# Calcul Intégral

# Calcul Intégral

## 2. L'intégrale indéfinie

## 2.2 Recherche de primitives

## 2.2 Recherche de primitives

### 2.2.4 Intégration des fonctions rationnelles

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** :

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples,

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x^2+1)}$$

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,.$$

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,.$$

$$\int f(x)\,dx =$$

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,.$$

$$\int f(x)\,dx = -\ln|x| +$$

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x \cdot (x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,.$$

$$\int f(x)\,dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +$$

# Décomposition en éléments simples

**Exemple** : Comment intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3+x}$ ?

La bonne idée est de décomposer $f(x)$ en une somme de fonctions rationnelles plus simples, donc plus faciles à intégrer :

$$f(x) = \frac{x-1}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+1} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,.$$

$$\int f(x)\,dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + C\,.$$

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle,

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$.

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas,

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas, on effectue la division euclidienne de $P$ par $Q$ :

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas, on effectue la division euclidienne de $P$ par $Q$ :

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)\,,$$

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas, on effectue la division euclidienne de $P$ par $Q$ :

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,,$$

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\, Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas, on effectue la division euclidienne de $P$ par $Q$ :

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,,$$

$$\text{avec} \quad \deg(R) < \deg(Q)\,.$$

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas, on effectue la division euclidienne de $P$ par $Q$ :

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,,$$

$$\text{avec} \quad \deg(R) < \deg(Q)\,.$$

**Exemple** :

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas, on effectue la division euclidienne de $P$ par $Q$ :

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,,$$

$$\text{avec} \quad \deg(R) < \deg(Q)\,.$$

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^7 + 2}{x^4 + x} =$

# Première étape

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, $P,\ Q \in \mathbb{R}[x]$.

On commence par vérifier que $f$ est telle que $\deg(P) < \deg(Q)$.

Si ce n'est pas le cas, on effectue la division euclidienne de $P$ par $Q$ :

$$P(x) = P_1(x) \cdot Q(x) + R(x)\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\,,$$

$$\text{avec} \quad \deg(R) < \deg(Q)\,.$$

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^7 + 2}{x^4 + x} = (x^3 - 1) + \dfrac{x + 2}{x^4 + x}\,.$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel :

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré et ceux du deuxième degré à discriminant négatif.

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré et ceux du deuxième degré à discriminant négatif.

**Exemple** :

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré et ceux du deuxième degré à discriminant négatif.

**Exemple** : $x^4 + 4$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$,

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré et ceux du deuxième degré à discriminant négatif.

**Exemple** : $x^4 + 4$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$, mais il est réductible dans $\mathbb{R}[x]$ :

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré et ceux du deuxième degré à discriminant négatif.

**Exemple** : $x^4 + 4$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$, mais il est réductible dans $\mathbb{R}[x]$ :

$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré et ceux du deuxième degré à discriminant négatif.

**Exemple** : $x^4 + 4$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$, mais il est réductible dans $\mathbb{R}[x]$ :

$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

On considère la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$.

La décomposition de $f$ en éléments simples se base sur la décomposition du dénominateur $Q(x)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

Rappel : les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont ceux du premier degré et ceux du deuxième degré à discriminant négatif.

**Exemple** : $x^4 + 4$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$, mais il est réductible dans $\mathbb{R}[x]$ :

$$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)\,(x^2 - 2x + 2).$$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité,

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité, on suppose que $Q(x)$ est unitaire

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité, on suppose que $Q(x)$ est unitaire (son coefficient dominant vaut 1).

