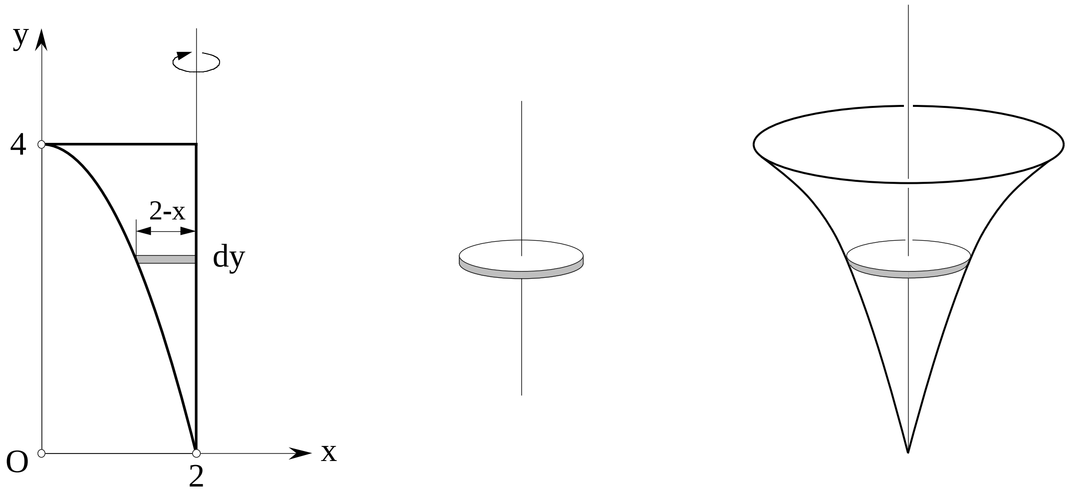
Corrigé 23

1. On considère le domaine D du plan limité par la courbe d'équation $y = 4 - x^2$ et par les droites d'équation $y = 4$ et $x = 2$.

Calculer le volume du corps engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe d'équation $x = 2$.

Figure d'étude.



Dans le plan d'équation $y = y_0$ $(0 < y_0 \leq 4)$ perpendiculaire à l'axe de rotation, la section du corps est un disque de rayon $R = 2 - x\,(y_0) = 2 - \sqrt{4 - y_0}$.

On en déduit l'aire du disque en fonction de y_0 :

$$A(y_0) = \pi\, R^2 = \pi \left(2 - \sqrt{4 - y_0}\right)^2 = \pi \left(8 - y_0 - 4\sqrt{4 - y_0}\right).$$

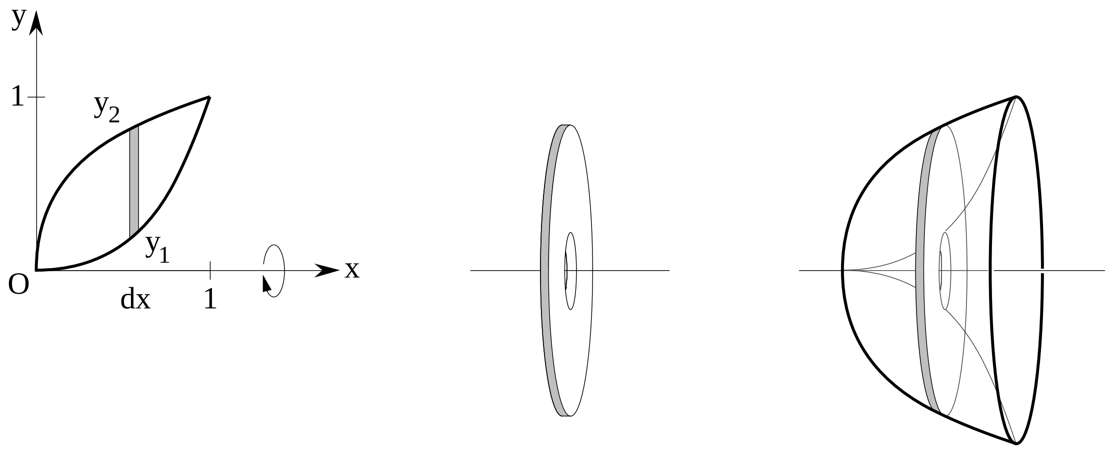
Puis le volume V du corps :

$$V = \int_0^4 A(y)\; dy \;=\; \int_0^4 \pi \left(8 - y - 4\sqrt{4 - y}\right)\, dy\,.$$

$$V = \pi \left[8y - \frac{y^2}{2} + \frac{8}{3}\,(4 - y)^{3/2}\right]_0^4 \;=\; \pi \left[(32 - 8) - \frac{8}{3}\, 4^{3/2}\right] \;=\; \frac{8\,\pi}{3}\,.$$

