

Corrigé 22

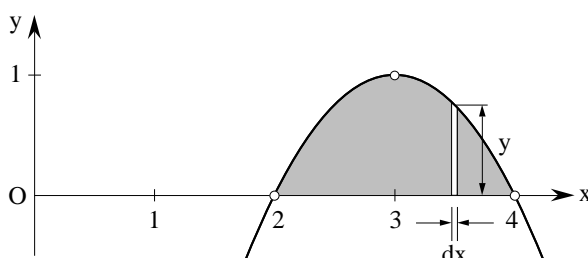
1. Déterminer, dans les trois cas suivants, l'aire du domaine situé entre l'axe Ox et l'arc de courbe défini par $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), y \geq 0\}$.

a) $f(x) = 6x - x^2 - 8$, b) $f(x) = e^{-|x|} - \frac{1}{2}$, c) $f(x) = (2 - x) \ln x$.

- a) Considérons la courbe définie par $y = f(x)$.

$$y = -x^2 + 6x - 8 \Leftrightarrow y = -(x - 3)^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 3)^2.$$

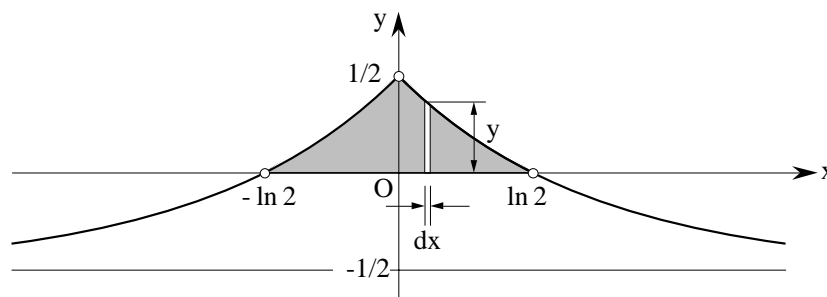
Représentation du domaine.



Soit A l'aire du domaine, $A = \int_2^4 y \, dx$.

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right]_2^4 \\ A &= \left(-\frac{64}{3} + 48 - 32 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 16 \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

- b) La fonction f est paire, la courbe définie par $y = f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe Oy , elle coupe l'axe Ox en $x = \pm \ln 2$.

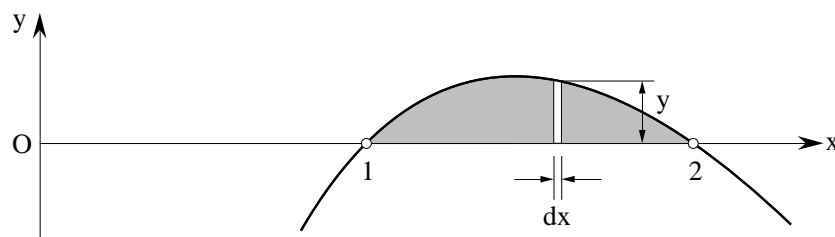


Soit B l'aire du domaine, $B = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} y \, dx = 2 \int_0^{\ln 2} y \, dx$.

$$B = 2 \int_0^{\ln 2} \left(e^{-x} - \frac{1}{2} \right) dx = 2 \left[-e^{-x} - \frac{1}{2}x \right]_0^{\ln 2} = 2 \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - (-1) \right]$$

$$B = 1 - \ln 2.$$

c) Soit $y = f(x) = (2 - x) \ln x$. $y \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.



Soit C l'aire du domaine, $C = \int_1^2 y \, dx = \int_1^2 (2 - x) \ln x \, dx$.

Recherche d'une primitive de $(2 - x) \ln x$ par intégration par parties.