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité, on suppose que $Q(x)$ est unitaire (son coefficient dominant vaut 1).

$$Q(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_p)^{n_p}}_{\text{irréductibles du premier degré}}$$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité, on suppose que $Q(x)$ est unitaire (son coefficient dominant vaut 1).

$$Q(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_p)^{n_p}}_{\text{irréductibles du premier degré}} \cdot \underbrace{(x^2+2a_1x+b_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+2a_qx+b_q)^{m_q}}_{\text{irréductibles du deuxième degré}}$$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité, on suppose que $Q(x)$ est unitaire (son coefficient dominant vaut 1).

$$Q(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_p)^{n_p}}_{\text{irréductibles du premier degré}} \cdot \underbrace{(x^2+2a_1x+b_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+2a_qx+b_q)^{m_q}}_{\text{irréductibles du deuxième degré}}$$

avec $\Delta'_i = a_i^2 - b_i < 0\,,\ (\,1 \leq i \leq q\,)$

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité, on suppose que $Q(x)$ est unitaire (son coefficient dominant vaut 1).

$$Q(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_p)^{n_p}}_{\text{irréductibles du premier degré}} \cdot \underbrace{(x^2+2a_1x+b_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+2a_qx+b_q)^{m_q}}_{\text{irréductibles du deuxième degré}}$$

avec $\Delta_i' = a_i^2 - b_i < 0\,,\ (\,1 \leq i \leq q\,)$ car les deuxièmes degrés sont irréductibles

# Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

Sans restreindre la généralité, on suppose que $Q(x)$ est unitaire (son coefficient dominant vaut 1).

$$Q(x) = \underbrace{(x-\alpha_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_p)^{n_p}}_{\text{irréductibles du premier degré}} \cdot \underbrace{(x^2+2a_1x+b_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+2a_qx+b_q)^{m_q}}_{\text{irréductibles du deuxième degré}}$$

avec $\Delta_i' = a_i^2 - b_i < 0\,,\ (\,1 \leq i \leq q\,)$ car les deuxièmes degrés sont irréductibles

et $\quad n_1 + \cdots + n_p + 2\,(m_1 + \cdots + m_q) = \deg(Q)\,.$

# Décomposition en éléments simples

On affirme alors

# Décomposition en éléments simples

On affirme alors que la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ( $\deg P < \deg Q$ )

# Décomposition en éléments simples

On affirme alors que la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ( $\deg P < \deg Q$ ) peut être décomposée en une somme d'éléments simples de la façon suivante :

# Décomposition en éléments simples

On affirme alors que la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ( $\deg P < \deg Q$ )

peut être décomposée en une somme d'éléments simples de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} =$$

# Décomposition en éléments simples

On affirme alors que la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $(\deg P < \deg Q)$

peut être décomposée en une somme d'éléments simples de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{in_i}}{(x-\alpha_i)^{n_i}}}_{\text{éléments simples de première espèce}}$$

# Décomposition en éléments simples

On affirme alors que la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ( $\deg P < \deg Q$ )

peut être décomposée en une somme d'éléments simples de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{in_i}}{(x-\alpha_i)^{n_i}}}_{\text{éléments simples de première espèce}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \underbrace{\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2+2a_jx+b_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2+2a_jx+b_j)^2} + \cdots + \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{(x^2+2a_jx+b_j)^{m_j}}}_{\text{éléments simples de deuxième espèce}},$$

# Décomposition en éléments simples

On affirme alors que la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ( $\deg P < \deg Q$ )

peut être décomposée en une somme d'éléments simples de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\frac{A_{i1}}{x-\alpha_i} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{in_i}}{(x-\alpha_i)^{n_i}}}_{\text{éléments simples de première espèce}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \underbrace{\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2+2a_jx+b_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2+2a_jx+b_j)^2} + \cdots + \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{(x^2+2a_jx+b_j)^{m_j}}}_{\text{éléments simples de deuxième espèce}},$$

où les éléments $A_{ik}$ , $B_{jk}$ , $C_{jk}$ sont des coefficients réels.

