

Corrigé 24

1. Calculer la longueur des arcs définis ci-dessous :

$$\text{a) } y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad \text{c) } y = \ln[\cos(x)], \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right],$$

$$\text{b) } y = \ln(1 - x^2), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \text{d) } y = \arcsin(e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$\text{a) Soit } L \text{ la longueur de l'arc : } L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx.$$

$$\text{Or } y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right), \quad \text{donc } L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \, dx,$$

$$L = \left[a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{\alpha}^{\beta} = a \left[\sinh\left(\frac{\beta}{a}\right) - \sinh\left(\frac{\alpha}{a}\right) \right].$$

$$\text{b) } L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \quad \text{avec } y = \ln(1 - x^2) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1 - x^2}.$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1 - x^2)^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1 - x^2)^2}} = \left| \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \right| = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

$$L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \, dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \, dx.$$

Pour intégrer cette fonction rationnelle, on la décompose en éléments simples :

$$\frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = -1 + \frac{2}{1 - x^2} = -1 + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}.$$

$$L = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \, dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) \, dx$$

$$L = 2 \left[-x - \ln(1 - x) + \ln(1 + x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left[-x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right]_0^{\frac{1}{2}} = -1 + 2 \ln 3.$$

c) • Intégration par rapport à x

Soit L la longueur de l'arc : $L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx$.

Or $y = \ln [\cos(x)] \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot [-\sin(x)] = -\tan(x)$.

Donc $L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \tan^2(x)} \, dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}} \, dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)} \, dx$,

car $\cos(x) > 0, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

$$L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)} \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)} \, dx.$$

Recherche des primitives :

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \, dx}{\cos(x)} &= \int \frac{2 \cos(x)}{\cos^2(x)} \, dx = \int \frac{2 \cos(x)}{1 - \sin^2(x)} \, dx = \int \frac{2 \cos(x) \, dx}{[1 - \sin(x)] \cdot [1 + \sin(x)]} \\ &= \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} \, dx + \int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} \, dx \\ &= -\ln [1 - \sin(x)] + \ln [1 + \sin(x)] + C = \ln \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} + C. \end{aligned}$$

Remarque :

On aurait pu arriver au même résultat en utilisant les tests d'invariance de Bioche.

Le produit $\frac{2}{\cos(x)} \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $\pi - x$,

on pose donc $z = \sin(x)$, ce qui nous amène à l'intégration d'une fonction rationnelle en z .

Évaluation :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)} \, dx = \ln \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \frac{3/2}{1/2} - \ln(1) = \ln(3).$$

• Intégration par rapport à y

Soit ℓ la longueur de l'arc défini par $y = \ln [\cos(x)]$, $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$,
c'est la moitié de la longueur cherchée.

Pour calculer cette longueur ℓ en intégrant par rapport à y , il faut déterminer x en fonction de y :

$$x = \arccos(e^y), \quad y \in \left[\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right), 0 \right].$$

Posons $a = \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Expression de ℓ : $\ell = \int_a^0 \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$ avec $\frac{dx}{dy} = -\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}$

$$\ell = \int_a^0 \sqrt{\left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2 + 1} dy = \int_a^0 \sqrt{\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} + 1} dy = \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}} dy$$

Intégration :

$$\ell = \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}} dy = \int_a^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{e^{-2y}-1}} dy = -\arg \cosh(e^{-y}) \Big|_a^0$$

$$\ell = -\left[\underbrace{\arg \cosh(1)}_{=0} - \arg \cosh(e^{-a}) \right] = \arg \cosh(e^{-a}) = \arg \cosh\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Conclusion : $L = 2\ell = 2 \arg \cosh\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$

d) • Expression de la longueur

$$L = \int_0^a \sqrt{1+y'^2} dx \quad \text{avec} \quad y' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}} dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx$$

• Intégration

◦ Primitive

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \arg \cosh(e^x) + C.$$

◦ Evaluation

$$L = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} dx = \arg \cosh(e^a) - \arg \cosh(e^0) = \arg \cosh(e^a).$$

2. Calculer la longueur des arcs définis paramétriquement ci-dessous :

a) $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$

b) $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t) \\ y(t) = -2 \sin t - \sin(2t) \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$

a) Soit L la longueur de l'arc Γ : $L = \int_0^1 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt$.

$$\dot{x}(t) = 2 + 2t = 2(1+t), \quad \dot{y}(t) = 2 - 2t = 2(1-t),$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{[2(1+t)]^2 + [2(1-t)]^2} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt.$$

Calcul de l'intégrale définie $\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$.

