

## Corrigé 24

1. Calculer la longueur des arcs définis ci-dessous :

a)  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ,  $\alpha \leq x \leq \beta$ ,      c)  $y = \ln[\cos(x)]$ ,  $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ ,

b)  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,      d)  $y = \arcsin(e^{-x})$ ,  $0 \leq x \leq a$ .

---

a) Soit  $L$  la longueur de l'arc :  $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ .

Or  $y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ , donc  $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx$ ,

$$L = \left[ a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{\alpha}^{\beta} = a \left[ \sinh\left(\frac{\beta}{a}\right) - \sinh\left(\frac{\alpha}{a}\right) \right].$$

b)  $L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$  avec  $y = \ln(1 - x^2)$  et  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{1 - x^2}$ .

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1 - x^2)^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(1 - x^2)^2}} = \left| \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \right| = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}, \quad \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

$$L = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} dx.$$

Pour intégrer cette fonction rationnelle, on la décompose en éléments simples :

$$\frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = -1 + \frac{2}{1 - x^2} = -1 + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}.$$

$$L = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left( -1 + \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx$$

$$L = 2 \left[ -x - \ln(1 - x) + \ln(1 + x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left[ -x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right]_0^{\frac{1}{2}} = -1 + 2 \ln 3.$$

- c) • Intégration par rapport à  $x$

Soit  $L$  la longueur de l'arc :  $L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ .

$$\text{Or } y = \ln [\cos(x)] \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot [-\sin(x)] = -\tan(x).$$

$$\text{Donc } L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \tan^2(x)} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)} dx,$$

$$\text{car } \cos(x) > 0, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}].$$

$$L = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)} dx.$$

Recherche des primitives :

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{\cos(x)} dx &= \int \frac{2 \cos(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{2 \cos(x)}{1 - \sin^2(x)} dx = \int \frac{2 \cos(x)}{[1 - \sin(x)] \cdot [1 + \sin(x)]} dx \\ &= \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} dx + \int \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} dx \\ &= -\ln[1 - \sin(x)] + \ln[1 + \sin(x)] + C = \ln \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} + C. \end{aligned}$$

Remarque :

On aurait pu arriver au même résultat en utilisant les tests d'invariance de Bioche.

Le produit  $\frac{2}{\cos(x)} \cdot dx$  est invariant lorsqu'on remplace  $x$  par  $\pi - x$ ,

on pose donc  $z = \sin(x)$ , ce qui nous amène à l'intégration d'une fonction rationnelle en  $z$ .

Evaluation :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos(x)} dx = \ln \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln \frac{3/2}{1/2} - \ln(1) = \ln(3).$$

- Intégration par rapport à  $y$

Soit  $\ell$  la longueur de l'arc défini par  $y = \ln [\cos(x)]$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ , c'est la moitié de la longueur cherchée.

Pour calculer cette longueur  $\ell$  en intégrant par rapport à  $y$ , il faut déterminer  $x$  en fonction de  $y$  :

$$x = \arccos(e^y), \quad y \in \left[ \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), 0 \right].$$

$$\text{Posons } a = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\text{Expression de } \ell : \quad \ell = \int_a^0 \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \ dy \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}$$

$$\ell = \int_a^0 \sqrt{\left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2 + 1} \ dy = \int_a^0 \sqrt{\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}} + 1} \ dy = \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}} \ dy$$

Intégration :

$$\ell = \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-e^{2y}}} \ dy = \int_a^0 \frac{e^{-y}}{\sqrt{e^{-2y}-1}} \ dy = -\arg \cosh(e^{-y}) \Big|_a^0$$

$$\ell = -[\underbrace{\arg \cosh(1) - \arg \cosh(e^{-a})}_{=0}] = \arg \cosh(e^{-a}) = \arg \cosh\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{Conclusion : } L = 2\ell = 2 \arg \cosh\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

- d) • Expression de la longueur

$$L = \int_0^a \sqrt{1+y'^2} \ dx \quad \text{avec} \quad y' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$L = \int_0^a \sqrt{1+\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}} \ dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \ dx$$

- Intégration

- Primitive

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \ dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} \ dx = \arg \cosh(e^x) + C.$$

- Evaluation

$$L = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \ dx = \arg \cosh(e^a) - \arg \cosh(e^0) = \arg \cosh(e^a).$$

2. Calculer la longueur des arcs définis paramétriquement ci-dessous :

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t) \\ y(t) = -2 \sin t - \sin(2t) \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq \pi.$$


---

a) Soit  $L$  la longueur de l'arc  $\Gamma$  :  $L = \int_0^1 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt$ .

$$\dot{x}(t) = 2 + 2t = 2(1+t), \quad \dot{y}(t) = 2 - 2t = 2(1-t),$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{[2(1+t)]^2 + [2(1-t)]^2} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt.$$

Calcul de l'intégrale définie  $\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt$ .