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} =$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \dfrac{a}{x+2}$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2} + \dfrac{c}{(x+2)^3}$ ,

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2} + \dfrac{c}{(x+2)^3}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^3\,(x+2)^2} =$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x}$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2} + \dfrac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$

ii) $g(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3}$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2}$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2},$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2} + \dfrac{c}{(x+2)^3}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$

ii) $g(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^3\,(x+2)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3} + \dfrac{d}{x+2} + \dfrac{e}{(x+2)^2}\,, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\,.$

iii) $h(x) = \dfrac{x^3+3}{x\,(x^2+x+2)^2} =$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

iii) $$h(x) = \frac{x^3 + 3}{x\,(x^2 + x + 2)^2} = \frac{a}{x}$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 (x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

iii) $$h(x) = \frac{x^3 + 3}{x (x^2 + x + 2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 2}$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

iii) $$h(x) = \frac{x^3 + 3}{x\,(x^2 + x + 2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 2} + \frac{dx + e}{(x^2 + x + 2)^2},$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^3(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

iii) $$h(x) = \frac{x^3+3}{x(x^2+x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+2} + \frac{dx+e}{(x^2+x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

iii) $$h(x) = \frac{x^3 + 3}{x\,(x^2 + x + 2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 2} + \frac{dx + e}{(x^2 + x + 2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Question :

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{(x+2)^3} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2} + \dfrac{c}{(x+2)^3}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$

ii) $g(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x^3\,(x+2)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3} + \dfrac{d}{x+2} + \dfrac{e}{(x+2)^2}\,, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\,.$

iii) $h(x) = \dfrac{x^3+3}{x\,(x^2+x+2)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+2} + \dfrac{dx+e}{(x^2+x+2)^2}\,, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\,.$

Question : Comment déterminer les coefficients de la décomposition ?

# Décomposition en éléments simples, exemples

**Exemples** :

i) $$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^3}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

ii) $$g(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3\,(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

iii) $$h(x) = \frac{x^3 + 3}{x\,(x^2 + x + 2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 2} + \frac{dx + e}{(x^2 + x + 2)^2}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Question : Comment déterminer les coefficients de la décomposition ?

Voici deux méthodes :

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

  **Exemple** :

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x}$ ,

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x}$, $\qquad x^3 + x^2 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta<0}$,

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x}$, $\qquad x^3 + x^2 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta < 0}$,

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x \cdot (x^2 + x + 1)} =$$

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x}, \qquad x^3 + x^2 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta < 0},$

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2+x+2}{x^3+x^2+x}$, $\qquad x^3+x^2+x = x \cdot \underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta<0}$,

$$f(x) = \frac{3x^2+x+2}{x \cdot (x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{a(x^2+x+1) + x(bx+c)}{x \cdot (x^2+x+1)}$$

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x}$, $\quad x^3 + x^2 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta<0}$,

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{a(x^2 + x + 1) + x(bx + c)}{x \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{(a + b)x^2 + (a + c)x + a}{x \cdot (x^2 + x + 1)},$$

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2+x+2}{x^3+x^2+x}$, $\quad x^3+x^2+x = x\cdot\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta<0}$,

$$f(x) = \frac{3x^2+x+2}{x\cdot(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{a\,(x^2+x+1)+x\,(bx+c)}{x\cdot(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)\,x^2+(a+c)\,x+a}{x\cdot(x^2+x+1)},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a+b=3 \\ a+c=1 \\ a=2 \end{cases}$$

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2+x+2}{x^3+x^2+x}$, $\qquad x^3+x^2+x = x\cdot\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta<0}$,

$$f(x) = \frac{3x^2+x+2}{x\cdot(x^2+x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{a\,(x^2+x+1)+x\,(bx+c)}{x\cdot(x^2+x+1)} = \frac{(a+b)\,x^2+(a+c)\,x+a}{x\cdot(x^2+x+1)},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a+b=3 \\ a+c=1 \\ a=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=2 \\ c=-1, \end{cases}$$

# Recherche des coefficients par identification

- Méthode par identification

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x}, \qquad x^3 + x^2 + x = x \cdot \underbrace{(x^2 + x + 1)}_{\Delta<0},$

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{a(x^2 + x + 1) + x(bx + c)}{x \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{(a + b)x^2 + (a + c)x + a}{x \cdot (x^2 + x + 1)},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = 3 \\ a + c = 1 \\ a = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \end{cases}, \qquad f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

