Calcul Intégral

Calcul Intégral

3. Applications géométriques du calcul intégral

3.2 Calcul de volume

3.2 Calcul de volume

Volume d'un corps de révolution

Volume d’un corps de révolution

Volume d'un corps de révolution

Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$

Volume d'un corps de révolution

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f,

Volume d'un corps de révolution

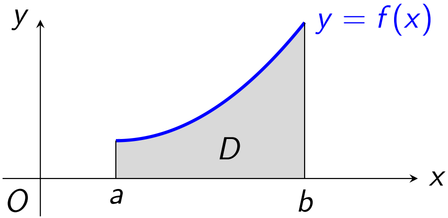
Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f, l'axe Ox

Volume d'un corps de révolution

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.

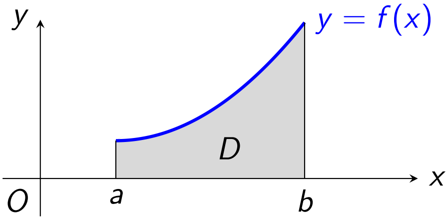
Volume d'un corps de révolution

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.



Volume d'un corps de révolution

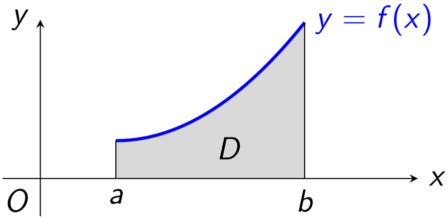
Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.



On cherche à calculer le volume V du corps de révolution

Volume d'un corps de révolution

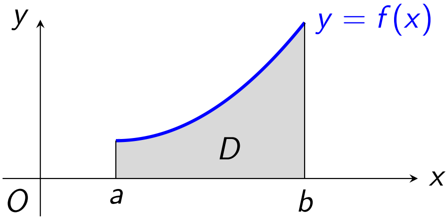
Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.



On cherche à calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D

Volume d'un corps de révolution

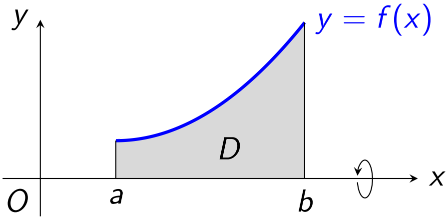
Soient f une fonction continue sur $[a\,,\,b]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.



On cherche à calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.

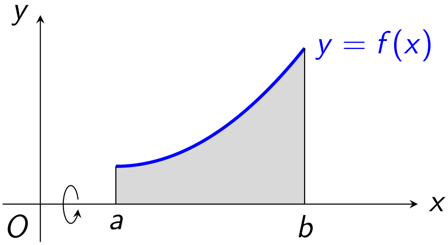
Volume d'un corps de révolution

Soient f une fonction continue sur $[\,a\,,\,b\,]$ et D le domaine du plan limité par le graphe de f, l'axe Ox et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.

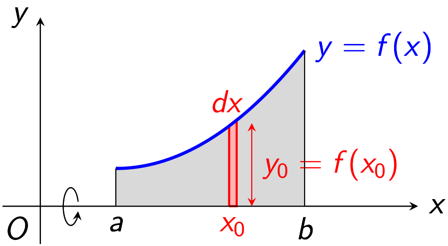


On cherche à calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.