On pose  $t = \sinh(z)$ , d'où  $\sqrt{1+t^2} = \cosh(z)$  et  $dt = \cosh(z) dz$ .

Et lorsque  $t$  parcourt l'intervalle  $[0, 1]$ ,  $z$  varie entre 0 et  $\arg \sinh(1)$ .

Posons  $a = \arg \sinh(1)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt &= \int_0^a \cosh^2(z) dz = \int_0^a \frac{1+\cosh(2z)}{2} dz = \left[ \frac{\sinh(2z)}{4} + \frac{z}{2} \right]_0^a \\ &= \left[ \frac{\sinh(z) \cosh(z)}{2} + \frac{z}{2} \right]_0^a = \left[ \frac{\sinh(z) \sqrt{1+\sinh^2(z)} + z}{2} \right]_0^a \\ &= \frac{\sqrt{2} + \arg \sinh(1)}{2}. \end{aligned}$$

$$L = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = 2 + \sqrt{2} \arg \sinh(1).$$

b) Soit  $L$  la longueur de l'arc :  $L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$ .

$$\dot{x}(t) = -2 \sin(t) + 2 \sin(2t) = -2 [\sin(t) - \sin(2t)],$$

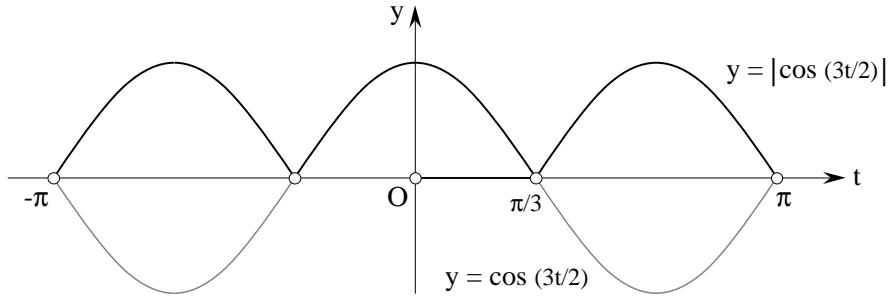
$$\dot{y}(t) = -2 \cos(t) - 2 \cos(2t) = -2 [\cos(t) + \cos(2t)].$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \\ &= 4 [\sin(t) - \sin(2t)]^2 + 4 [\cos(t) + \cos(2t)]^2 \\ &= 4 [\sin^2(t) - 2 \sin(t) \sin(2t) + \sin^2(2t) + \cos^2(t) + 2 \cos(t) \cos(2t) + \cos^2(2t)] \\ &= 4 [2 + 2 \cos(t) \cos(2t) - 2 \sin(t) \sin(2t)] \\ &= 8 [1 + \cos(3t)]. \end{aligned}$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 16 \frac{1 + \cos(3t)}{2} = 16 \cos^2\left(\frac{3t}{2}\right).$$

$$\text{Donc } \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = 4 \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right|.$$

Sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ ,  $\cos \frac{3t}{2}$  n'est pas de signe constant :



Par périodicité et symétrie, on en déduit que  $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\frac{3t}{2})| dt = 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(\frac{3t}{2}) dt$ .

$$L = 4 \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(\frac{3t}{2})| dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(\frac{3t}{2}) dt = 24 \left[ \frac{2}{3} \sin(\frac{3t}{2}) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 16.$$

3. Déterminer l'aire de la surface de révolution obtenue par la rotation de la courbe d'équation  $y = f(x)$  autour de l'axe  $d$  dans les deux cas suivants :

a)  $f(x) = \frac{1}{3} x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$  et  $d = (Ox)$ ,

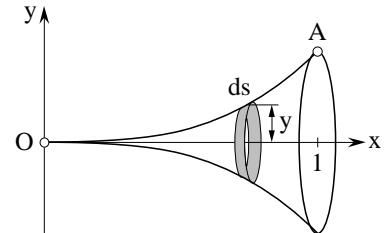
b)  $f(x) = \cosh(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  et  $d = (Oy)$ .