  **Exemple** :

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x\,(x+1)^2}$

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

  * en multiplIant les deux expressions par $x$ ,

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

  * en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$),

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

  * en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $(x+1)^2$,

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

- $\ast$ en multiplier les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
- $\ast$ en multipliant les deux expressions par $(x+1)^2$, puis en les évaluant en $x = -1$

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

  * en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
  * en multipliant les deux expressions par $(x+1)^2$, puis en les évaluant en $x = -1$ (pôle de $f$),

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $(x+1)^2$, puis en les évaluant en $x = -1$ (pôle de $f$), on obtient : $-3 = c$,

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

  * en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
  * en multipliant les deux expressions par $(x+1)^2$, puis en les évaluant en $x = -1$ (pôle de $f$), on obtient : $-3 = c$,
  * en multipliant les deux expressions par $x$,

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $(x+1)^2$, puis en les évaluant en $x = -1$ (pôle de $f$), on obtient : $-3 = c$,
* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$,

# Recherche des coefficients par évaluation

- Méthode par évaluation

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x\,(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

  * en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
  * en multipliant les deux expressions par $(x+1)^2$, puis en les évaluant en $x = -1$ (pôle de $f$), on obtient : $-3 = c$,
  * en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$, on obtient : $1 = a + b$, d'où $b = -1$.

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** :

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)}$

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2 + 1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2 + 1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$ ,

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$),

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $x$,

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

- ∗ en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
- ∗ en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$,

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$, on obtient : $1 = a + b$, d'où $b = -1$

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

- $*$ en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
- $*$ en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$, on obtient : $1 = a + b$, d'où $b = -1$
- $*$ et par évaluation en une valeur simple,

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$, on obtient : $1 = a + b$, d'où $b = -1$
* et par évaluation en une valeur simple, par exemple $x = 1$,

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x\,(x^2 + 1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{x^2 + 1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$, on obtient : $1 = a + b$, d'où $b = -1$
* et par évaluation en une valeur simple, par exemple $x = 1$, on obtient : $2 = a + \frac{b+c}{2}$,

# Recherche des coefficients par évaluation

**Autre exemple** : $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x\,(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,,$

* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x = 0$ (pôle de $f$), on obtient : $2 = a$,
* en multipliant les deux expressions par $x$, puis en les évaluant en $x \to \infty$, on obtient : $1 = a + b$, d'où $b = -1$
* et par évaluation en une valeur simple, par exemple $x = 1$, on obtient : $2 = a + \frac{b+c}{2}$, d'où $c = 1$.

**Intégration des éléments simples**

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

# Intégration des éléments simples

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

$$* \quad \int \frac{a}{x-\alpha}\, dx =$$

**Intégration des éléments simples**

a) Eléments simples de première espèce :

* $$\int \frac{a}{x-\alpha}\, dx = a \ln|x-\alpha| + C\,,$$

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

$$* \quad \int \frac{a}{x-\alpha}\, dx = a \ln|x-\alpha| + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

* $$\int \frac{a}{x-\alpha}\, dx = a \ln|x-\alpha| + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
* $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^2}\, dx =$$

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

* $$\int \frac{a}{x-\alpha}\, dx = a \ln|x-\alpha| + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
* $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^2}\, dx = -\frac{a}{x-\alpha} + C\,,$$

**Intégration des éléments simples**

a) Eléments simples de première espèce :

* $$\int \frac{a}{x-\alpha}\,dx = a\ln|x-\alpha| + C\,,\quad x \neq \alpha\,,$$
* $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^2}\,dx = -\frac{a}{x-\alpha} + C\,,\quad x \neq \alpha\,,$$

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

- $$\int \frac{a}{x-\alpha}\,dx = a\ln|x-\alpha| + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
- $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^2}\,dx = -\frac{a}{x-\alpha} + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
- $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\,dx =$$

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

* $$\int \frac{a}{x-\alpha}\, dx = a \ln|x-\alpha| + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
* $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^2}\, dx = -\frac{a}{x-\alpha} + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
* $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\, dx = -\frac{a}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C\,,$$