On pose $t = \sinh(z)$, d'où $\sqrt{1+t^2} = \cosh(z)$ et $dt = \cosh(z) dz$.

Et lorsque t parcourt l'intervalle $[0, 1]$, z varie entre 0 et $\arg \sinh(1)$.

Posons $a = \arg \sinh(1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \int_0^a \cosh^2(z) dz = \int_0^a \frac{1 + \cosh(2z)}{2} dz = \left[\frac{\sinh(2z)}{4} + \frac{z}{2} \right]_0^a \\ &= \left[\frac{\sinh(z) \cosh(z)}{2} + \frac{z}{2} \right]_0^a = \left[\frac{\sinh(z) \sqrt{1 + \sinh^2(z)} + z}{2} \right]_0^a \\ &= \frac{\sqrt{2} + \arg \sinh(1)}{2}. \end{aligned}$$

$$L = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 2 + \sqrt{2} \arg \sinh(1).$$

b) Soit L la longueur de l'arc : $L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$.

$$\dot{x}(t) = -2 \sin(t) + 2 \sin(2t) = -2 [\sin(t) - \sin(2t)],$$

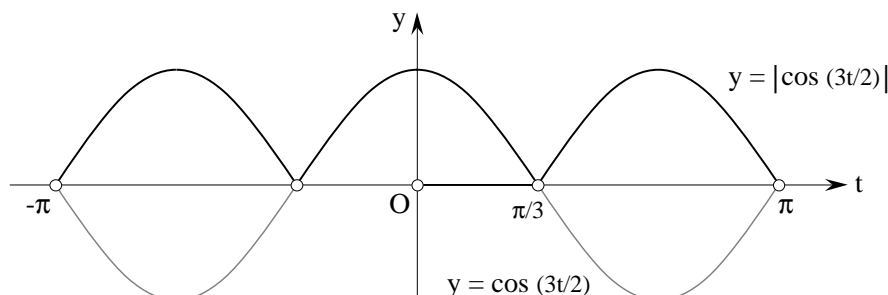
$$\dot{y}(t) = -2 \cos(t) - 2 \cos(2t) = -2 [\cos(t) + \cos(2t)].$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \\ &= 4 [\sin(t) - \sin(2t)]^2 + 4 [\cos(t) + \cos(2t)]^2 \\ &= 4 [\sin^2(t) - 2 \sin(t) \sin(2t) + \sin^2(2t) + \cos^2(t) + 2 \cos(t) \cos(2t) + \cos^2(2t)] \\ &= 4 [2 + 2 \cos(t) \cos(2t) - 2 \sin(t) \sin(2t)] \\ &= 8 [1 + \cos(3t)]. \end{aligned}$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 16 \frac{1 + \cos(3t)}{2} = 16 \cos^2\left(\frac{3t}{2}\right).$$

Donc $\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = 4 \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right|$.

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, $\cos \frac{3t}{2}$ n'est pas de signe constant :



Par périodicité et symétrie, on en déduit que $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \left(\frac{3t}{2} \right) \right| dt = 6 \int_0^{\pi/3} \cos \left(\frac{3t}{2} \right) dt$.

$$L = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \left(\frac{3t}{2} \right) \right| dt = 24 \int_0^{\pi/3} \cos \left(\frac{3t}{2} \right) dt = 24 \left[\frac{2}{3} \sin \left(\frac{3t}{2} \right) \right]_0^{\pi/3} = 16.$$

3. Déterminer l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe d'équation $y = f(x)$ autour de l'axe d dans les deux cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1}{3} x^3$, $0 \leq x \leq 1$ et $d = (Ox)$,