2. Déterminer le volume engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) du domaine fini limité par les courbes d'équation $y = x^3$ et $y = \sqrt[3]{x}$ $(x \geq 0)$.

Posons $y_1 = x^3$ et $y_2 = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$. Ces deux courbes se coupent en $x = 0$ et $x = 1$.



La section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, d'équation $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, est une couronne de rayon extérieur $R = y_2$ et de rayon intérieur $r = y_1$.

L'aire de cette section vaut $A(x_0) = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi\,[y_2^2(x_0) - y_1^2(x_0)] = \pi\left[x_0^{2/3} - x_0^6\right]$.

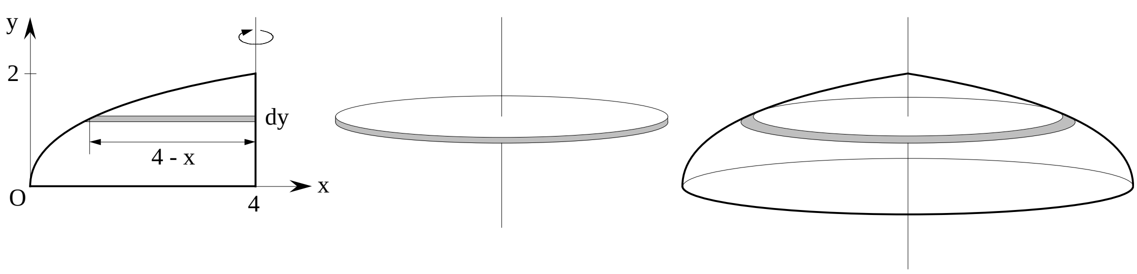
Calcul du volume V de ce corps . $V = \int_0^1 A(x)\,dx = \pi \int_0^1 \left[x^{2/3} - x^6\right] dx$,

$$V = \pi \left[\frac{3}{5}\,x^{5/3} - \frac{1}{7}\,x^7\right]_0^1 = \frac{16\,\pi}{35}.$$

3. Dans le plan (Oxy), on considère le domaine fini D limité par la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{2x}$, l'axe (Ox) et la droite verticale d'équation $x = 4$.

Calculer le volume du corps obtenu par la rotation du domaine D autour de la droite verticale d'équation $x = 4$.

Figure d'étude.



Dans le plan d'équation $y = y_0$ $(0 \leq y_0 < 2)$ perpendiculaire à l'axe de rotation, la section du corps est un disque de rayon $R = 4 - x\,(y_0) = 4 - \frac{y_0^3}{2}$.

On en déduit l'aire du disque en fonction de y_0 :

$$A(y_0) = \pi\, R^2 = \pi \left(4 - \frac{y_0^3}{2}\right)^2 = \pi \left(16 - 4\, y_0^3 + \frac{y_0^6}{4}\right).$$

Puis le volume V du corps :

$$V = \int_0^2 A(y)\; dy \;=\; \int_0^2 \pi \left(16 - 4\, y^3 + \frac{y^6}{4}\right) dy\,.$$

$$V = \pi \left[16y \;-\; y^4 \;+\; \frac{1}{28}\; y^7\right]_0^2 \;=\; \pi \left[\,(32 - 16 + \tfrac{128}{28}) \;-\; 0\,\right] \;=\; \frac{144\,\pi}{7}\,.$$