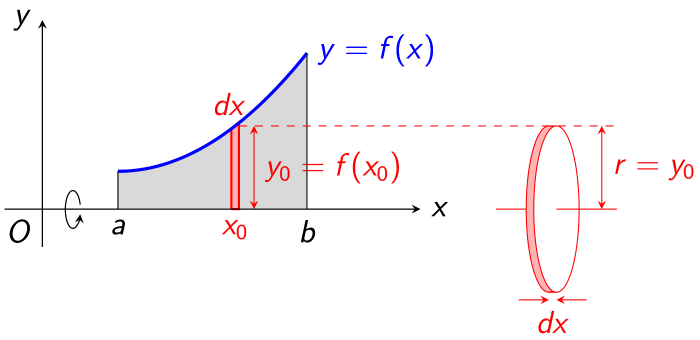
Volume d'un corps de révolution



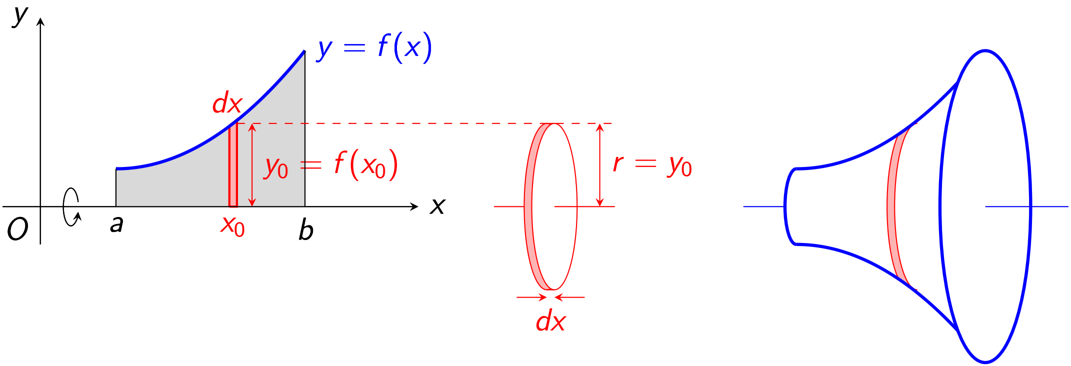
Volume d'un corps de révolution



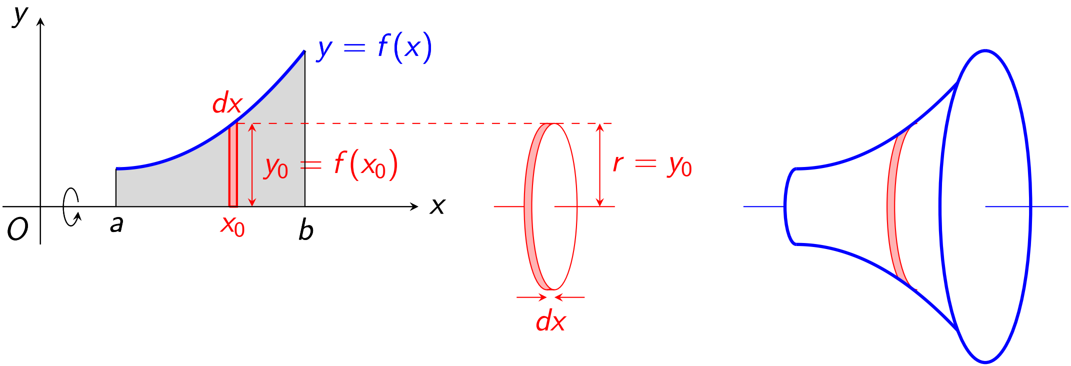
Volume d'un corps de révolution



Volume d'un corps de révolution

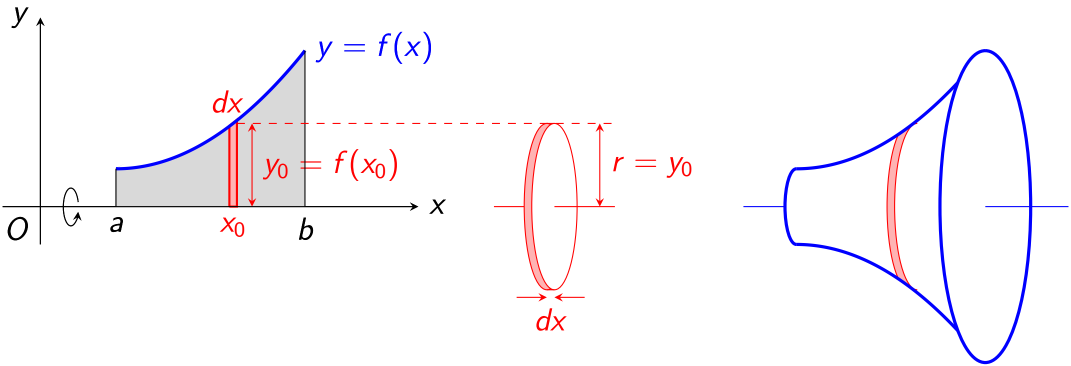


Volume d'un corps de révolution



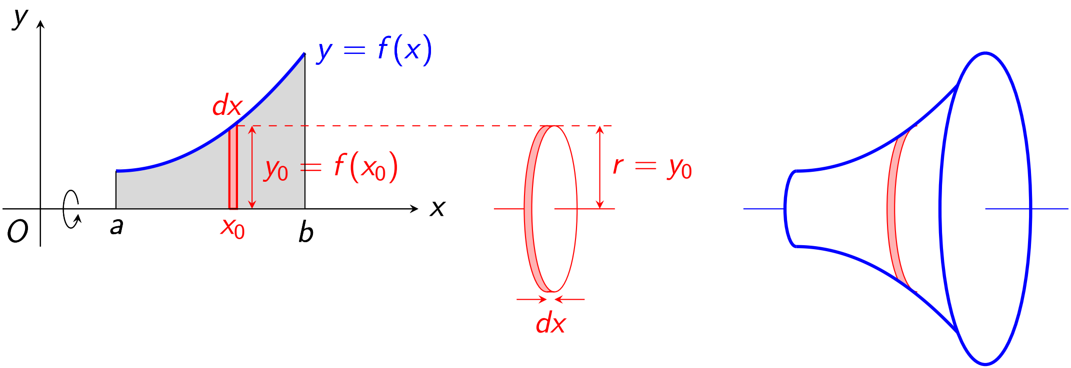
La section du corps de révolution par le plan d'équation $x = x_0$,

Volume d'un corps de révolution



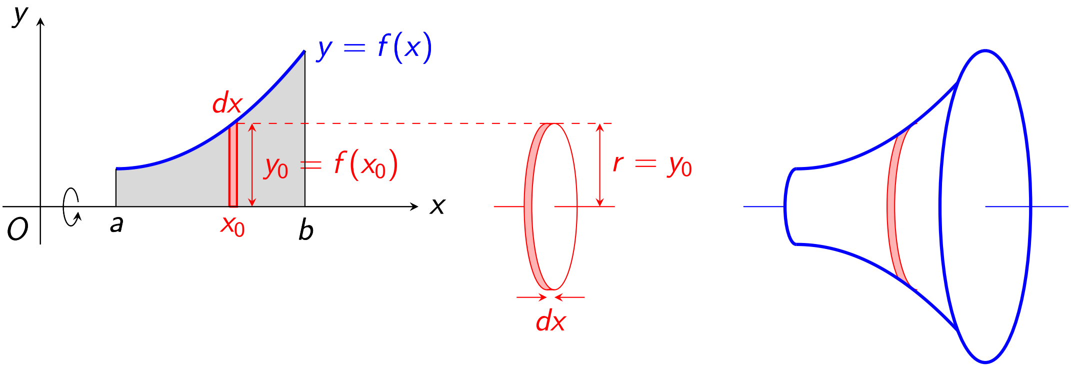
La section du corps de révolution par le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation,

Volume d'un corps de révolution



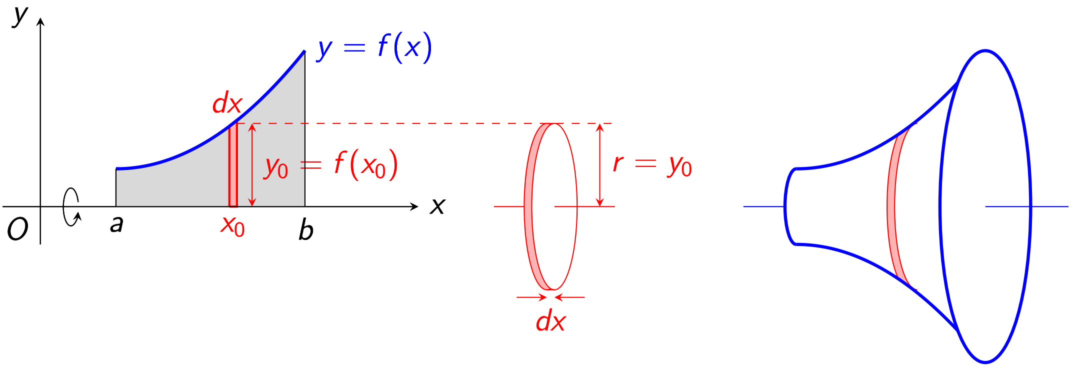
La section du corps de révolution par le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est un disque de rayon $r = y_0 = f(x_0)$.

Volume d'un corps de révolution



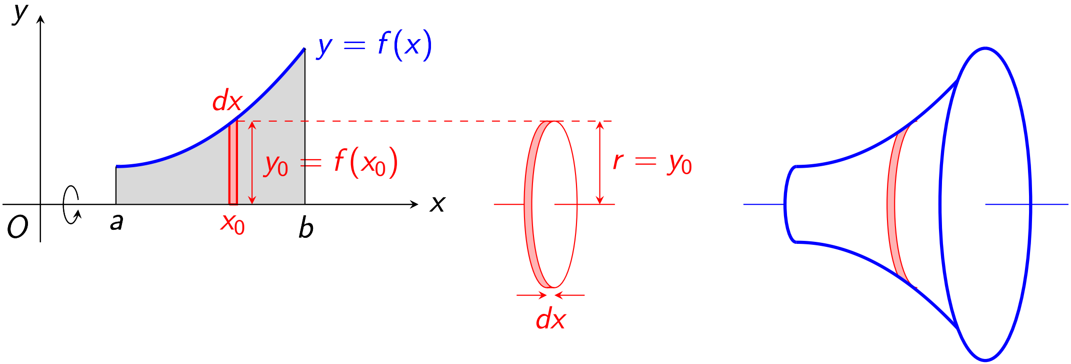
L'aire de ce disque vaut donc $A(x_0) = \pi\, r^2$

Volume d'un corps de révolution



L'aire de ce disque vaut donc $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, y_0^2$

Volume d'un corps de révolution



L'aire de ce disque vaut donc $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, y_0^2 = \pi\, [\, f(x_0)\,]^2$.

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[a, b]$,

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[a, b]$, la somme de Riemann

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[\,a\,,\ b\,]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume V cherché,

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[a, b]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume V cherché, d'autant plus précise que n est grand

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume V cherché, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k sont petits.

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[a, b]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi \, [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume V cherché, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k sont petits. Or

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \, [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

converge,

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume V cherché, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k sont petits. Or

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \quad \sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

converge, car si f est continue sur $[\,a\,,\,b\,]$,

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume V cherché, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k sont petits. Or

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

converge, car si f est continue sur $[\,a\,,\,b\,]$, $\pi\,f^2$ l'est aussi.