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

* $$\int \frac{a}{x-\alpha}\,dx = a\ln|x-\alpha| + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
* $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^2}\,dx = -\frac{a}{x-\alpha} + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$$
* $$\int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\,dx = -\frac{a}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C\,, \quad x \neq \alpha\,, \quad n \geq 2\,,$$

## Intégration des éléments simples

a) Eléments simples de première espèce :

* $\displaystyle \int \frac{a}{x-\alpha}\, dx = a \ln|x-\alpha| + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$

* $\displaystyle \int \frac{a}{(x-\alpha)^2}\, dx = -\frac{a}{x-\alpha} + C\,, \quad x \neq \alpha\,,$

* $\displaystyle \int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\, dx = -\frac{a}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C\,, \quad x \neq \alpha\,, \quad n \geq 2\,,$

où $C$ est une fonction constante sur $]-\infty\,, \alpha[$ et sur $]\alpha\,, \infty[$.

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{p\,x + q}{(x^2 + 2a\,x + b)^n}\,,$$

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{p\,x+q}{(x^2+2a\,x+b)^n}\,,\quad \text{avec}\quad \Delta' = a^2-b<0\,,\quad n\geq 1\,.$$

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{p\,x+q}{(x^2+2a\,x+b)^n}\,,\qquad \text{avec}\quad \Delta' = a^2-b<0\,,\qquad n\geq 1\,.$$

Remarque :

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{p\,x + q}{(x^2 + 2a\,x + b)^n}\,, \quad \text{avec} \quad \Delta' = a^2 - b < 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Remarque : Dans ce cours, nous n'intégrerons que des éléments simples de deuxième espèce dont le dénominateur est de multiplicité un

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{p\,x+q}{(x^2+2a\,x+b)^n}\,, \quad \text{avec} \quad \Delta' = a^2 - b < 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Remarque : Dans ce cours, nous n'intégrerons que des éléments simples de deuxième espèce dont le dénominateur est de multiplicité un $(n = 1)$ :

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{p\,x + q}{(x^2 + 2a\,x + b)^n}\,, \quad \text{avec} \quad \Delta' = a^2 - b < 0\,, \quad n \geq 1\,.$$

Remarque : Dans ce cours, nous n'intégrerons que des éléments simples de deuxième espèce dont le dénominateur est de multiplicité un $(n = 1)$ :

$$\frac{p\,x + q}{x^2 + 2a\,x + b}\,,$$

# Intégration des éléments simples

b) Eléments simples de deuxième espèce :

$$\frac{p\,x+q}{(x^2+2a\,x+b)^n}\,, \quad \text{avec} \quad \Delta' = a^2-b<0\,, \quad n\geq 1\,.$$

Remarque : Dans ce cours, nous n'intégrerons que des éléments simples de deuxième espèce dont le dénominateur est de multiplicité un $(n=1)$ :

$$\frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}\,, \quad \text{avec} \quad \Delta' = a^2-b<0\,.$$

# Intégration des éléments simples

**Exemple** :

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

En l'intégrant, on obtient la somme d'un logarithme et d'une arctangente :

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

En l'intégrant, on obtient la somme d'un logarithme et d'une arctangente :

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx =$$

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

En l'intégrant, on obtient la somme d'un logarithme et d'une arctangente :

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

En l'intégrant, on obtient la somme d'un logarithme et d'une arctangente :

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$$

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

En l'intégrant, on obtient la somme d'un logarithme et d'une arctangente :

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

En l'intégrant, on obtient la somme d'un logarithme et d'une arctangente :

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)$$

# Intégration des éléments simples

**Exemple** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 2}$ est un élément simple de deuxième espèce.

En l'intégrant, on obtient la somme d'un logarithme et d'une arctangente :

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - \arctan(x+1) + C\,.$$

# Intégration des éléments simples

De façon plus générale,

# Intégration des éléments simples

De façon plus générale, on décompose l'élément $\dfrac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}$ de sorte à faire apparaître la dérivée d'une fonction logarithme :

