh(t)$,



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}$,

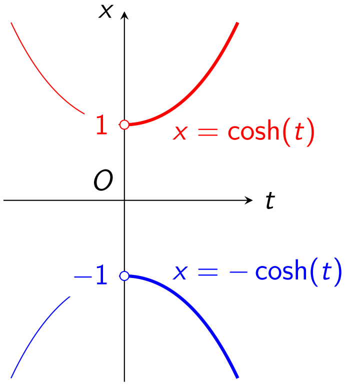
$x \in \,]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = \sinh(t)\,dt$, $\sqrt{x^2-1} = \sinh(t)$,

- pour $x \leq -1$,



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}$,

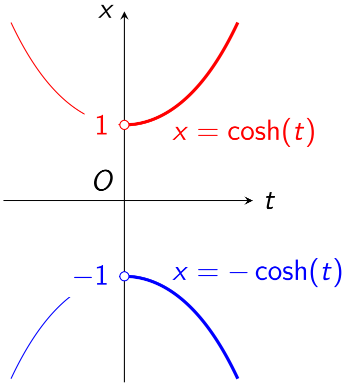
$x \in \,]-\infty\,,\,-1]\cup[1\,,\,+\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = \sinh(t)\,dt$, $\sqrt{x^2-1} = \sinh(t)$,

- pour $x \leq -1$, $x = -\cosh(t)$,



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}$,

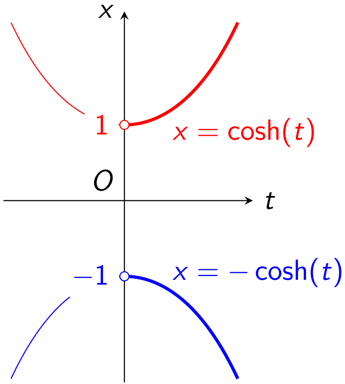
$x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[$,

on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = \sinh(t)\,dt$, $\sqrt{x^2-1} = \sinh(t)$,

- pour $x \leq -1$, $x = -\cosh(t)$, $t \geq 0$,



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2-1}$,

$x \in \,]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[$,

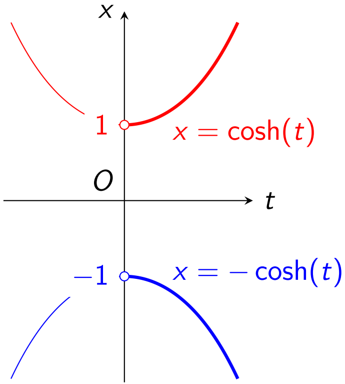
on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = \sinh(t)\,dt$, $\sqrt{x^2-1} = \sinh(t)$,

- pour $x \leq -1$, $x = -\cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = -\sinh(t)\,dt$,



Quelques changements de variable usuels

b) Changements de variable déduits de la relation $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$.

ii) Si l'intégrant est fonction de $\sqrt{x^2 - 1}$,

$x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[$,

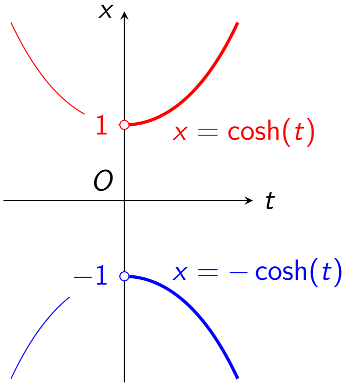
on peut poser

- pour $x \geq 1$, $x = \cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = \sinh(t)\, dt$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh(t)$,

- pour $x \leq -1$, $x = -\cosh(t)$, $t \geq 0$,

  $dx = -\sinh(t)\, dt$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh(t)$.



Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 :

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$,

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,,\,-1]\cup[1\,,\,+\infty[\,.$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,,\quad x \in \,]-\infty\,,-1\,]\cup[\,1\,,+\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,,+\infty\,[\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,] \cup [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[\,.$

- Si $x \in [1\,, +\infty[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(x)\,,$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,]\cup[\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,,$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,,\quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,] \cup [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,,\quad t \geq 0\,,\quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,,\quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,, -1\,] \cup [\,1\,, +\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,, +\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx =$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,] \cup [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot[\,\sinh(t)\,dt\,] =$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,,\quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,]\cup[\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,,\quad t \geq 0\,,\quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,,\quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot[\,\sinh(t)\,dt\,] = \int \sinh^2(t)\,dt\,.$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\, dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,, -1] \cup [1\,, +\infty[\,.$

- Si $x \in [1\,, +\infty[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\, dt\,, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \sinh(t) \cdot [\sinh(t)\, dt] = \int \sinh^2(t)\, dt\,.$$

Et on exprime $\sinh^2(t)$ à partir de $\cosh(2t)$ de la façon suivante :

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,, \quad x \in \left]-\infty\,,\,-1\right] \cup \left[1\,,\,+\infty\right[\,.$

- Si $x \in \left[1\,,\,+\infty\right[$, on pose $x = \cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot[\sinh(t)\,dt] = \int \sinh^2(t)\,dt\,.$$