Volume d'un corps de révolution

Associée à une partition de l'intervalle $[\,a\,,\,b\,]$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

est une approximation du volume V cherché, d'autant plus précise que n est grand et les Δx_k sont petits. Or

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi\,[f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$$

converge, car si f est continue sur $[\,a\,,\,b\,]$, $\pi\,f^2$ l'est aussi. Donc $\pi\,f^2$ est intégrable au sens de Riemann.

Volume d'un corps de révolution

Par définition,

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k$$

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx\,.$$

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \, [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi \, f^2(x) \, dx \, .$$

Le "volume élémentaire" a pour expression

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \, [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi \, f^2(x) \, dx \, .$

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x) \, dx$

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx\,.$$

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x)\, dx = \pi\, r^2\, dx$

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $V = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \, [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi \, f^2(x) \, dx \, .$

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x) \, dx = \pi \, r^2 \, dx = \pi \, f^2(x) \, dx \, ,$

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi\, f^2(x)\, dx\,.$$

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x)\, dx = \pi\, r^2\, dx = \pi\, f^2(x)\, dx\,,$

où $A(x_0)$ est l'aire de la section du corps de révolution

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx\,.$$

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x)\, dx = \pi\, r^2\, dx = \pi\, f^2(x)\, dx\,,$

où $A(x_0)$ est l'aire de la section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $\quad V = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi \, f^2(x) \, dx \, .$

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x) \, dx = \pi \, r^2 \, dx = \pi \, f^2(x) \, dx \, ,$

où $A(x_0)$ est l'aire de la section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation (plan d'équation $x = x_0$).

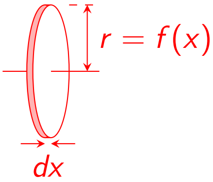
Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx\,.$$

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x)\, dx = \pi\, r^2\, dx = \pi\, f^2(x)\, dx\,,$

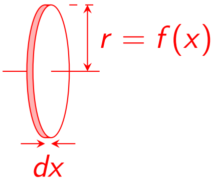
où $A(x_0)$ est l'aire de la section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation (plan d'équation $x = x_0$).



Volume d'un corps de révolution

Par définition, $V = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi\, f^2(x)\, dx\,.$

Le "volume élémentaire" a pour expression $dV = A(x)\, dx = \pi\, r^2\, dx = \pi\, f^2(x)\, dx\,,$ où $A(x_0)$ est l'aire de la section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation (plan d'équation $x = x_0$).



Et le volume V s'obtient

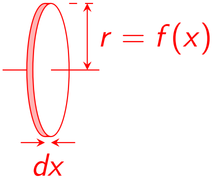
Volume d'un corps de révolution

Par définition, $V = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$.

Le "volume élémentaire" a pour expression

$dV = A(x)\, dx = \pi r^2\, dx = \pi f^2(x)\, dx$,

où $A(x_0)$ est l'aire de la section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation (plan d'équation $x = x_0$).

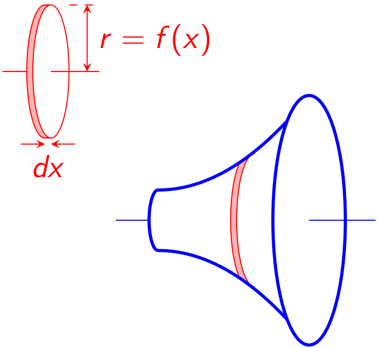


Et le volume V s'obtient en sommant tous les "volumes élémentaires".

Volume d'un corps de révolution

Par définition, $$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi \left[f(t_k)\right]^2 \cdot \Delta x_k = \int_a^b \pi\, f^2(x)\, dx\,.$$

Le "volume élémentaire" a pour expression $dV = A(x)\, dx = \pi\, r^2\, dx = \pi\, f^2(x)\, dx\,,$ où $A(x_0)$ est l'aire de la section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation (plan d'équation $x = x_0$).



Et le volume V s'obtient en sommant tous les "volumes élémentaires".

Exemples

Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$

Exemples

Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f ,

Exemples

Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f , l'axe Ox

Exemples

Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Exemples

Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$. Calculer le volume V du corps de révolution

Exemples

Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D

Exemples

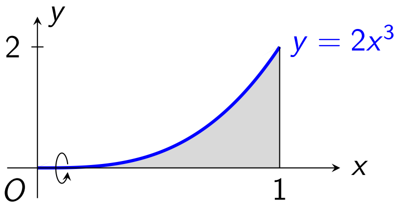
Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.

Exemples

Exemple 1 :

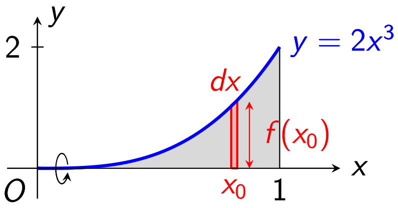
Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.



Exemples

Exemple 1 :

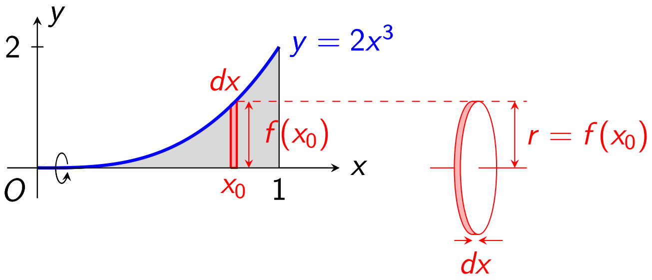
Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.



Exemples

Exemple 1 :

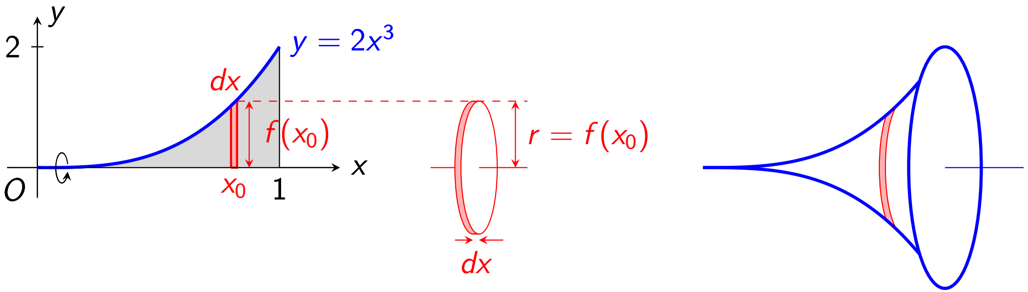
Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.



Exemples

Exemple 1 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox.



Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$,

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \le x_0 \le 1$,

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$,
(perpendiculaire à l'axe de rotation)

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi\, r^2$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0\,,\ 0 \leq x_0 \leq 1\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, f^2(x_0)\,.$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0\,,\ 0 \leq x_0 \leq 1\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, f^2(x_0)\,.$

On en déduit le volume V de ce corps :

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi r^2 = \pi f^2(x_0)$.

On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx$$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi r^2 = \pi f^2(x_0)$.

On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi f^2(x)\, dx$$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0\,,\ 0 \leq x_0 \leq 1\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, f^2(x_0)\,.$

On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi\, f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, f^2(x_0)$.

On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi\, f^2(x)\, dx = \pi \int_0^1 f^2(x)\, dx = \pi \int_0^1 4\, x^6\, dx\,,$$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0$, $0 \le x_0 \le 1$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, f^2(x_0)$.