# Intégration des éléments simples

De façon plus générale, on décompose l'élément $\dfrac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}$ de sorte à faire apparaître la dérivée d'une fonction logarithme :

$$\frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b} =$$

# Intégration des éléments simples

De façon plus générale, on décompose l'élément $\dfrac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}$ de sorte à faire apparaître la dérivée d'une fonction logarithme :

$$\frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b} = \frac{p}{2}\cdot\underbrace{\frac{2\,x+2a}{x^2+2a\,x+b}}_{=\left[\,\ln(x^2+2a\,x+b)\,\right]'}$$

# Intégration des éléments simples

De façon plus générale, on décompose l'élément $\dfrac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}$ de sorte à faire apparaître la dérivée d'une fonction logarithme :

$$\frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b} = \frac{p}{2}\cdot\underbrace{\frac{2\,x+2a}{x^2+2a\,x+b}}_{=[\,\ln(x^2+2a\,x+b)\,]'} + \frac{q-ap}{x^2+2a\,x+b}\,.$$

# Intégration des éléments simples

De façon plus générale, on décompose l'élément $\dfrac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}$ de sorte à faire apparaître la dérivée d'une fonction logarithme :

$$\frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b} = \frac{p}{2}\cdot\underbrace{\frac{2\,x+2a}{x^2+2a\,x+b}}_{=\,[\,\ln(x^2+2a\,x+b)\,]'} + \frac{q-ap}{x^2+2a\,x+b}\,.$$

Et l'intégration de $\dfrac{q-ap}{x^2+2a\,x+b}$ donne une fonction arctangente.

# Intégration des éléments simples

En effet $\dfrac{1}{x^2 + 2a\,x + b}$ peut s'écrire de la façon suivante :

# Intégration des éléments simples

En effet $\dfrac{1}{x^2 + 2a\,x + b}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{1}{x^2 + 2a\,x + b} = \frac{1}{(x+a)^2 + b - a^2}\,,$$

# Intégration des éléments simples

En effet $\dfrac{1}{x^2 + 2a\,x + b}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{1}{x^2 + 2a\,x + b} = \frac{1}{(x+a)^2 + b - a^2}\,, \quad \text{avec} \quad b - a^2 > 0\,,$$

# Intégration des éléments simples

En effet $\dfrac{1}{x^2+2a\,x+b}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{1}{x^2+2a\,x+b} = \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2}\,, \quad \text{avec} \quad b-a^2>0\,,$$

$$= \frac{1}{b-a^2}\cdot\frac{1}{\left[\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right]^2+1}$$

# Intégration des éléments simples

En effet $\dfrac{1}{x^2+2a\,x+b}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{1}{x^2+2a\,x+b} = \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2}\,, \quad \text{avec} \quad b-a^2>0\,,$$

$$= \frac{1}{b-a^2}\cdot\frac{1}{\left[\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right]^2+1} = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\cdot\underbrace{\frac{\frac{1}{\sqrt{b-a^2}}}{\left[\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right]^2+1}}_{=\left[\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)\right]'}\,.$$

# Intégration des éléments simples

En conclusion :

# Intégration des éléments simples

En conclusion :

$$\int \frac{p\,x + q}{x^2 + 2a\,x + b}\,dx =$$

# Intégration des éléments simples

En conclusion :

$$\int \frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}\,dx = \frac{p}{2}\int \frac{2\,x+2a}{x^2+2a\,x+b}\,dx +$$

# Intégration des éléments simples

En conclusion :

$$\int \frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}\,dx = \frac{p}{2}\int \frac{2\,x+2a}{x^2+2a\,x+b}\,dx + \int \frac{q-ap}{x^2+2a\,x+b}\,dx$$