---

a) Soit  $A$  l'aire de cette surface de révolution.

$$A = \int_O^A 2\pi y ds = 2\pi \int_0^1 y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3, \quad y'(x) = x^2, \quad ds = \sqrt{1 + x^4} dx$$



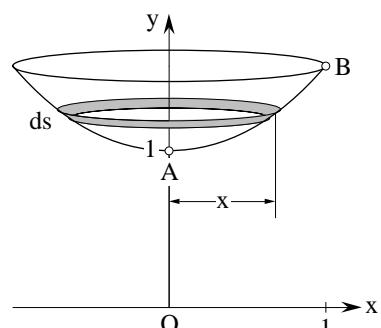
$$A = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + x^4} dx = \frac{2\pi}{3} \left[ \frac{1}{6} (1 + x^4)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{9} (2\sqrt{2} - 1).$$

b) Soit  $A$  l'aire de la surface de révolution.

$$\begin{aligned} A &= \int_A^B 2\pi x ds = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ A &= 2\pi \int_0^1 x \cosh x dx \end{aligned}$$

Intégration de  $x \cosh x$  par parties :

$$\int x \cosh x dx = x \sinh x - \cosh x + C.$$



$$A = 2\pi [x \sinh x - \cosh x]_0^1 = 2\pi (\sinh 1 - \cosh 1 + 1).$$

**4.** Calculer l'aire d'une sphère de rayon  $r$ .

---

- Une méthode : description paramétrique

Description de la sphère

La sphère de rayon  $r$  peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe  $Oy$ , du demi-cercle  $C$  d'équations paramétriques

$$C : \begin{cases} x(t) = r \cos(t) \\ y(t) = r \sin(t) \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] .$$

On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation  $Oy$ .

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen  $x$  et dont les génératrices sont de longueur  $ds$ . Elles ont pour aire  $2\pi x ds$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la surface de révolution :

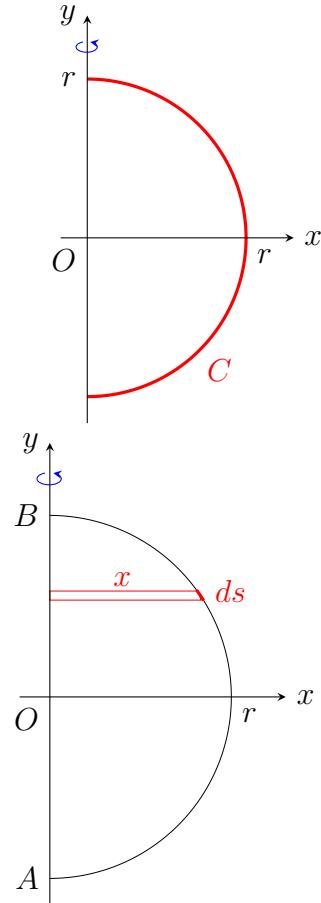
$$\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi x ds .$$

Et en l'exprimant par rapport à  $t$  :

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt .$$

Calcul de l'aire de la sphère

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos(t) \cdot \sqrt{[-r \sin(t)]^2 + [r \cos(t)]^2} dt \\ &= 4\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \\ &= 4\pi r^2 \left[ \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi r^2 . \end{aligned}$$

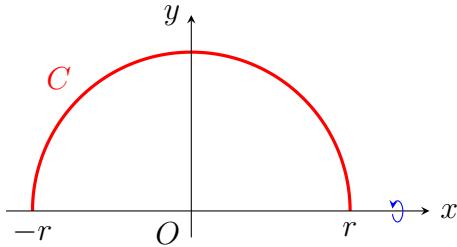


- Une autre méthode : description cartésienne

Description de la sphère

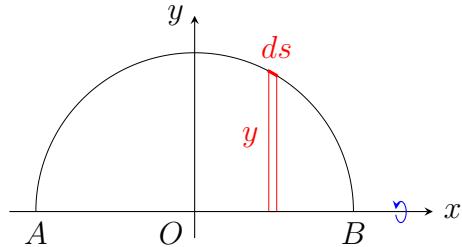
La sphère de rayon  $r$  peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe  $Ox$ , du demi-cercle  $C$  d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = +\sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r.$$



On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation  $Ox$ .