On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi\, f^2(x)\, dx = \pi \int_0^1 f^2(x)\, dx = \pi \int_0^1 4\, x^6\, dx\,,$$

$$V = \pi \left[\frac{4}{7}\, x^7 \right]_0^1$$

Exemple 1

La section de ce corps de révolution par le plan $x = x_0\,,\ 0 \leq x_0 \leq 1\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = f(x_0)$ et d'aire $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, f^2(x_0)\,.$

On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi\, f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 4\,x^6\,dx\,,$$

$$V = \pi \left[\frac{4}{7}\,x^7\right]_0^1 = \frac{4\,\pi}{7}\,.$$

Exemple 2

Exemple 2 :

Exemple 2

Exemple 2 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$

Exemple 2

Exemple 2 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f ,

Exemple 2

Exemple 2 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy

Exemple 2

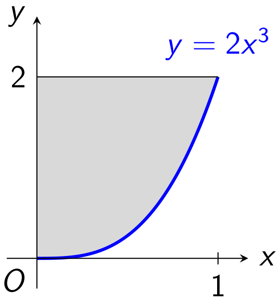
Exemple 2 :

Soient $f(x) = 2x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$.

Exemple 2

Exemple 2 :

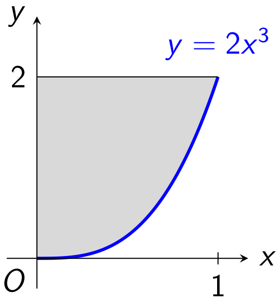
Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$.



Exemple 2

Exemple 2 :

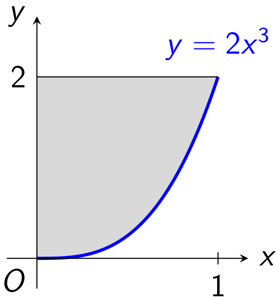
Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$. Calculer le volume V du corps de révolution



Exemple 2

Exemple 2 :

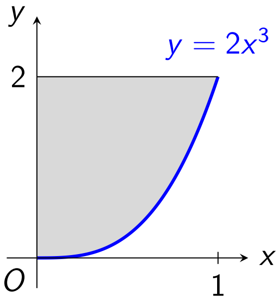
Soient $f(x) = 2x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D



Exemple 2

Exemple 2 :

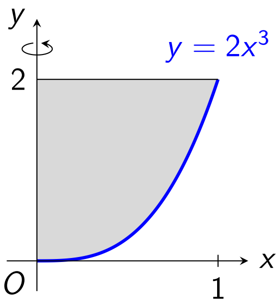
Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Oy.



Exemple 2

Exemple 2 :

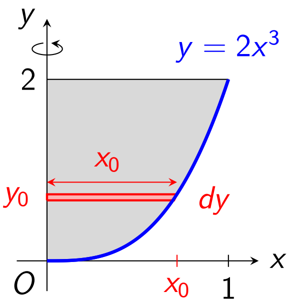
Soient $f(x) = 2x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Oy.



Exemple 2

Exemple 2 :

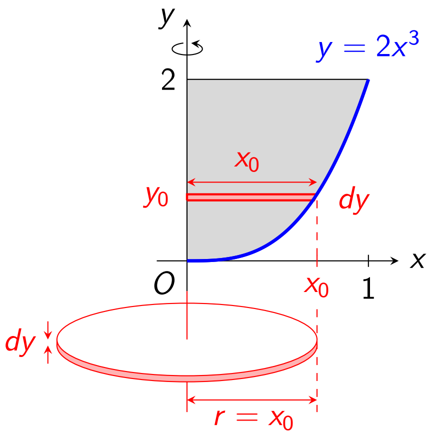
Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Oy.



Exemple 2

Exemple 2 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Oy et la droite horizontale $y = 2$. Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Oy.



Exemple 2

La section de ce corps de révolution

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$,

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$,

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0 \,, \; 0 \leq y_0 \leq 2 \,,$
(perpendiculaire à l'axe de rotation)

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$
(perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2\,.$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy$$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy$$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2(y)\, dy\,,$$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2(y)\, dy\,,$$

avec $\quad y(x) = 2\, x^3$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2(y)\, dy\,,$$

avec $\quad y(x) = 2\,x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x(y) = \left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2(y)\, dy\,,$$

avec $\quad y(x) = 2\, x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x(y) = \left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x^2(y) = \left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\,.$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2(y)\, dy\,,$$

avec $\quad y(x) = 2\,x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x^2(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} dy$$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2(y)\, dy\,,$$

avec $\quad y(x) = 2\, x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x^2(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{6}{5}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\right]_0^2$$

Exemple 2

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \le y_0 \le 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2\, dy = \int_0^2 \pi\, x^2(y)\, dy\,,$$

avec $\quad y(x) = 2\,x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x^2(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}} dy = \pi \left[\frac{6}{5}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\right]_0^2 = \frac{6\,\pi}{5}\,.$$

Exemple 3

Exemple 3 :

Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$

Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f ,

Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f , l'axe Ox

Exemple 3

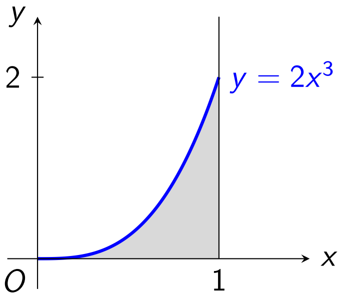
Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

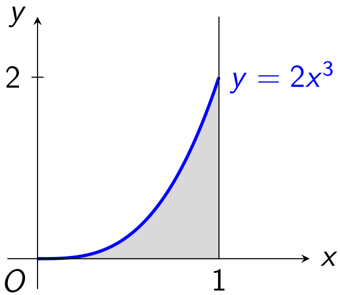


Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Calculer le volume V du corps de révolution

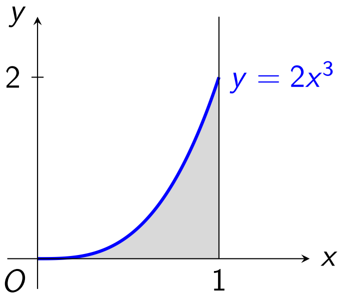


Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D

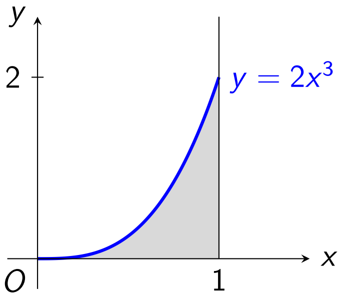


Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de la droite verticale $x = 1$.

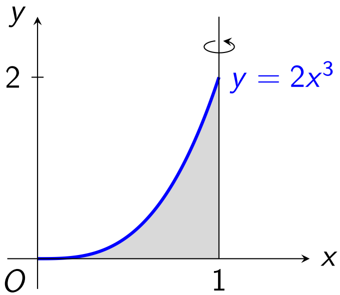


Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de la droite verticale $x = 1$.

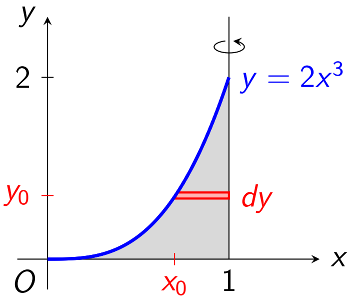


Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de la droite verticale $x = 1$.