# Intégration des éléments simples

En conclusion :

$$\int \frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}\,dx = \frac{p}{2}\int \frac{2\,x+2a}{x^2+2a\,x+b}\,dx + \int \frac{q-ap}{x^2+2a\,x+b}\,dx$$

$$= \frac{p}{2}\cdot \ln(x^2+2a\,x+b) +$$

# Intégration des éléments simples

En conclusion :

$$\int \frac{p\,x+q}{x^2+2a\,x+b}\,dx = \frac{p}{2}\int \frac{2\,x+2a}{x^2+2a\,x+b}\,dx + \int \frac{q-ap}{x^2+2a\,x+b}\,dx$$

$$= \frac{p}{2}\cdot \ln(x^2+2a\,x+b) + \frac{q-ap}{\sqrt{b-a^2}}\cdot \arctan\left(\tfrac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C\,.$$

# Exemple complet

# Exemple complet

Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10}{x^3 + x^2 + 3x - 5}.$$

# Exemple complet

Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10}{x^3 + x^2 + 3x - 5}.$$

- Le degré du numérateur n'étant pas strictement inférieur à celui du dénominateur,

# Exemple complet

Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10}{x^3 + x^2 + 3x - 5}.$$

- Le degré du numérateur n'étant pas strictement inférieur à celui du dénominateur, on commence par effectuer la division euclidienne de $-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10$ par $x^3 + x^2 + 3x - 5$ :

# Exemple complet

Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10}{x^3 + x^2 + 3x - 5}.$$

- Le degré du numérateur n'étant pas strictement inférieur à celui du dénominateur, on commence par effectuer la division euclidienne de $-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10$ par $x^3 + x^2 + 3x - 5$ :

$$\frac{-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10}{x^3 + x^2 + 3x - 5} =$$

# Exemple complet

Déterminons l'ensemble des primitives de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10}{x^3 + x^2 + 3x - 5}.$$

- Le degré du numérateur n'étant pas strictement inférieur à celui du dénominateur, on commence par effectuer la division euclidienne de $-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10$ par $x^3 + x^2 + 3x - 5$ :

$$\frac{-2x^3 + 6x^2 - 6x + 10}{x^3 + x^2 + 3x - 5} = -2 + \frac{8x^2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}.$$

# Exemple complet, suite

- La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$g(x) = \frac{8x^2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

# Exemple complet, suite

- La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$g(x) = \frac{8x^2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

se base sur la décomposition en facteurs irréductibles de son dénominateur.

# Exemple complet, suite

- La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$g(x) = \frac{8x^2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

se base sur la décomposition en facteurs irréductibles de son dénominateur.

Une racine évidente du dénominateur est donnée par $x = 1$,

# Exemple complet, suite

- La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$g(x) = \frac{8x^2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

se base sur la décomposition en facteurs irréductibles de son dénominateur.

Une racine évidente du dénominateur est donnée par $x = 1$, ce polynôme est donc divisible par $(x - 1)$ :

# Exemple complet, suite

- La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$g(x) = \frac{8x^2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

se base sur la décomposition en facteurs irréductibles de son dénominateur.

Une racine évidente du dénominateur est donnée par $x = 1$, ce polynôme est donc divisible par $(x - 1)$ :

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 =$$

# Exemple complet, suite

- La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$g(x) = \frac{8x^2}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

se base sur la décomposition en facteurs irréductibles de son dénominateur.

Une racine évidente du dénominateur est donnée par $x = 1$, ce polynôme est donc divisible par $(x - 1)$ :

$$x^3 + x^2 + 3x - 5 = (x - 1) \cdot \underbrace{(x^2 + 2x + 5)}_{\Delta<0} .$$

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)} =$$

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation
  - ∗ multiplication par $(x-1)$, puis $x = 1$ :

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation
  - ∗ multiplication par $(x-1)$, puis $x = 1$ : $a = 1$,

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation

  * multiplication par $(x-1)$, puis $x = 1$ : $a = 1$,
  * multiplication par $x$, puis $x \to \infty$

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation
  - $*$ multiplication par $(x-1)$, puis $x = 1$ : $a = 1$,
  - $*$ multiplication par $x$, puis $x \to \infty$ : $a + b = 8 \Rightarrow b = 7$,

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation
  * multiplication par $(x-1)$, puis $x = 1$ : $a = 1$,
  * multiplication par $x$, puis $x \to \infty$ : $a + b = 8 \;\Rightarrow\; b = 7$,
  * évaluation en $x = 0$ :