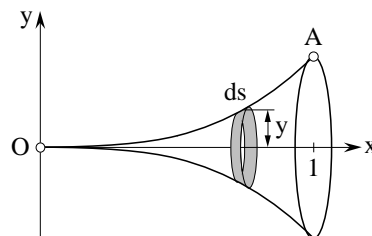
b) $f(x) = \cosh(x)$, $0 \leq x \leq 1$ et $d = (Oy)$.

a) Soit A l'aire de cette surface de révolution.

$$A = \int_0^A 2\pi y ds = 2\pi \int_0^1 y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3, \quad y'(x) = x^2, \quad ds = \sqrt{1 + x^4} dx$$

$$A = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} dx = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{1}{6} (1 + x^4)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{9} (2\sqrt{2} - 1).$$



b) Soit A l'aire de la surface de révolution.

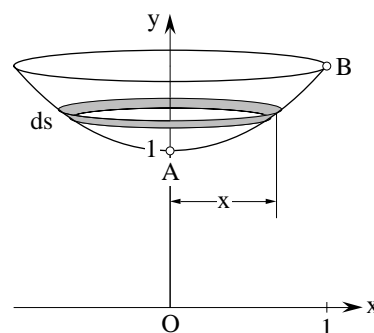
$$A = \int_A^B 2\pi x ds = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx$$

$$A = 2\pi \int_0^1 x \cosh x dx$$

Intégration de $x \cosh x$ par parties :

$$\int x \cosh x dx = x \sinh x - \cosh x + C.$$

$$A = 2\pi [x \sinh x - \cosh x]_0^1 = 2\pi (\sinh 1 - \cosh 1 + 1).$$



4. Calculer l'aire d'une sphère de rayon r .

- Une méthode : description paramétrique

Description de la sphère

La sphère de rayon r peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe Oy , du demi-cercle C d'équations paramétriques

$$C : \begin{cases} x(t) = r \cos(t) \\ y(t) = r \sin(t) \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation Oy .

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen x et dont les génératrices sont de longueur ds . Elles ont pour aire $2\pi x ds$.

Soit \mathcal{A} l'aire de la surface de révolution :

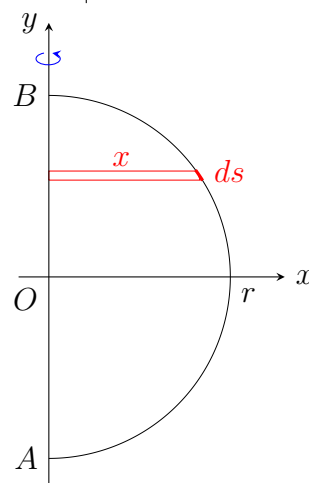
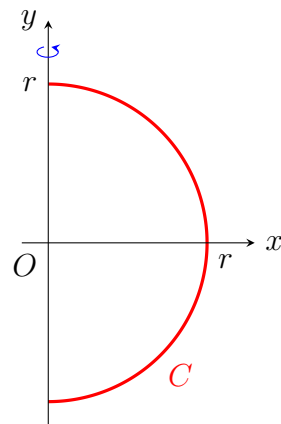
$$\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi x ds.$$

Et en l'exprimant par rapport à t :

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Calcul de l'aire de la sphère

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos(t) \cdot \sqrt{[-r \sin(t)]^2 + [r \cos(t)]^2} dt \\ &= 4\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \\ &= 4\pi r^2 \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

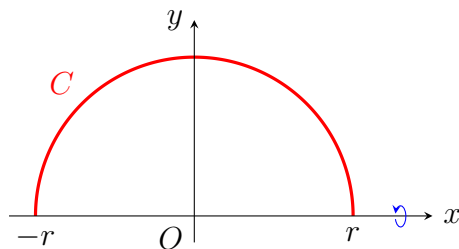


- Une autre méthode : description cartésienne

Description de la sphère

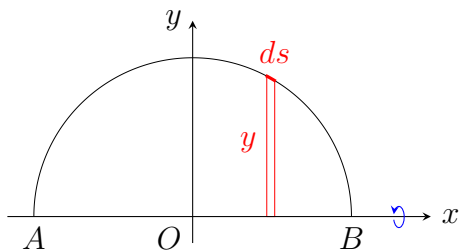
La sphère de rayon r peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe Ox , du demi-cercle C d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = +\sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r.$$



On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation Ox .