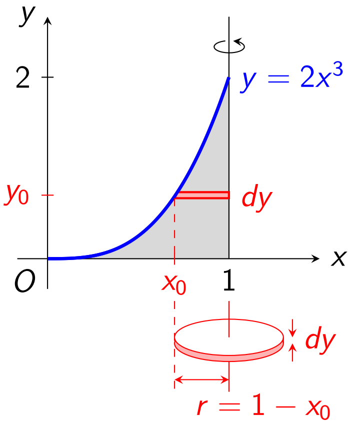


Exemple 3

Exemple 3 :

Soient $f(x) = 2\,x^3$ et D le domaine limité par le graphe de f, l'axe Ox et la droite verticale $x = 1$.

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de la droite verticale $x = 1$.



Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$,

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$
(perpendiculaire à l'axe de rotation)

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$,
(perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2\,.$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy$$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\,(1 - x)^2\, dy$$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\,dy = \int_0^2 \pi\,(1 - x)^2\,dy = \int_0^2 \pi\,[\,1 - x(y)\,]^2\,dy\,,$$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\,(1 - x)^2\, dy = \int_0^2 \pi\,[\,1 - x(y)\,]^2\, dy\,,$$

avec $y(x) = 2\,x^3$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\,(1 - x)^2\, dy = \int_0^2 \pi\,[\,1 - x(y)\,]^2\, dy\,,$$

avec $y(x) = 2\,x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x(y) = \left(\,\frac{y}{2}\,\right)^{\frac{1}{3}}$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\,(1 - x)^2\, dy = \int_0^2 \pi\,[\,1 - x(y)\,]^2\, dy\,,$$

avec $y(x) = 2\,x^3 \;\Leftrightarrow\; x(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \;\Leftrightarrow\; [\,1 - x(y)\,]^2 = 1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \le y_0 \le 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\,(1-x)^2\, dy = \int_0^2 \pi\,[\,1 - x(y)\,]^2\, dy\,,$$

avec $y(x) = 2\,x^3 \;\Leftrightarrow\; x(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \;\Leftrightarrow\; [\,1 - x(y)\,]^2 = 1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$$V = \pi \int_0^2 \left[\,1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\,\right] dy$$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 2$, (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2$. On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\,(1-x)^2\, dy = \int_0^2 \pi\,[\,1 - x(y)\,]^2\, dy\,,$$

avec $y(x) = 2\,x^3 \;\Leftrightarrow\; x(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \;\Leftrightarrow\; [\,1 - x(y)\,]^2 = 1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$$V = \pi \int_0^2 \left[\,1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] dy = \pi \left[\,y - 3\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{5}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\right]_0^2$$

Exemple 3

La section de ce corps de révolution par le plan $y = y_0\,,\ 0 \leq y_0 \leq 2\,,$ (perpendiculaire à l'axe de rotation) est un disque de rayon $r = 1 - x_0$ et d'aire $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\,(1 - x_0)^2\,.$ On en déduit le volume V de ce corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\, dy = \int_0^2 \pi\,(1-x)^2\, dy = \int_0^2 \pi\,[\,1 - x(y)\,]^2\, dy\,,$$

avec $y(x) = 2\,x^3 \ \Leftrightarrow\ x(y) = \left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \ \Leftrightarrow\ [\,1 - x(y)\,]^2 = 1 - 2\left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$

$$V = \pi \int_0^2 \left[1 - 2\left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] dy = \pi\left[y - 3\left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{4}{3}} + \tfrac{6}{5}\left(\tfrac{y}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\right]_0^2 = \frac{\pi}{5}\,.$$

Exemple 4

Exemple 4 :

Exemple 4

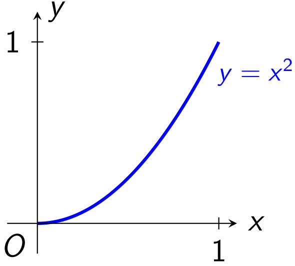
Exemple 4 :

Soient $y = x^2$,

Exemple 4

Exemple 4 :

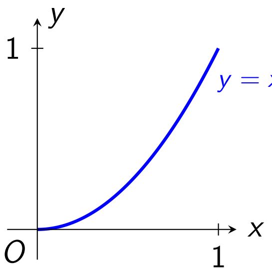
Soient $y = x^2$,



Exemple 4

Exemple 4 :

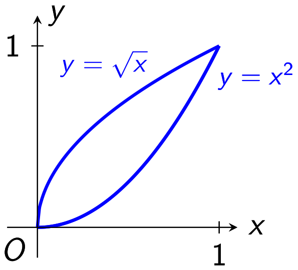
Soient $y = x^2\,, \quad y = \sqrt{x}\,, \quad 0 \leq x \leq 1$



Exemple 4

Exemple 4 :

Soient $y = x^2\,, \quad y = \sqrt{x}\,, \quad 0 \leq x \leq 1$



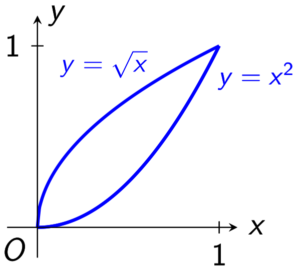
Exemple 4

Exemple 4 :

Soient $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$

et D le domaine limité par les deux arcs

de paraboles .



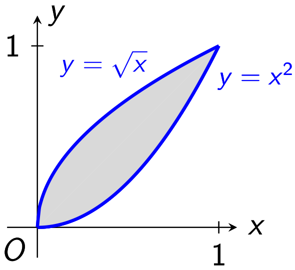
Exemple 4

Exemple 4 :

Soient $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$

et D le domaine limité par les deux arcs

de paraboles .



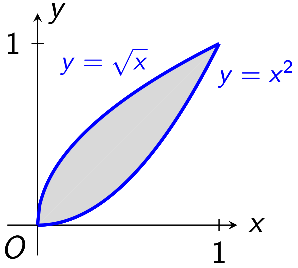
Exemple 4

Exemple 4 :

Soient $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$

et D le domaine limité par les deux arcs de paraboles .

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D

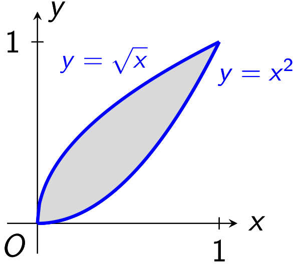


Exemple 4

Exemple 4 :

Soient $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$ et D le domaine limité par les deux arcs de paraboles .

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox .



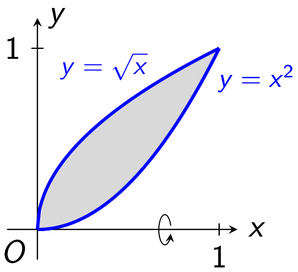
Exemple 4

Exemple 4 :

Soient $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$

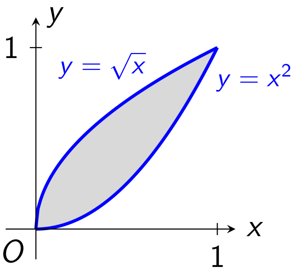
et D le domaine limité par les deux arcs de paraboles .

Calculer le volume V du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe Ox .