On pose $u' = 2 - x$ et $v = \ln x$, $u = 2x - \frac{x^2}{2}$ et $v' = \frac{1}{x}$.

$$\int (2 - x) \ln x \, dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \int \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$\int (2 - x) \ln x \, dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \ln x - 2x + \frac{x^2}{4} + K.$$

Calcul de l'aire C :

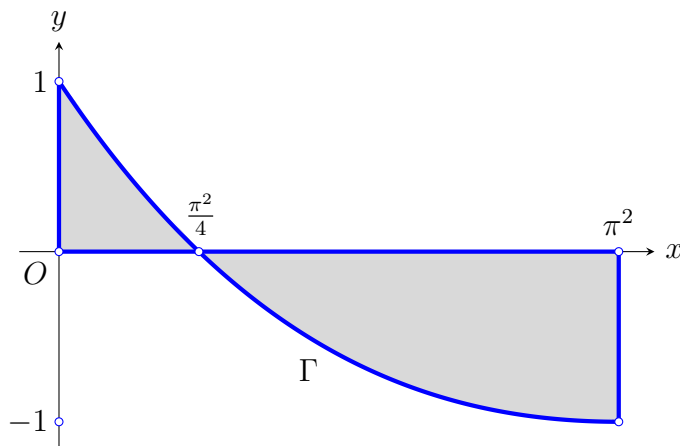
$$C = \left[\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \ln x - 2x + \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

2. Dans le plan muni d'un système d'axes Oxy , on considère la courbe Γ défini par

$$\Gamma : y = \cos(\sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq \pi^2.$$

Calculer l'aire géométrique du domaine fini limité par la courbe Γ , l'axe Ox , l'axe Oy et la droite verticale d'équation $x = \pi^2$.

- Représentation du domaine



- Expression de l'aire géométrique du domaine

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi^2} |\cos(\sqrt{x})| dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx + \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} [-\cos(\sqrt{x})] dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx.
 \end{aligned}$$

- Recherche de primitive

Pour intégrer $\cos(\sqrt{x})$, on change de variable en posant

$$\sqrt{x} = t, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad x = t^2, \quad dx = 2t dt.$$

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx = \int \cos(t) \cdot 2t dt = 2 \int t \cdot \cos(t) dt.$$

Puis on intègre $t \cdot \cos(t)$ par parties :

$$\begin{aligned}
 \int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)} dt &= t \cdot \sin(t) - \int 1 \cdot \sin(t) dt = t \cdot \sin(t) + \cos(t) + C. \\
 \int \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 [\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})] + C.
 \end{aligned}$$

- Conclusion

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx \\
 &= 2 [\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})]_0^{\frac{\pi^2}{4}} - 2 [\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \\
 &= 2 \left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0 + 1) \right] - 2 \left[(0 + (-1)) - \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) \right] \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

3. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes d'équation

$$y = x^2 + 2x + 3 \quad \text{et} \quad y = 2x + 4.$$

Posons $y_1 = 2x + 4$ et $y_2 = x^2 + 2x + 3$.

Les deux courbes se coupent en $(-1, 2)$ et en $(1, 6)$.

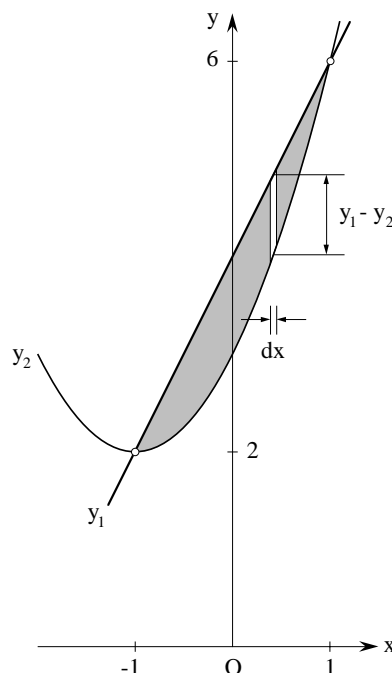
Soit A l'aire du domaine fini limité par les deux courbes.