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen y et dont les génératrices sont de longueur ds . Elles ont pour aire $2\pi y ds$.



Soit \mathcal{A} l'aire de la surface de révolution :

$$\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi y ds = 4\pi \int_O^B y ds.$$

Expression que l'on peut intégrer par rapport à x ou à y .

Calcul du volume

- Intégration par rapport à x .

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_O^B y ds = 4\pi \int_0^r y(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

$$\text{avec} \quad y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{et} \quad \sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r \int_0^r dx = 4\pi r^2.$$

◦ Intégration par rapport à y .

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_O^B y \, ds = 4\pi \int_0^r y \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \, dy.$$

avec $x(y) = \sqrt{r^2 - y^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$

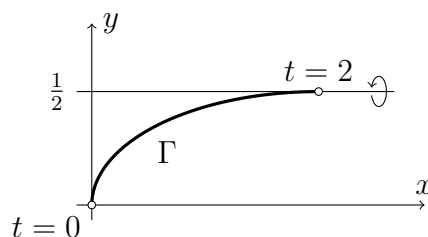
et $\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - y^2} + 1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_0^r y \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} \, dy = -4\pi r \int_0^r \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}} \, dy,$$

$$\mathcal{A} = -4\pi r \left[\sqrt{r^2 - y^2} \right]_0^r = 4\pi r^2.$$

5. On considère l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{4+t^2} \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$



- Calculer la longueur de l'arc Γ .
- Calculer l'aire de la surface de révolution obtenue par rotation de l'arc Γ autour de l'axe horizontal $y = \frac{1}{2}$.

a) Soit L la longueur de l'arc Γ : $L = \int_0^2 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \, dt.$

$$\dot{x}(t) = \frac{2t(4+t^2) - t^2(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{8t}{(4+t^2)^2},$$

$$\dot{y}(t) = \frac{2(4+t^2) - 2t(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{-2t^2 + 8}{(4+t^2)^2},$$

$$\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} = 2 \sqrt{\left[\frac{4t}{(4+t^2)^2}\right]^2 + \left[\frac{-t^2+4}{(4+t^2)^2}\right]^2} = 2 \frac{\sqrt{16t^2 + (t^4 - 8t^2 + 16)}}{(4+t^2)^2}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 16}}{(4+t^2)^2} = 2 \frac{\sqrt{(t^2+4)^2}}{(4+t^2)^2} = \frac{2}{4+t^2}.$$

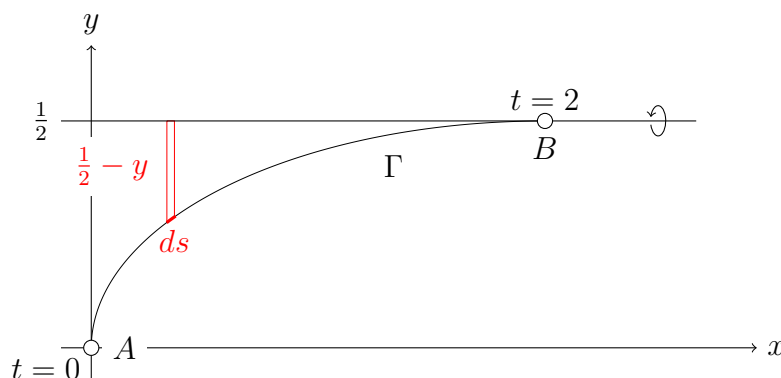
Intégration :

$$L = \int_0^2 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt = \int_0^2 \frac{2}{4+t^2} dt = \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{t}{2})^2} dt = \arctan\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^2,$$

$$L = \frac{\pi}{4}.$$

- b) On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation $y = \frac{1}{2}$.