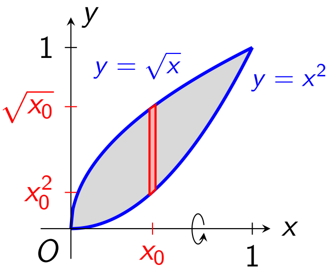
Exemple 4

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation,



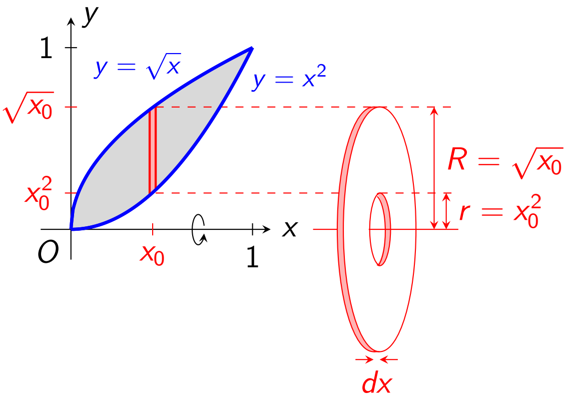
Exemple 4

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation,



Exemple 4

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est une couronne de rayon extérieur $R = \sqrt{x_0}$ et de rayon intérieur $r = x_0^2$.

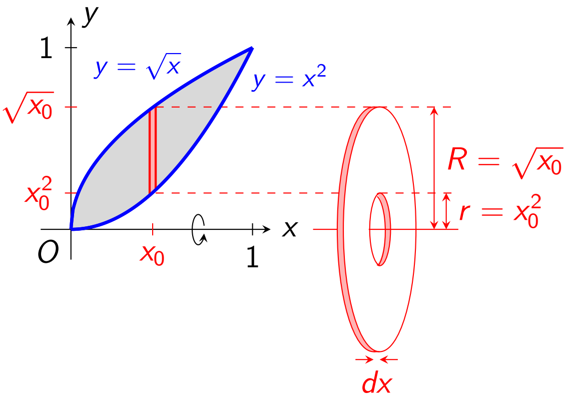


Exemple 4

La section de ce corps par le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est une couronne de rayon extérieur $R = \sqrt{x_0}$ et de rayon intérieur $r = x_0^2$.

Son aire vaut

$A(x_0) = \pi\, R^2 - \pi\, r^2 = \pi\, [\, x_0 - x_0^4\,]$.



Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes,

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution en sommant ces tranches de $x = 0$ à $x = 1$:

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution en sommant ces tranches de $x = 0$ à $x = 1$:

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx$$

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution en sommant ces tranches de $x = 0$ à $x = 1$:

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi\left[\,x - x^4\,\right]dx$$

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution en sommant ces tranches de $x = 0$ à $x = 1$:

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi \left[x - x^4 \right] dx = \pi \int_0^1 \left[x - x^4 \right] dx \,,$$

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution en sommant ces tranches de $x = 0$ à $x = 1$:

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi \left[x - x^4 \right] dx = \pi \int_0^1 \left[x - x^4 \right] dx \,,$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution en sommant ces tranches de $x = 0$ à $x = 1$:

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi \left[\, x - x^4 \,\right] dx = \pi \int_0^1 \left[\, x - x^4 \,\right] dx\,,$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right]$$

Exemple 4

Les volumes élémentaires sont ici des tranches de couronnes, de section d'aire $A(x)$ et d'épaisseur dx.

On en déduit le volume V du corps de révolution en sommant ces tranches de $x = 0$ à $x = 1$:

$$V = \int_0^1 A(x)\, dx = \int_0^1 \pi \left[x - x^4 \right] dx = \pi \int_0^1 \left[x - x^4 \right] dx \,,$$

$$V = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right] = \frac{3\pi}{10} \,.$$

Exemple 5

Exemple 5 :

Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement

par

Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

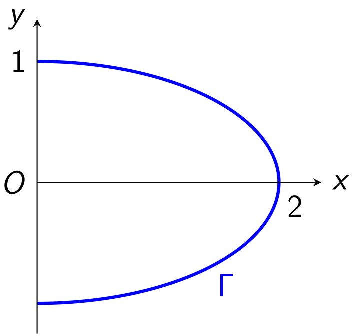
$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}]\,.$$

Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\, \tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$



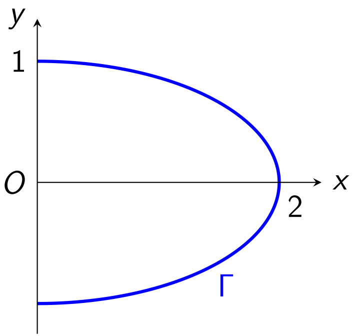
Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right].$$

On considère le domaine D du plan, limité par Γ,



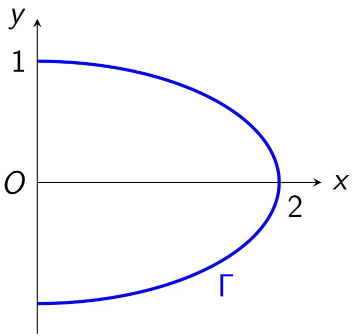
Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\, \tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$

On considère le domaine D du plan, limité par Γ, la droite verticale $x = 1$,



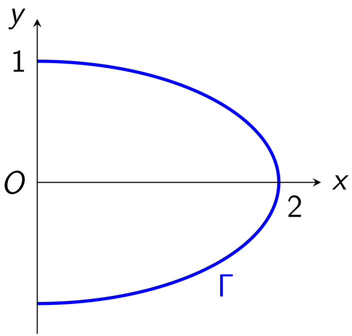
Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\ \tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$

On considère le domaine D du plan, limité par Γ, la droite verticale $x = 1$, $(x \geq 1)$



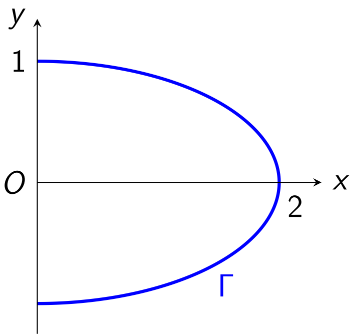
Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$

On considère le domaine D du plan, limité par Γ, la droite verticale $x = 1$, $(x \geq 1)$ et la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$,



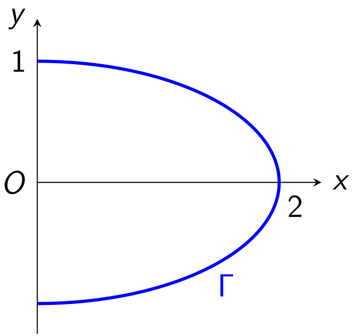
Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right].$$

On considère le domaine D du plan, limité par Γ, la droite verticale $x = 1$, $(x \geq 1)$ et la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$, $(y \geq -\frac{1}{2})$.



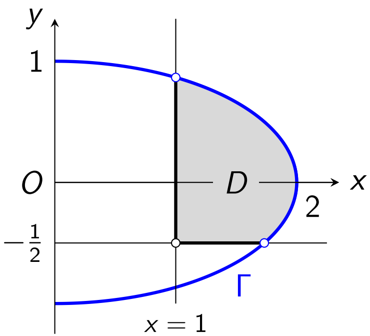
Exemple 5

Exemple 5 :

Soit Γ l'arc d'ellipse défini paramétriquement par

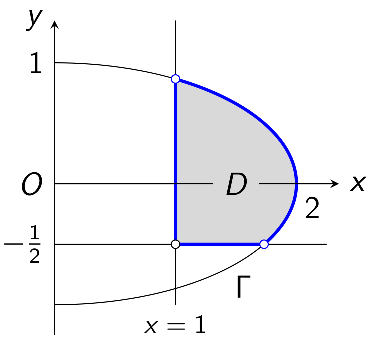
$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = \sin(t)\,, \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\, \tfrac{\pi}{2}]\,.$$

On considère le domaine D du plan, limité par Γ, la droite verticale $x = 1$, $(x \geq 1)$ et la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$, $(y \geq -\frac{1}{2})$.