Et on exprime $\sinh^2(t)$ à partir de $\cosh(2t)$ de la façon suivante :

$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) =$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,, \quad x \in \,]-\infty\,, -1\,] \cup [\,1\,, +\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,, +\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot[\,\sinh(t)\,dt\,] = \int \sinh^2(t)\,dt\,.$$

Et on exprime $\sinh^2(t)$ à partir de $\cosh(2t)$ de la façon suivante :

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \sinh^2(t) = 1 + 2\,\sinh^2(t)$$

Quelques changements de variable usuels, exemples

Exemple 7 : $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx\,,\quad x \in \,]-\infty\,,\,-1\,]\cup[\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Si $x \in [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ on pose $x = \cosh(t)\,,\quad t \geq 0\,,\quad t = \arg\cosh(x)\,,$

$$dx = \sinh(t)\,dt\,,\quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot[\,\sinh(t)\,dt\,] = \int \sinh^2(t)\,dt\,.$$

Et on exprime $\sinh^2(t)$ à partir de $\cosh(2t)$ de la façon suivante :

$$\cosh(2t) = \cosh^2(t)+\sinh^2(t) = 1+2\,\sinh^2(t) \;\Leftrightarrow\; \sinh^2(t) = \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,.$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int \sinh^2(t)\, dt =$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int \sinh^2(t)\, dt = \int \frac{\cosh(2t) - 1}{2}\, dt =$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int \sinh^2(t)\, dt = \int \frac{\cosh(2t) - 1}{2}\, dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \int \sinh^2(t)\, dt = \int \frac{\cosh(2t) - 1}{2}\, dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \sinh(t) \cdot \cosh(t) - \frac{t}{2} + C =$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C.$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \sinh^2(t)\, dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\, dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C.$$

- Si $x \in\,]-\infty\,,\, -1\,]$,

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C\,.$$

- Si $x \in \,]-\infty\,,\, -1]\,,$ on pose $x = -\cosh(t)\,,$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arg\,cosh}(x) + C\,.$$

- Si $x \in \,]-\infty\,,\,-1\,]$, on pose $x = -\cosh(t)\,,\quad t \geq 0\,,$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \int \sinh^2(t)\, dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\, dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C\,.$$

- Si $x \in\,]-\infty\,,\, -1]\,,$ on pose $x = -\cosh(t)\,,\quad t \geq 0\,,\quad t = \arg\cosh(-x)\,,$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C\,.$$

- Si $x \in \left]-\infty\,, -1\right]$, on pose $x = -\cosh(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad t = \arg\cosh(-x)\,,$

$$dx = -\sinh(t)\,dt\,,$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C\,.$$

- Si $x \in \left]-\infty\,,\,-1\right]$, on pose $x = -\cosh(t)\,,\quad t \geq 0\,,\quad t = \arg\cosh(-x)\,,$

$$dx = -\sinh(t)\,dt\,,\quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C\,.$$

- Si $x \in \,]-\infty\,,\,-1\,]$, on pose $x = -\cosh(t)\,,\quad t \geq 0\,,\quad t = \arg\cosh(-x)\,,$

$$dx = -\sinh(t)\,dt\,,\quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx =$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C\,.$$

- Si $x \in]-\infty\,,\,-1]$, on pose $x = -\cosh(t)$, $t \geq 0$, $t = \arg\cosh(-x)$,

$$dx = -\sinh(t)\,dt\,, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot[-\sinh(t)\,dt\,] =$$

Suite de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh^2(t)\,dt = \int \frac{\cosh(2t)-1}{2}\,dt = \frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\arg\cosh(x) + C\,.$$

- Si $x \in]-\infty\,, -1]\,,$ on pose $x = -\cosh(t)\,,$ $t \geq 0\,,$ $t = \arg\cosh(-x)\,,$

$$dx = -\sinh(t)\,dt\,, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh(t)\,.$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sinh(t)\cdot[-\sinh(t)\,dt\,] = -\int \sinh^2(t)\,dt\,,$$

Suite et fin de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = -\int \sinh^2(t)\, dt =$$

Suite et fin de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = -\int \sinh^2(t)\, dt = -\frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + \frac{t}{2} + C$$

Suite et fin de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = -\int \sinh^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}(-x) + C.$$

Suite et fin de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = -\int \sinh^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t)+\frac{t}{2}+C$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\arg\cosh(-x)+C.$$

- En conclusion, on a donc

Suite et fin de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = -\int \sinh^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\arg\cosh(-x) + C.$$

- En conclusion, on a donc

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx =$$

Suite et fin de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = -\int \sinh^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\arg\cosh(-x) + C.$$

- En conclusion, on a donc

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \begin{cases} \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\arg\cosh(-x) + C, & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \end{cases}$$

Suite et fin de l'exemple 7

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = -\int \sinh^2(t)\, dt = -\frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + \frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}(-x) + C\,.$$

- En conclusion, on a donc

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \begin{cases} \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}(-x) + C, & \text{si} \quad x \le -1 \\ \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arg\,cosh}(x) + C, & \text{si} \quad x \ge 1\,. \end{cases}$$