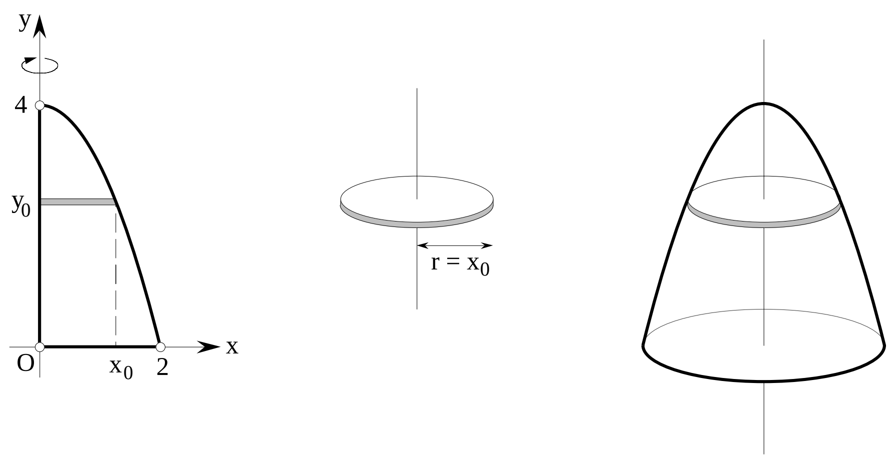
4. Dans le plan (Oxy), on considère le domaine fini D limité par la courbe d'équation $y = 4 - x^2$, $(x \geq 0)$, l'axe (Ox) et l'axe (Oy).

a) Calculer le volume V_1 du corps obtenu par la rotation du domaine D autour de l'axe (Oy).

b) Calculer le volume V_2 du corps obtenu par la rotation du domaine D autour de la droite horizontale d'équation $y = 4$.

---

a) Figure d'étude :



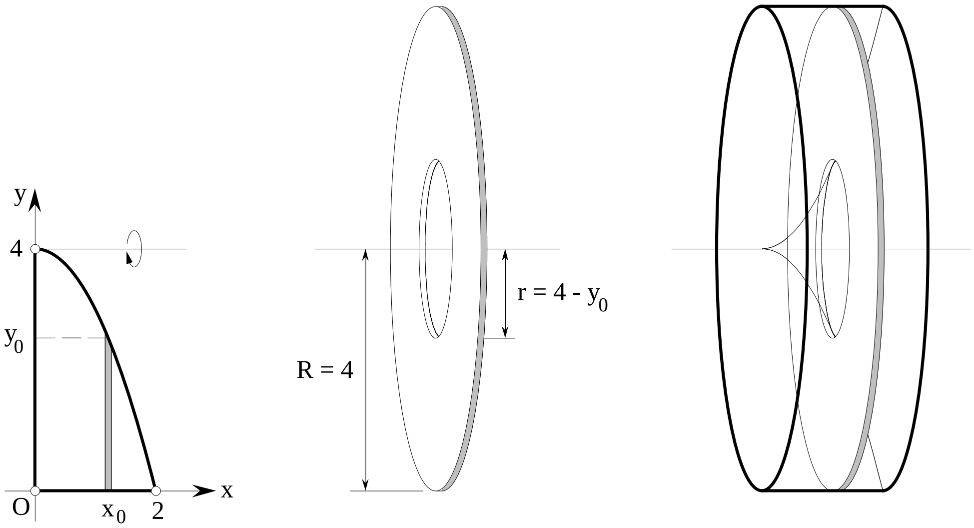
La section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, d'équation $y = y_0$, est un disque de rayon $r = x_0$.

L'aire de ce disque en fonction de y_0 est $A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, x_0^2 = \pi\,(4 - y_0)$.

Soit V_1 le volume de ce corps,

$$V_1 = \int_0^4 A(y)\,dy = \pi \int_0^4 (4-y)\,dy = \pi \left[4y - \frac{1}{2}\,y^2\right]_0^4 = 8\pi\,.$$

b) Figure d'étude :



La section du corps de révolution par le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, d'équation $x = x_0$, est une couronne de rayon extérieur $R = 4$ et de rayon intérieur $r = 4 - y_0 = 4 - (4 - x_0^2) = x_0^2$.