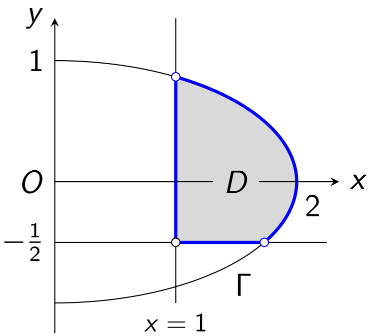
Exemple 5

On cherche à calculer le volume du corps de révolution



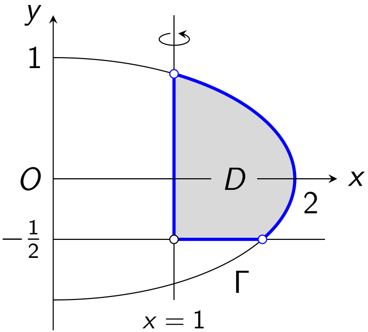
Exemple 5

On cherche à calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de la droite verticale d'équation $x = 1$.



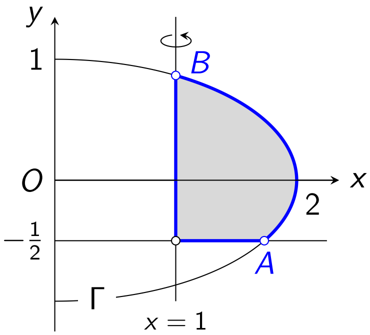
Exemple 5

On cherche à calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de la droite verticale d'équation $x = 1$.



Exemple 5

- Modélisation géométrique

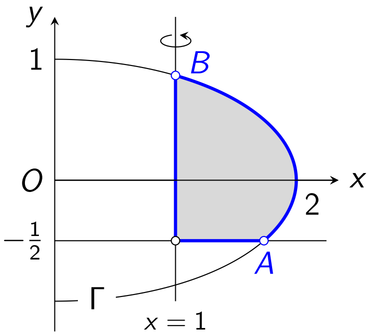


Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation

  $y = y_0$

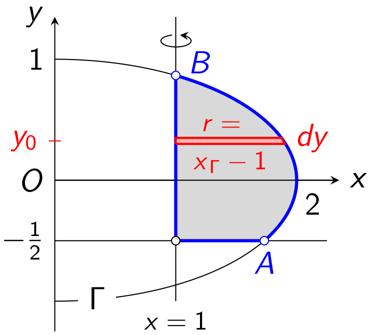


Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation

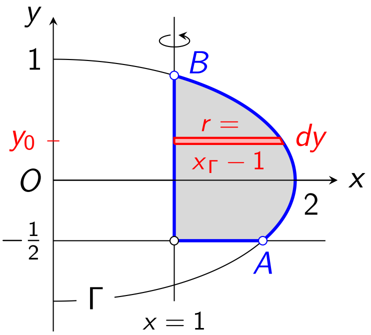
  $y = y_0$



Exemple 5

- Modélisation géométrique

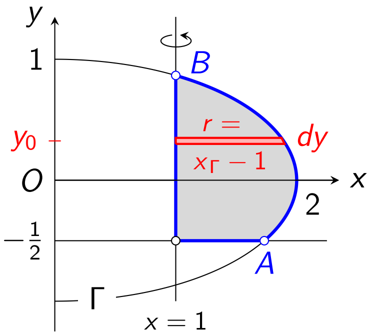
  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse



Exemple 5

- Modélisation géométrique

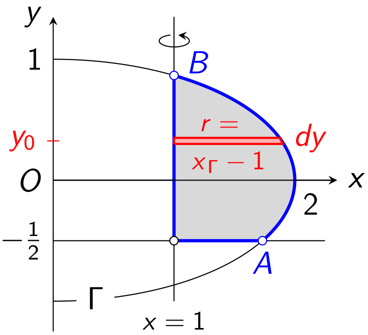
  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$:



Exemple 5

- Modélisation géométrique

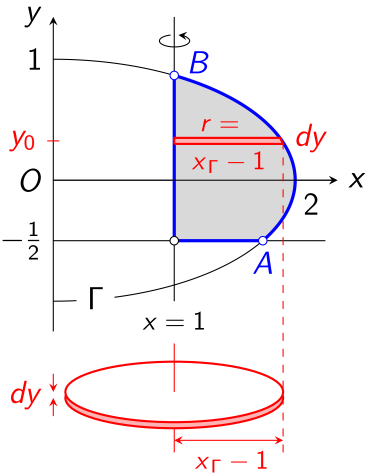
  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$: $r = x_\Gamma - 1$.



Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$: $r = x_\Gamma - 1$.

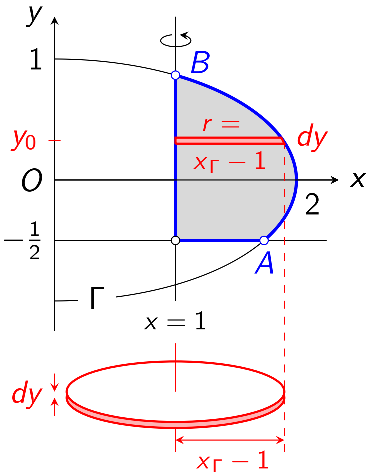


Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$: $r = x_\Gamma - 1$. L'aire de cette section vaut donc

  $\mathcal{A} = \pi\, r^2$

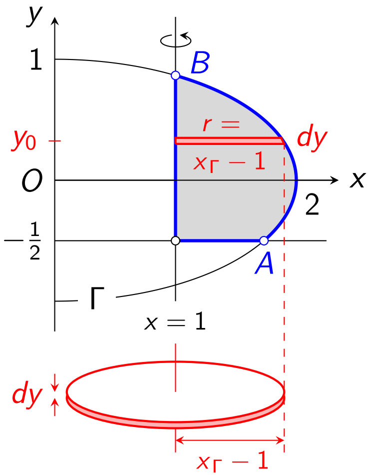


Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$: $r = x_\Gamma - 1$. L'aire de cette section vaut donc

  $\mathcal{A} = \pi\, r^2 = \pi\,[\,x_\Gamma - 1\,]^2$.



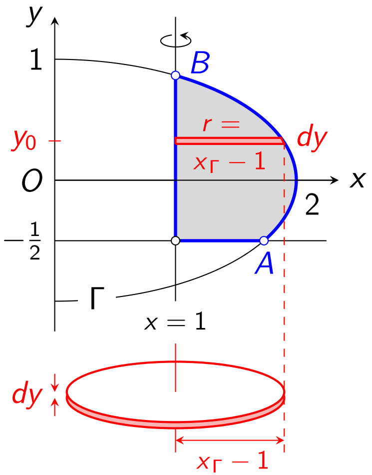
Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$: $r = x_\Gamma - 1$. L'aire de cette section vaut donc

  $\mathcal{A} = \pi\, r^2 = \pi \left[x_\Gamma - 1 \right]^2 .$

  Et le volume élémentaire est un cylindre



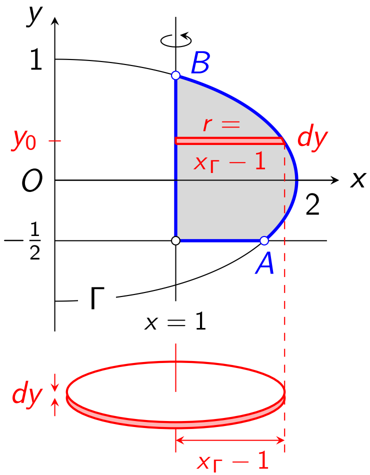
Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$: $r = x_\Gamma - 1$. L'aire de cette section vaut donc

  $\mathcal{A} = \pi\, r^2 = \pi\,[\,x_\Gamma - 1\,]^2$.