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation
  - ∗ multiplication par $(x-1)$, puis $x = 1$ : $a = 1$,
  - ∗ multiplication par $x$, puis $x \to \infty$ : $a + b = 8 \;\Rightarrow\; b = 7$,
  - ∗ évaluation en $x = 0$ : $-a + \frac{c}{5} = 0 \;\Rightarrow\; c = 5$,

# Exemple complet, suite

- Décomposition en éléments simples de $g(x)$

$$g(x) = \frac{8x^2}{(x-1)\,(x^2+2x+5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+5}\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\,.$$

- Recherche des coefficients $a, b, c$ par évaluation
  - ∗ multiplication par $(x-1)$, puis $x = 1$ : $a = 1$,
  - ∗ multiplication par $x$, puis $x \to \infty$ : $a + b = 8 \;\Rightarrow\; b = 7$,
  - ∗ évaluation en $x = 0$ : $-a + \frac{c}{5} = 0 \;\Rightarrow\; c = 5$,

$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,.$$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$
  - $\ast$ On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} =$$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$
  - ∗ On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$
  - * On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5} .$$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$
  - * On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}.$$

  - * Puis la dérivée d'une fonction arctangente :

$$\frac{2}{x^2+2x+5} =$$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$
  - ∗ On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :
    $$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5} \, .$$
  - ∗ Puis la dérivée d'une fonction arctangente :
    $$\frac{2}{x^2+2x+5} = \frac{2}{(x+1)^2+4} =$$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$
  - ∗ On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5} .$$

  - ∗ Puis la dérivée d'une fonction arctangente :

$$\frac{2}{x^2+2x+5} = \frac{2}{(x+1)^2+4} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x+1}{2})^2+1} .$$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$

  * On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}\,.$$

  * Puis la dérivée d'une fonction arctangente :

$$\frac{2}{x^2+2x+5} = \frac{2}{(x+1)^2+4} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x+1}{2})^2+1}\,.$$

  * $\displaystyle\int \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,dx =$

# Exemple complet, suite

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce $\dfrac{7x+5}{x^2+2x+5}$
  - ∗ On fait apparaître la dérivée de la fonction $\ln(x^2+2x+5)$ :

$$\frac{7x+5}{x^2+2x+5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5} .$$

  - ∗ Puis la dérivée d'une fonction arctangente :

$$\frac{2}{x^2+2x+5} = \frac{2}{(x+1)^2+4} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x+1}{2})^2+1} .$$

  - ∗ $\displaystyle\int \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{7}{2}\ln(x^2+2x+5) - \arctan(\tfrac{x+1}{2}) + C .$

# Exemple complet, suite et fin

- Conclusion :

# Exemple complet, suite et fin

- Conclusion :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5},$$

# Exemple complet, suite et fin

- Conclusion :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5},$$

$$\int f(x)\,dx = \int (-2)\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,dx,$$

# Exemple complet, suite et fin

- Conclusion :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5},$$

$$\int f(x)\,dx = \int (-2)\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,dx,$$

$$\int f(x)\,dx = -2x$$

# Exemple complet, suite et fin

- Conclusion :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,,$$

$$\int f(x)\,dx = \int (-2)\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,dx\,,$$

$$\int f(x)\,dx = -2x + \ln|x-1|$$

# Exemple complet, suite et fin

- Conclusion :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,,$$

$$\int f(x)\,dx = \int (-2)\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,dx\,,$$

$$\int f(x)\,dx = -2x + \ln|x-1| + \frac{7}{2}\ln(x^2+2x+5)$$

# Exemple complet, suite et fin

- Conclusion :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x-1} + \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,,$$

$$\int f(x)\,dx = \int (-2)\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{7x+5}{x^2+2x+5}\,dx\,,$$

$$\int f(x)\,dx = -2x + \ln|x-1| + \frac{7}{2}\ln(x^2+2x+5) - \arctan(\tfrac{x+1}{2}) + C\,.$$