L'aire de cette couronne en fonction de x_0 est

$$A(x_0) = \pi\,(R^2 - r^2) = \pi\,(16 - x_0^4)\,.$$

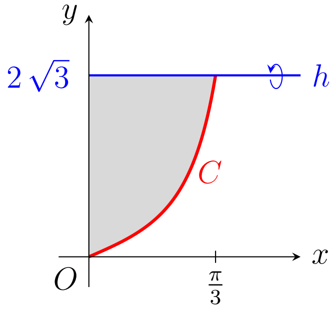
Soit V_2 le volume de ce corps,

$$V_2 = \int_0^2 A(x)\,dx = \pi \int_0^2 (16 - x^4)\,dx = \pi \left[16x - \frac{1}{5}\,x^5\right]_0^2 = \frac{128\pi}{5}\,.$$

5. Soit D le domaine du plan limité par la courbe C, l'axe Oy et la droite horizontale h d'équation $y = 2\sqrt{3}$.

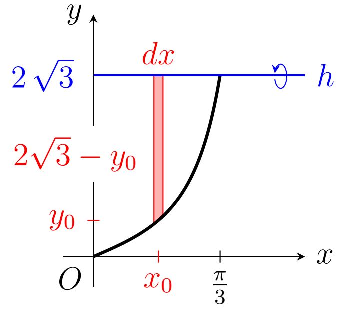
$$C: \quad y = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,, \qquad x \in [\,0\,,\, \tfrac{\pi}{3}\,]\,.$$

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe h.



- Aire de la section

  La section de ce corps de révolution par le plan d'équation $x = x_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est un disque de rayon $r = 2\sqrt{3} - y(x_0)$. L'aire de cette section est donc égale à



$$A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\left(2\sqrt{3} - y(x_0)\right)^2,$$

$$A(x_0) = \pi\left(12 - 4\sqrt{3}\, y(x_0) + y^2(x_0)\right),$$

$$A(x_0) = \pi\left(12 - 4\sqrt{3}\,\frac{\sin(x_0)}{\cos^2(x_0)} + \frac{\sin^2(x_0)}{\cos^4(x_0)}\right), \qquad 0 \leq x_0 < \tfrac{\pi}{3}.$$

- Expression du volume

  Le volume de ce corps de révolution a donc pour expression

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}} A(x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(12 - 4\sqrt{3}\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\right)dx.$$

- Recherche des primitives

  ○ $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx = \frac{1}{\cos(x)} + C,$

  ○ $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\,dx = \int \tan^2(x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \frac{1}{3}\tan^3(x) + C.$

- Calcul du volume

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[12 - 4\sqrt{3}\,\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\right]dx = \pi\left[12x - \frac{4\sqrt{3}}{\cos(x)} + \frac{\tan^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}},$$

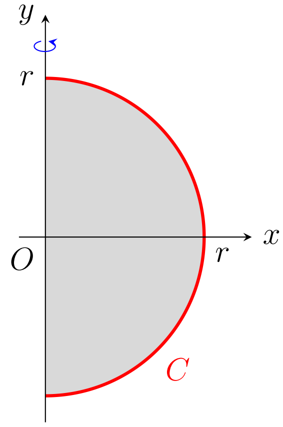
$$V = \pi\left[\left(4\pi - 8\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) - \left(-4\sqrt{3}\right)\right] = 4\pi^2 - 3\pi\sqrt{3}.$$

6. Vérifier que le volume d'une sphère de rayon r est égale à $\frac{4}{3}\pi\, r^3$.

- Une méthode : description paramétrique

  - Description de la sphère

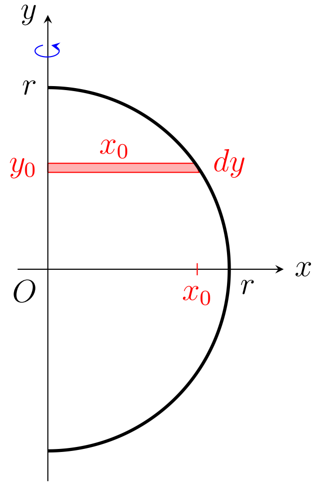
    La sphère de rayon r peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe Oy, du demi-cercle C d'équations paramétriques



$$C : \begin{cases} x(t) = r\,\cos(t) \\ y(t) = r\,\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}\,,\ \tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$