  Et le volume élémentaire est un cylindre dont l'aire de la base vaut $\mathcal{A}$



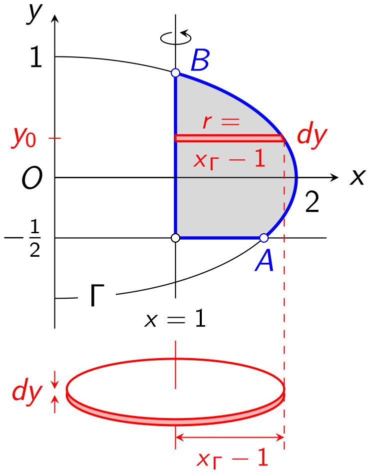
Exemple 5

- Modélisation géométrique

  La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque dont le rayon est la différence d'abscisse entre l'arc Γ et la droite verticale $x = 1$: $r = x_\Gamma - 1$. L'aire de cette section vaut donc

  $\mathcal{A} = \pi\, r^2 = \pi\, [\, x_\Gamma - 1\,]^2$.

  Et le volume élémentaire est un cylindre dont l'aire de la base vaut $\mathcal{A}$ et l'épaisseur dy.



Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{A} \cdot dy$$

Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{A} \cdot dy = \int_{y_A}^{y_B} \pi \left[x_\Gamma - 1 \right]^2 dy \,.$$

Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{A} \cdot dy = \int_{y_A}^{y_B} \pi \left[x_\Gamma - 1 \right]^2 dy \,.$$

- Traduction en fonction de la variable t :

Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{A} \cdot dy = \int_{y_A}^{y_B} \pi \left[x_\Gamma - 1 \right]^2 dy \,.$$

- Traduction en fonction de la variable t :
    - $x_\Gamma = x(t) = 2 \cos(t)$,

Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{A} \cdot dy = \int_{y_A}^{y_B} \pi \left[x_\Gamma - 1 \right]^2 dy \, .$$

- Traduction en fonction de la variable t :
  - $x_\Gamma = x(t) = 2\,\cos(t)$,
  - $dy = \dot{y}(t)\,dt = \cos(t)\,dt$,

Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{A} \cdot dy = \int_{y_A}^{y_B} \pi \left[x_\Gamma - 1 \right]^2 dy \, .$$

- Traduction en fonction de la variable t :
  - $*$ $x_\Gamma = x(t) = 2\cos(t)$,
  - $*$ $dy = \dot{y}(t)\, dt = \cos(t)\, dt$,
  - $*$ $y_A = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(t_A) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_A = -\frac{\pi}{6}$,

Exemple 5

On en déduit l'expression du volume V de ce corps :

$$V = \int_{y_A}^{y_B} \mathcal{A} \cdot dy = \int_{y_A}^{y_B} \pi \left[x_\Gamma - 1 \right]^2 dy \, .$$

- Traduction en fonction de la variable t :
  - $*$ $x_\Gamma = x(t) = 2\cos(t)$,
  - $*$ $dy = \dot{y}(t)\, dt = \cos(t)\, dt$,
  - $*$ $y_A = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(t_A) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_A = -\frac{\pi}{6}$,
  - $*$ $x_B = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos(t_B) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(t_B) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{\pi}{3}$.

Exemple 5

$$V = \pi \int_{t_A}^{t_B} [\, x(t) - 1\,]^2 \, \dot{y}(t) \, dt$$

Exemple 5

$$V = \pi \int_{t_A}^{t_B} [\,x(t) - 1\,]^2\,\dot{y}(t)\,dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [\,2\,\cos(t) - 1\,]^2 \cos(t)\,dt\,.$$

Exemple 5

$$V = \pi \int_{t_A}^{t_B} \left[x(t) - 1 \right]^2 \dot{y}(t) \, dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[2 \cos(t) - 1 \right]^2 \cos(t) \, dt \, .$$

- Intégration :

Exemple 5

$$V = \pi \int_{t_A}^{t_B} \left[x(t) - 1\right]^2 \dot{y}(t)\, dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[2 \cos(t) - 1\right]^2 \cos(t)\, dt\,.$$

- Intégration :

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[4 \cos^2(t) - 4 \cos(t) + 1\right] \cos(t)\, dt$$

Exemple 5

$$V = \pi \int_{t_A}^{t_B} [x(t) - 1]^2 \, \dot{y}(t) \, dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [2 \cos(t) - 1]^2 \cos(t) \, dt \, .$$

- Intégration :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[4 \cos^2(t) - 4 \cos(t) + 1 \right] \cos(t) \, dt \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[4 \left(1 - \sin^2(t) \right) - 4 \cos(t) + 1 \right] \cos(t) \, dt \end{aligned}$$

Exemple 5

$$V = \pi \int_{t_A}^{t_B} \left[x(t) - 1 \right]^2 \dot{y}(t)\, dt = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[2 \cos(t) - 1 \right]^2 \cos(t)\, dt\, .$$

- Intégration :

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[4 \cos^2(t) - 4 \cos(t) + 1 \right] \cos(t)\, dt \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[4 \left(1 - \sin^2(t) \right) - 4 \cos(t) + 1 \right] \cos(t)\, dt \\
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[5 \cos(t) - 4 \sin^2(t) \cos(t) - 4 \cos^2(t) \right] dt
\end{aligned}$$

Exemple 5

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2(t) = \cos(2t) + 1\right]$$

Exemple 5

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2(t) = \cos(2t) + 1\right]$$

$$V \quad = \quad \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\, 5\cos(t) - 4\sin^2(t)\cos(t) - 2 - 2\cos(2t) \,\right] dt$$

Exemple 5

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2(t) = \cos(2t) + 1\right]$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[5\cos(t) - 4\sin^2(t)\cos(t) - 2 - 2\cos(2t)\right] dt \\ &= \pi \left[5\sin(t) - \frac{4}{3}\sin^3(t) - 2t - \sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Exemple 5

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\,\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2\,\cos^2(t) = \cos(2t) + 1\right]$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\,5\,\cos(t) - 4\,\sin^2(t)\,\cos(t) - 2 - 2\,\cos(2t)\,\right] dt \\
&= \pi \left[\,5\,\sin(t) - \tfrac{4}{3}\,\sin^3(t) - 2t - \sin(2t)\,\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \pi \left[\left(\frac{5\,\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Exemple 5

$$\left[\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2(t) = \cos(2t) + 1\right]$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[5\cos(t) - 4\sin^2(t)\cos(t) - 2 - 2\cos(2t)\right] dt \\
&= \pi \left[5\sin(t) - \tfrac{4}{3}\sin^3(t) - 2t - \sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \pi \left[\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\
&= \pi\left(\sqrt{3} + \tfrac{7}{3} - \pi\right).
\end{aligned}$$