$$A = \int_{-1}^1 (y_1 - y_2) dx$$

$$A = \int_{-1}^1 [(2x + 4) - (x^2 + 2x + 3)] dx$$

$$A = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx$$

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$



4. Calculer l'aire des domaines finis compris entre les courbes définies par les équations suivantes :

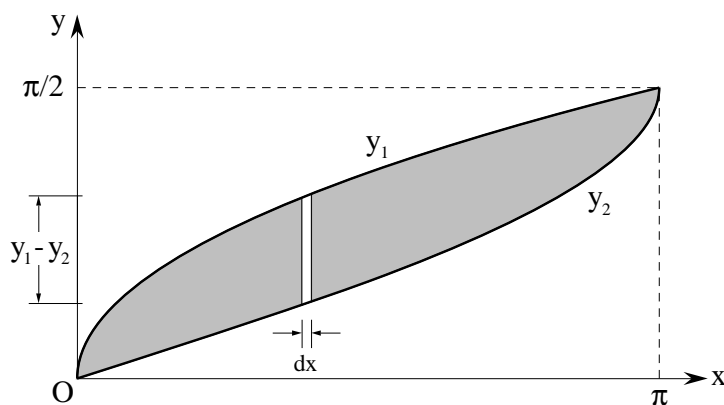
a) $y = \frac{1}{2} \sqrt{\pi x}$ et $y = \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)$.

Intégrer d'abord par rapport à x , puis par rapport à y .

Indication : ces deux courbes se coupent en $x = 0$ et $x = \pi$.

- Intégration par rapport à x .

Posons $y_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi x}$ et $y_2 = \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)$, $x \in [0, \pi]$.



L'aire A du domaine s'écrit :

$$A = \int_0^\pi (y_1 - y_2) dx = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} \sqrt{\pi x} - \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) \right] dx$$

Recherche des primitives :

$$\int \frac{1}{2} \sqrt{\pi x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int \sqrt{x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3} x^{3/2} + C.$$

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \int 1 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx. \quad \text{Posons } u' = 1 \text{ et } v = \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} dx,$$

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) + \sqrt{\pi^2 - x^2} + C.$$

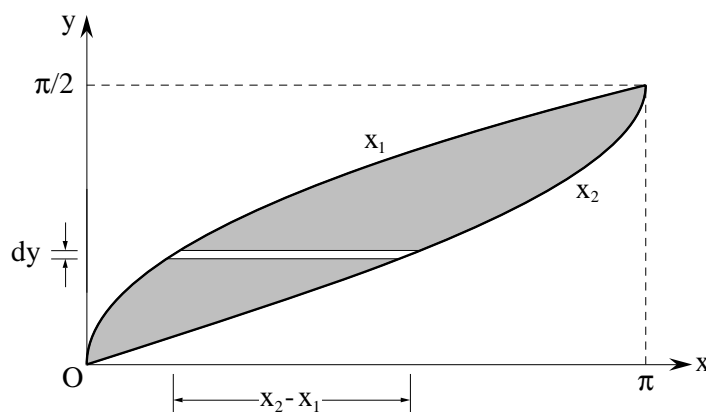
$$\text{D'où : } A = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{3} x^{3/2} - x \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) - \sqrt{\pi^2 - x^2} \right]_0^{\pi} = \pi - \frac{\pi^2}{6}.$$

- Intégration par rapport à y .

$\forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{\pi x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{\pi} y^2 \quad \text{et} \quad y = \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) \Leftrightarrow x = \pi \sin y.$$

Posons $x_1 = \frac{4}{\pi} y^2$ et $x_2 = \pi \sin y$.



L'aire A du domaine s'écrit :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\pi \sin y - \frac{4}{\pi} y^2 \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\pi \sin y - \frac{4}{\pi} y^2 \right] dy$$

$$A = \left[-\pi \cos y - \frac{4}{3\pi} y^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{\pi^2}{6}.$$

L'intégration par rapport à y s'impose ici comme la méthode nécessitant les calculs les plus élémentaires.

b) $y^2 + 2y - x = 0$ et $y - x + 2 = 0$.