  - Aire de la section

    La section du corps de révolution par le plan d'équation $y = y_0$ est un disque de rayon $R = x_0$. L'aire de cette section vaut donc



$$A(y_0) = \pi\,r^2 = \pi\,x_0^2.$$

  - Expression du volume

    Le volume de la sphère a donc pour expression

$$V = \int_{-r}^{r} A(y)\,dy \;=\; \pi \int_{-r}^{r} x^2\,dy \;=\; 2\pi \int_0^r x^2\,dy\,.$$

    On traduit cette expression en fonction de t :

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\cdot\dot{y}(t)\,dt\,.$$

  - Calcul du volume

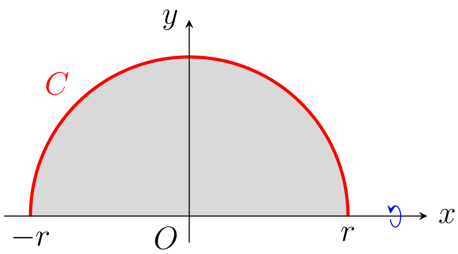
$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\cdot\dot{y}(t)\,dt \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2(t)\cdot[r\,\cos(t)]\,dt \\
&= 2\pi\,r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-\sin^2(t)\right]\cdot\cos(t)\,dt \\
&= 2\pi\,r^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cdot\cos(t)\,dt\right] \\
&= 2\pi\,r^3 \left[\sin(t) - \frac{1}{3}\,\sin^3(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4\pi}{3}\,r^3.
\end{aligned}$$

- Une méthode plus simple : description cartésienne

  - Description de la sphère

    La sphère de rayon r peut être décrite comme la surface de révolution engendrée par la rotation, autour de l'axe Ox, du demi-cercle C d'équation cartésienne

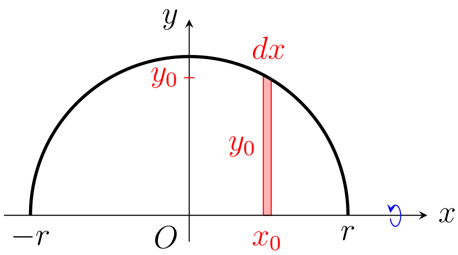
$$x^2 + y^2 = r^2\,, \quad y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = +\sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad -r \leq x \leq r\,.$$



  - Aire de la section

    La section du corps de révolution par le plan d'équation $x = x_0$ est un disque de rayon $R = y_0$.

    L'aire de cette section est donc égale à $A(x_0) = \pi\, r^2 = \pi\, y_0^2$.



  - Expression du volume

    Le volume de la sphère a donc pour expression

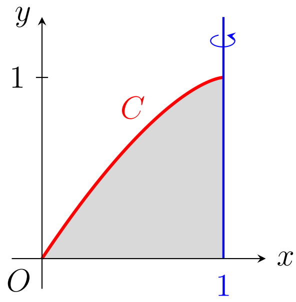
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\, dx \;=\; \pi \int_{-r}^{r} y^2(x)\, dx \;=\; 2\pi \int_0^r y^2(x)\, dx\,.$$

  - Calcul du volume

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^r y^2(x)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^r \left[r^2 - x^2\right]\, dx \\
&= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
&= \frac{4\pi}{3}\, r^3\,.
\end{aligned}$$

7. Soit D le domaine du plan limité par la courbe C, l'axe Ox et la droite verticale d'équation $x = 1$.

$$C : \begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = 1 - \cos^3(t) \end{cases} \qquad t \in \left[0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right].$$



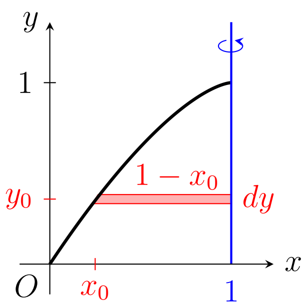
Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe d'équation $x = 1$.

- Aire de la section

  La section de ce corps de révolution par le plan d'équation $y = y_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est un disque de rayon $r = 1 - x_0$.