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen $\frac{1}{2} - y$ et dont les génératrices sont de longueur ds . Elles ont pour aire $2\pi \left(\frac{1}{2} - y\right) ds$.



Soit \mathcal{A} l'aire de la surface de révolution : $\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi \left(\frac{1}{2} - y\right) ds$.

Et en l'exprimant par rapport à t :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 2\pi \left[\frac{1}{2} - y(t)\right] \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Intégration :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 2\pi \left[\frac{1}{2} - y(t)\right] \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = 2\pi \int_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{2t}{4+t^2}\right] \cdot \frac{2}{4+t^2} dt \\ &= 2\pi \left[\int_0^2 \frac{1}{4+t^2} dt - \int_0^2 \frac{4t}{(4+t^2)^2} dt \right]. \end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^2 \frac{1}{4+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{4+t^2} dt = \frac{\pi}{8} \quad (\text{question précédente})$$

$$\bullet \int_0^2 \frac{4t}{(4+t^2)^2} dt = 2 \int_0^2 \frac{2t}{(4+t^2)^2} dt = \frac{-2}{4+t^2} \Big|_0^2 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$\mathcal{A} = 2\pi \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{4} (\pi - 2).$$

6. On considère l'arc de courbe Γ défini par

$$y = \sinh^2(x), \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

- Calculer la longueur de l'arc Γ .
- Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc Γ autour de l'axe vertical d'équation $x = \arg \sinh(1)$.

Donner les résultats sous leur forme la plus simple.

Posons $a = \arg \sinh(1)$.

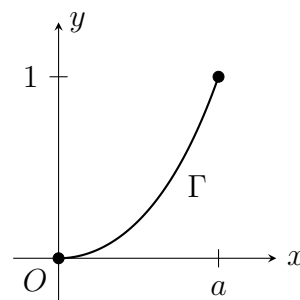
- La longueur de l'arc Γ a pour expression $s = \int_0^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

$$f'(x) = 2 \sinh(x) \cdot \cosh(x) = \sinh(2x),$$

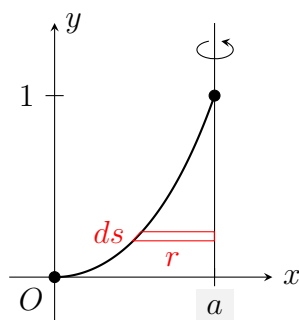
$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \sinh^2(2x)} = \cosh(2x).$$

$$s = \int_0^a \cosh(2x) dx = \frac{1}{2} \sinh(2x) \Big|_0^a$$

$$= \sinh(x) \cdot \cosh(x) \Big|_0^a = \sinh(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(x)} \Big|_0^a = \sqrt{2}.$$



- Calcul de l'aire \mathcal{A} de la surface de révolution.



La section de cette surface de révolution par le plan $y = y_0$ est un cercle de rayon $r = a - x_0$. On en déduit l'expression de l'aire \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \int_{\Gamma} 2\pi r ds = \int_{\Gamma} 2\pi (a - x) ds,$$

Que l'on intègre par rapport à x :

$$\mathcal{A} = \int_0^a 2\pi (a - x) \cdot \cosh(2x) dx = 2\pi a \underbrace{\int_0^a \cosh(2x) dx}_{=\sqrt{2}} - 2\pi \int_0^a x \cdot \cosh(2x) dx$$

et on intègre $x \cdot \cosh(2x)$ par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^a \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\cosh(2x)} dx &= x \cdot \frac{\sinh(2x)}{2} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\sinh(2x)}{2} dx \\
&= x \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) \Big|_0^a - \frac{\cosh(2x)}{4} \Big|_0^a \\
&= x \cdot \sinh(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(x)} \Big|_0^a - \frac{1}{4} [2 \sinh^2(x) + 1] \Big|_0^a \\
&= a \sqrt{2} - \frac{1}{4} (3 - 1) = a \sqrt{2} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{A} = (2\pi a \sqrt{2}) - 2\pi (a \sqrt{2} - \frac{1}{2}) = \pi.$