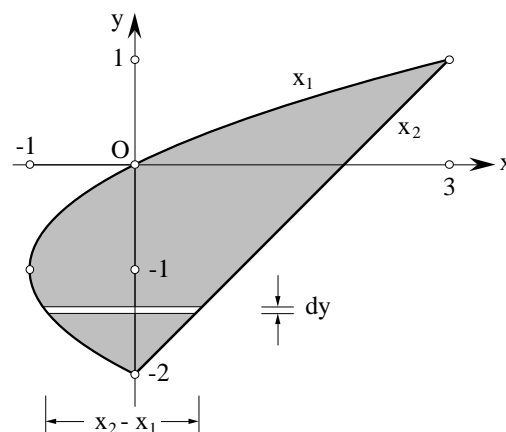
On intègre par rapport à la variable y .

$$B = \int_{-2}^1 [x_2(y) - x_1(y)] dy$$

avec $x_1(y) = y^2 + 2y$ et $x_2(y) = y + 2$.

$$B = \int_{-2}^1 (-y^2 - y + 2) dy$$

$$B = \left[-\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + 2y \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$



Remarque : on peut aussi calculer cette aire en intégrant par rapport à x .

Il faut intégrer de $x = -1$ à $x = 0$ la différence des ordonnées des deux branches de la parabole d'équation $(y + 1)^2 = x + 1$, et intégrer de $x = 0$ à $x = 3$ la différence des ordonnées de la branche supérieure de la parabole et de la droite d'équation $y = x - 2$.

$$B = \int_{-1}^0 [(-1 + \sqrt{x+1}) - (-1 - \sqrt{x+1})] dx + \int_0^3 [(-1 + \sqrt{x+1}) - (x - 2)] dx.$$

c) $(y - 3)^2 = x - 1$ et $(y - 3)^2 = 4(x - 4)$.

Les deux paraboles se coupent en $(5, 1)$ et $(5, 5)$.

Posons $x_1(y) = (y - 3)^2 + 1$

et $x_2(y) = \frac{(y - 3)^2}{4} + 4$.

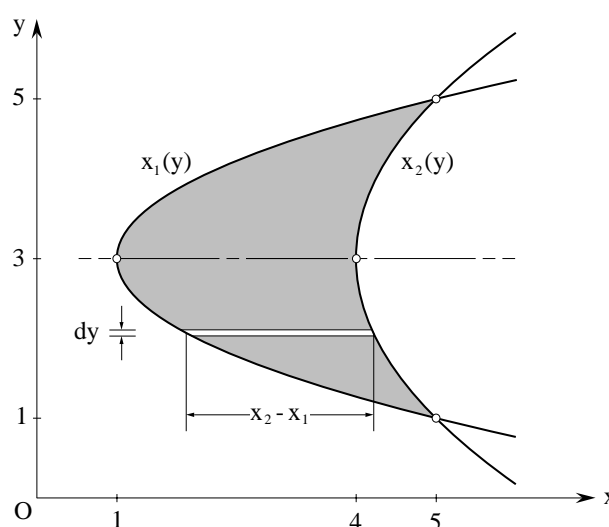
L'aire C du domaine s'écrit :

$$C = \int_1^5 [x_2(y) - x_1(y)] dy,$$

$$C = 2 \int_1^3 [x_2(y) - x_1(y)] dy.$$

$$C = 2 \int_1^3 \left[\frac{(y - 3)^2}{4} + 4 - [(y - 3)^2 + 1] \right] dy = 2 \int_1^3 \left[-\frac{3}{4} (y - 3)^2 + 3 \right] dy$$

$$C = 2 \left[-\frac{1}{4} (y - 3)^3 + 3y \right]_1^3 = 2[9 - (2 + 3)] = 8.$$



d) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$ et $y = 2x$.