  L'aire de cette section est donc égale à

  $$A(y_0) = \pi\, r^2 = \pi\, [1 - x_0]^2 .$$



- Expression du volume

  Le volume de ce corps de révolution a donc pour expression

  $$V = \int_0^1 A(y)\, dy = \pi \int_0^1 [1 - x]^2\, dy .$$

  On traduit cette expression en fonction de la variable t :

  $$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - x(t)]^2 \cdot \dot{y}(t)\, dt .$$

- Calcul du volume

  $$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - x(t)]^2 \cdot \dot{y}(t)\, dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \sin^2(t)\right]^2 \cdot \left[-3\cos^2(t)(-\sin(t))\right] dt,$$

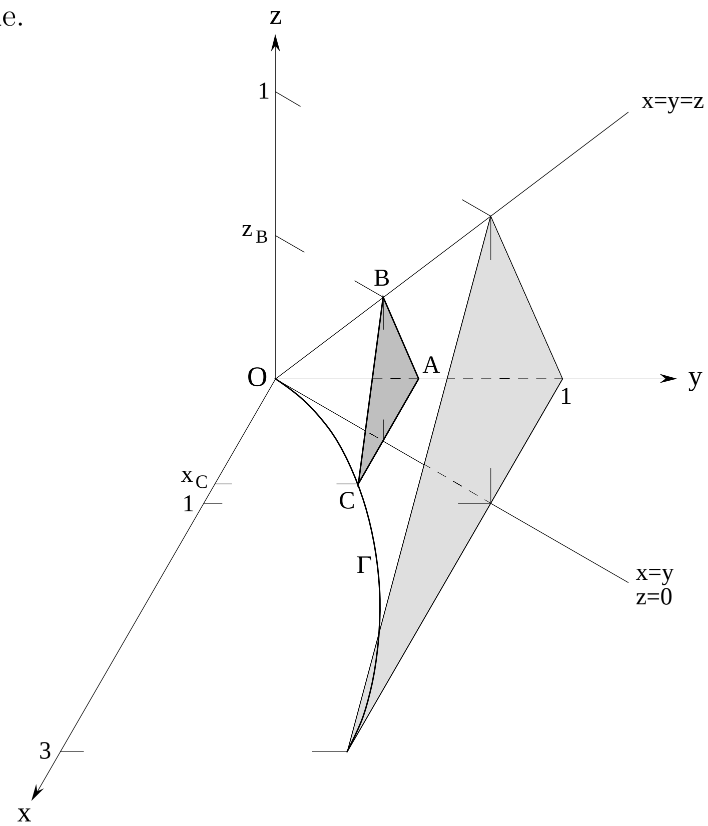
  $$V = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(t) \cdot \sin(t)\, dt = 3\pi \left[-\frac{\cos^7(t)}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{7} .$$

8. Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $(Oxyz)$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à (Oy) sont des triangles ABC définis ainsi : A est sur l'axe (Oy), B est sur la droite d'équations $x = y = z$ et C, dans le plan (Oxy), appartient à l'arc Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1 .$$

Calculer le volume du corps ainsi défini.

Figure d'étude.



Dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe Oy, d'équation $y = y_0$ [où $y_0 = y(t_0)$], l'aire de la section triangulaire vaut $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, x_C \cdot z_B$.

Déterminons les coordonnées des points B et C en fonction de t_0 :

$$B\ (y(t_0)\,;\, y(t_0)\,;\, y(t_0))\ , \qquad C\ (x(t_0)\,;\, y(t_0)\,;\, 0)\ .$$

D'où l'expression de l'aire $\mathcal{A}(y_0)$ en fonction de t_0 :

$$\mathcal{A}(y_0) = \mathcal{A}(y(t_0)) = \frac{1}{2}\; x(t_0)\cdot y(t_0) = \frac{1}{2}\;(2t_0 + t_0^2)\,(2t_0 - t_0^2) = \frac{1}{2}\;(4t_0^2 - t_0^4)\,.$$

On en déduit le calcul du volume V :

$$V = \int_{y(0)}^{y(1)} \mathcal{A}(y)\; dy \;=\; \int_0^1 \mathcal{A}(y(t))\; \dot{y}(t)\; dt\,.$$

$$V = \int_0^1 \frac{4t^2 - t^4}{2}\;(2-2t)\; dt \;=\; \int_0^1 (4t^2 - t^4)\,(1-t)\; dt \;=\; \int_0^1 (4t^2 - 4t^3 - t^4 + t^5)\; dt$$