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen  $y$  et dont les génératrices sont de longueur  $ds$ . Elles ont pour aire  $2\pi y ds$ .



Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la surface de révolution :

$$\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi y ds = 4\pi \int_O^B y ds.$$

Expression que l'on peut intégrer par rapport à  $x$  ou à  $y$ .

Calcul du volume

- Intégration par rapport à  $x$ .

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_O^B y ds = 4\pi \int_0^r y(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

avec  $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

et  $\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ .

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r \int_0^r dx = 4\pi r^2.$$

- Intégration par rapport à  $y$ .

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_O^B y \, ds = 4\pi \int_0^r y \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \, dy.$$

avec  $x(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$ ,  $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$

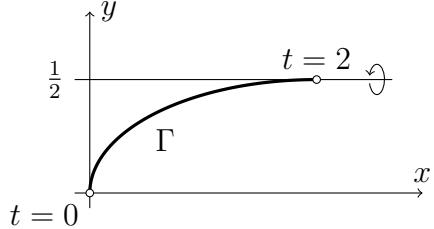
et  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{y^2}{r^2 - y^2} + 1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_0^r y \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - y^2}} \, dy = -4\pi r \int_0^r \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}} \, dy,$$

$$\mathcal{A} = -4\pi r \left[ \sqrt{r^2 - y^2} \right]_0^r = 4\pi r^2.$$

5. On considère l'arc paramétré  $\Gamma$  défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{4+t^2} \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$



- Calculer la longueur de l'arc  $\Gamma$ .
- Calculer l'aire de la surface de révolution obtenue par rotation de l'arc  $\Gamma$  autour de l'axe horizontal  $y = \frac{1}{2}$ .

a) Soit  $L$  la longueur de l'arc  $\Gamma$  :  $L = \int_0^2 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \, dt$ .

$$\dot{x}(t) = \frac{2t(4+t^2) - t^2(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{8t}{(4+t^2)^2},$$

$$\dot{y}(t) = \frac{2(4+t^2) - 2t(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{-2t^2+8}{(4+t^2)^2},$$

$$\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} = 2 \sqrt{\left[\frac{4t}{(4+t^2)^2}\right]^2 + \left[\frac{-t^2+4}{(4+t^2)^2}\right]^2} = 2 \frac{\sqrt{16t^2 + (t^4 - 8t^2 + 16)}}{(4+t^2)^2}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{t^4 + 8t^2 + 16}}{(4+t^2)^2} = 2 \frac{\sqrt{(t^2+4)^2}}{(4+t^2)^2} = \frac{2}{4+t^2}.$$

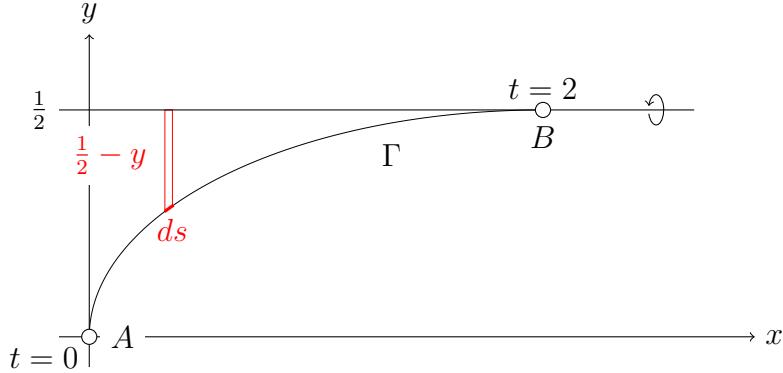
Intégration :

$$L = \int_0^2 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt = \int_0^2 \frac{2}{4+t^2} dt = \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{t}{2})^2} dt = \arctan\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^2,$$

$$L = \frac{\pi}{4}.$$

- b) On décompose cette surface de révolution en "tranches" perpendiculaires à l'axe de rotation  $y = \frac{1}{2}$ .

Ces surfaces élémentaires sont des troncs de cône de rayon moyen  $\frac{1}{2} - y$  et dont les génératrices sont de longueur  $ds$ . Elles ont pour aire  $2\pi (\frac{1}{2} - y) ds$ .



Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la surface de révolution :  $\mathcal{A} = \int_A^B 2\pi (\frac{1}{2} - y) ds$ .

Et en l'exprimant par rapport à  $t$  :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 2\pi \left[ \frac{1}{2} - y(t) \right] \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Intégration :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 2\pi \left[ \frac{1}{2} - y(t) \right] \cdot \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = 2\pi \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{2t}{4+t^2} \right] \cdot \frac{2}{4+t^2} dt \\ &= 2\pi \left[ \int_0^2 \frac{1}{4+t^2} dt - \int_0^2 \frac{4t}{(4+t^2)^2} dt \right]. \end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^2 \frac{1}{4+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{4+t^2} dt = \frac{\pi}{8} \quad (\text{question précédente})$$

$$\bullet \int_0^2 \frac{4t}{(4+t^2)^2} dt = 2 \int_0^2 \frac{2t}{(4+t^2)^2} dt = \frac{-2}{4+t^2} \Big|_0^2 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$\mathcal{A} = 2\pi \left[ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right] = \frac{\pi}{4} (\pi - 2).$$

6. On considère l'arc de courbe  $\Gamma$  défini par

$$y = \sinh^2(x), \quad x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

- a) Calculer la longueur de l'arc  $\Gamma$ .
- b) Calculer l'aire de la surface de révolution engendrée par la rotation de l'arc  $\Gamma$  autour de l'axe vertical d'équation  $x = \arg \sinh(1)$ .

Donner les résultats sous leur forme la plus simple.

---

Posons  $a = \arg \sinh(1)$ .

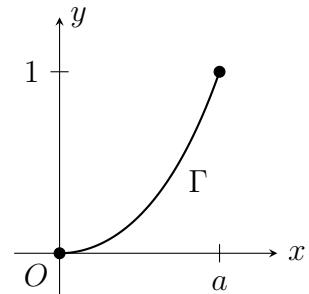
- a) La longueur de l'arc  $\Gamma$  a pour expression  $s = \int_0^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ .

$$f'(x) = 2 \sinh(x) \cdot \cosh(x) = \sinh(2x),$$

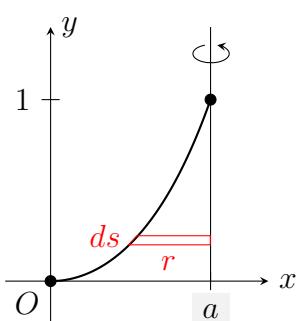
$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \sinh^2(2x)} = \cosh(2x).$$

$$s = \int_0^a \cosh(2x) dx = \frac{1}{2} \sinh(2x) \Big|_0^a$$

$$= \sinh(x) \cdot \cosh(x) \Big|_0^a = \sinh(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(x)} \Big|_0^a = \sqrt{2}.$$



- b) Calcul de l'aire  $\mathcal{A}$  de la surface de révolution.



La section de cette surface de révolution par le plan  $y = y_0$  est un cercle de rayon  $r = a - x_0$ . On en déduit l'expression de l'aire  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} = \int_{\Gamma} 2\pi r ds = \int_{\Gamma} 2\pi (a - x) ds,$$

Que l'on intègre par rapport à  $x$  :

$$\mathcal{A} = \int_0^a 2\pi (a - x) \cdot \cosh(2x) dx = 2\pi a \underbrace{\int_0^a \cosh(2x) dx}_{=\sqrt{2}} - 2\pi \int_0^a x \cdot \cosh(2x) dx$$

et on intègre  $x \cdot \cosh(2x)$  par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^a \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{\cosh(2x)} dx &= x \cdot \frac{\sinh(2x)}{2} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\sinh(2x)}{2} dx \\
&= x \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x) \Big|_0^a - \frac{\cosh(2x)}{4} \Big|_0^a \\
&= x \cdot \sinh(x) \cdot \sqrt{1 + \sinh^2(x)} \Big|_0^a - \frac{1}{4} [2 \sinh^2(x) + 1] \Big|_0^a \\
&= a \sqrt{2} - \frac{1}{4} (3 - 1) = a \sqrt{2} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

D'où :  $\mathcal{A} = (2\pi a \sqrt{2}) - 2\pi (a \sqrt{2} - \frac{1}{2}) = \pi.$

---