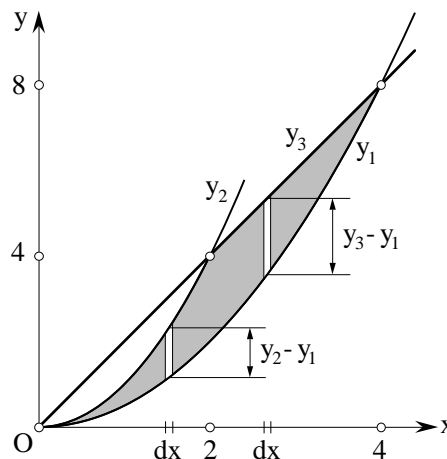
Posons $y_1 = \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = x^2$ et $y_3 = 2x$.

L'aire D du domaine fini limité par les trois courbes se décompose de la façon suivante

$$D = \int_0^2 (y_2 - y_1) dx + \int_2^4 (y_3 - y_1) dx$$

$$D = \int_0^2 (x^2 - \frac{1}{2}x^2) dx + \int_2^4 (2x - \frac{1}{2}x^2) dx$$

$$D = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4.$$



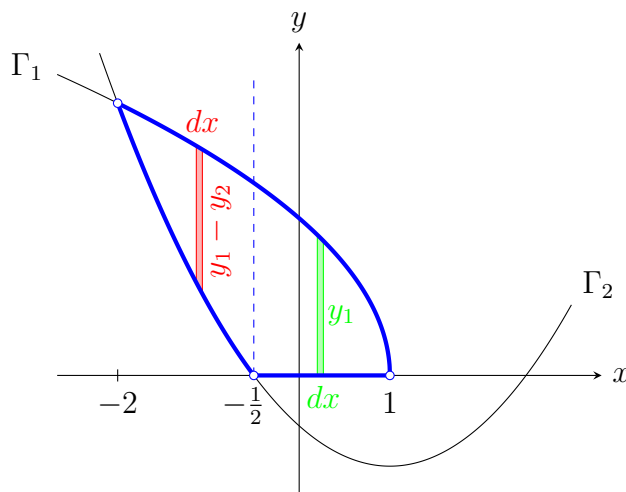
5. Dans le plan, on considère les deux courbes Γ_1 et Γ_2 suivantes :

$$\Gamma_1 : y = \sqrt{3(1-x)}, \quad x \leq 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : y+1 = \frac{4}{9}(x-1)^2.$$

Calculer l'aire du domaine fini contenu dans le demi-plan $y \geq 0$ et limité par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 .

Indication : les deux courbes Γ_1 et Γ_2 se coupent en $x = -2$.

- Une méthode : découpage du domaine en "tranches verticales"
 - Représentation du domaine



Le découpage du domaine en "tranches verticales" exige de distinguer deux cas selon que x est plus grand ou plus petit que $-\frac{1}{2}$.

◦ Expression de l'aire du domaine

* si $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$, les "tranches verticales" ont pour épaisseur dx et pour longueur $y_1 - y_2$,

* si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, les "tranches verticales" ont pour épaisseur dx et pour longueur y_1 .

Expression de l'aire A :

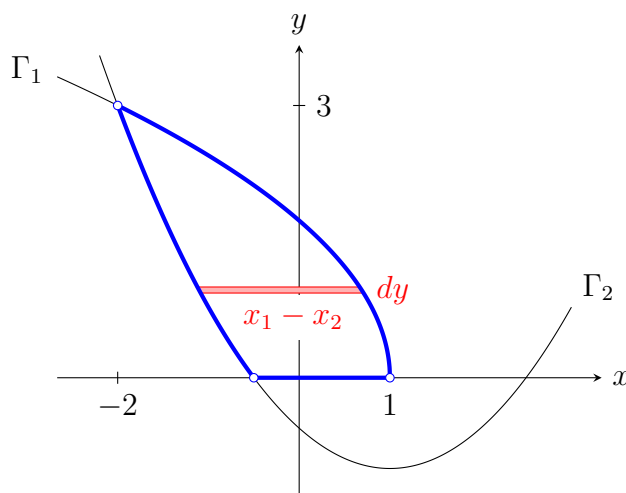
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [y_1(x) - y_2(x)] dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 y_1(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 y_1(x) dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} y_2(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 \sqrt{3(1-x)} dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left[-1 + \frac{4}{9}(x-1)^2\right] dx. \end{aligned}$$