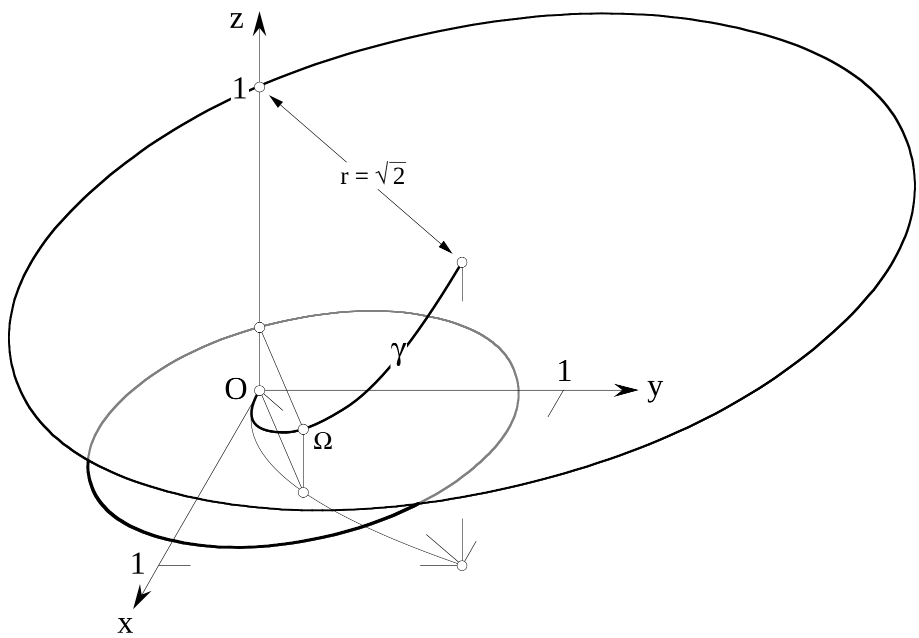
$$V = \left[\frac{4}{3}\,t^3 - t^4 - \frac{1}{5}\,t^5 + \frac{1}{6}\,t^6\,\right]_0^1 \;=\; \frac{3}{10}\,.$$

9. Soit γ la courbe de l'espace définie par $x = t\,,\ y = t^2\,,\ z = t^3\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$

On considère le corps engendré par des disques horizontaux dont les centres sont sur γ et dont les cercles frontières coupent l'axe Oz.

Calculer, pour $z \geq 0\,,$ le volume de ce corps sachant que le rayon des disques varie entre 0 et $\sqrt{2}\,.$

Figure d'étude.



Dans le plan horizontal d'équation $z = z_0$ où $z_0 = z(t_0) = t_0^3\,,$ le disque a pour centre $\Omega\,(t_0\,,\, t_0^2\,,\, t_0^3)$ et pour rayon $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{t_0^2 + t_0^4}\,.$

L'aire de ce disque vaut $A(z_0) = A(z(t_0)) = \pi\, r^2 = \pi\,(t_0^2 + t_0^4)\,.$

Calcul du volume V de ce corps.

$$V \;=\; \int_{z_1}^{z_2} A(z)\; dz \;=\; \int_{t_1}^{t_2} A(z(t))\;\dot{z}(t)\; dt\,.$$

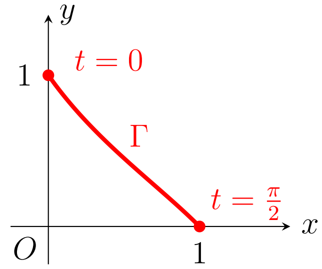
Or $\quad 0 \leq r \leq \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq t \leq 1\,.$

$$V \,=\, \pi \int_0^1 (t^2 + t^4)\;(3t^2)\; dt \;=\; 3\,\pi \int_0^1 (t^4 + t^6)\; dt\,,$$

$$V \;=\; 3\,\pi \left[\frac{1}{5}\; t^5 + \frac{1}{7}\; t^7\right]_0^1 \;=\; \frac{36\,\pi}{35}\,.$$

10. Dans l'espace, muni d'un système d'axes cartésien $Oxyz$, on considère un corps dont les sections par des plans perpendiculaires à l'axe Oy sont des carrés $ABCD$ tels que A est sur l'axe Oy et B, dans le plan Oxy, appartient à l'arc Γ, $(z_C\,,\, z_D > 0)$.

$$\Gamma: \begin{cases} x(t) = \sqrt{1-\cos(t)} \\ y(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+\sin(t)} \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad t \in [\,0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,].$$



Calculer le volume V de ce corps.

La section de ce corps par le plan d'équation $y = y_0$, $(y_0 = y(t_0))$ est un carré dont l'aire vaut $A = x^2 = x^2(t_0)$.

On en déduit l'expression du volume V de ce corps : $V = \displaystyle\int_0^1 A\,dy = \int_0^1 x^2\,dy$,

que l'on traduit en fonction de t.

Lorsque y varie de 0 à 1, t varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0, d'où $V = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2(t)\cdot\dot{y}(t)\,dt$,

avec $\quad \dot{y}(t) = \dfrac{-\sin(t)\,[\,1+\sin(t)\,] - \cos^2(t)}{[\,1+\sin(t)\,]^2} = \dfrac{-1-\sin(t)}{[\,1+\sin(t)\,]^2} = -\dfrac{1}{1+\sin(t)}$.

$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [\,1-\cos(t)\,]\cdot\left[\tfrac{-1}{1+\sin(t)}\right] dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1-\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt\,.$$

Voici deux méthodes pour calculer cette intégrale définie.

- Première méthode

  On intègre cette fonction rationnelle trigonométrique par changement de variable, à l'aide des tests de Bioche.

  Les trois tests d'invariance étant négatifs, on pose $z = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $0 \le z \le 1$.

$$t = 2\,\arctan(z)\,,\quad dt = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,,\qquad \cos(t) = \frac{1-z^2}{1+z^2}\,,\quad \sin(t) = \frac{2z}{1+z^2}\,.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt = \int_0^1 \frac{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}}\cdot\frac{2}{1+z^2}\,dz = \int_0^1 \frac{4z^2}{(1+z)^2(1+z^2)}\,dz\,.$$

  On décompose cette fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{4z^2}{(1+z)^2(1+z^2)} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{(1+z)^2} + \frac{Cz+D}{1+z^2}\,,\qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}\,.$$

et par identification, on obtient $A = -2\,,\ B = 2\,,\ C = 2\,,\ D = 0$:

$$\frac{4z^2}{(1+z)^2(1+z^2)} = -\frac{2}{1+z} + \frac{2}{(1+z)^2} + \frac{2z}{1+z^2}\,.$$

Puis on intègre les éléments simples :

$$V = -2\int_0^1 \frac{1}{1+z}\,dz - 2\int_0^1 -\frac{1}{(1+z)^2}\,dz + \int_0^1 \frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$= -2\Big[\ln(1+z)\Big]_0^1 - 2\left[\frac{1}{1+z}\right]_0^1 + \Big[\ln\left(1+z^2\right)\Big]_0^1 = 1 - \ln(2)\,.$$

- Deuxième méthode

  On fait apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}\,dt\,.$$

  ◦ Avec $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt = \Big[\ln\big(1+\sin(t)\big)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)\,.$

  ◦ Et $\displaystyle\frac{1}{1+\sin(t)}$ s'intègre par changement de variable.

  Les trois tests de Bioche étant négatifs, on pose $z = \tan\left(\frac{t}{2}\right),\quad 0 \le z \le 1\,.$

$$t = 2\,\arctan(z)\,,\quad dt = \frac{2}{1+z^2}\,dz\,,\qquad \sin(t) = \frac{2z}{1+z^2}\,.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}}\cdot\frac{2}{1+z^2}\,dz = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+z)^2}\,dz$$

$$= 2\left[-\frac{1}{1+z}\right]_0^1 = 2\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = 1\,.$$

En conclusion : $\displaystyle V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)}\,dt = 1 - \ln(2)\,.$