◦ Intégration

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 \sqrt{3(1-x)} dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left[-1 + \frac{4}{9}(x-1)^2\right] dx \\ &= \sqrt{3} \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^1 - \left[-x + \frac{4}{27}(x-1)^3\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} \left[0 - (-2\sqrt{3})\right] - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - (2 - 4)\right] \\ &= 4. \end{aligned}$$

• Une meilleure méthode : découpage du domaine en "tranches horizontales"

◦ Représentation du domaine



○ Expression de l'aire du domaine

Les "tranches horizontales" ont pour largeur dy et pour longueur $x_1 - x_2$.

On explicite $x_1(y)$ et $x_2(y)$ sous la condition $x_1, x_2 \leq 1$:

$$* \Gamma_1 : \quad y = \sqrt{3(1-x)} \quad \Rightarrow \quad x = 1 - \frac{y^2}{3}, \quad x_1(y) = 1 - \frac{y^2}{3}.$$

$$* \Gamma_2 : \quad y+1 = \frac{4}{9}(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{y+1},$$

$$x_2(y) = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{y+1}.$$

Expression de l'aire A du domaine :

$$A = \int_0^3 [x_1(y) - x_2(y)] dy = \int_0^3 \left[-\frac{y^2}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{y+1} \right] dy$$

○ Intégration

$$A = \int_0^3 \left[-\frac{y^2}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{y+1} \right] dy = \left[-\frac{y^3}{9} + (y+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = [(-3+8) - 1] = 4.$$

6. On considère l'ellipse définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Montrer que l'aire du domaine limité par cette ellipse vaut πab .

L'ellipse est symétrique par rapport aux axes Ox et Oy , on calcule l'aire du domaine contenu dans le premier quadrant ($x \geq 0, y \geq 0$).

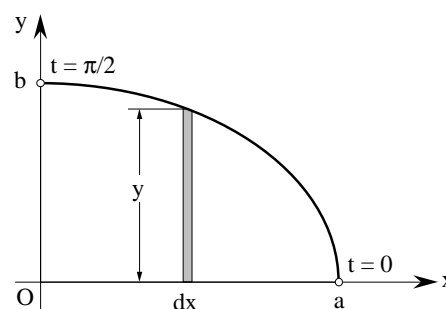
$$\frac{A}{4} = \int_0^a y(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t) dt.$$

Or x varie de 0 à a lorsque t varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0, donc $t_1 = \frac{\pi}{2}$ et $t_2 = 0$.

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t) \cdot \dot{x}(t) dt.$$

$$\frac{A}{4} = -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt$$

$$\frac{A}{4} = -\frac{1}{2} ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos 2t) dt$$



$$\frac{A}{4} = -\frac{1}{2} ab \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{1}{4} \pi ab \Leftrightarrow A = \pi ab.$$

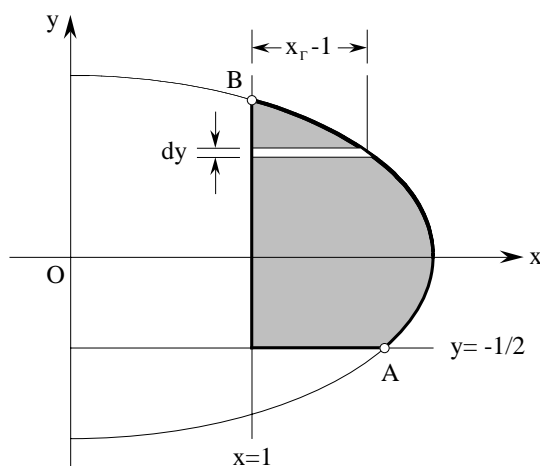
7. Dans le plan Oxy , on considère la demi-ellipse Γ définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

On considère le domaine fini D limité par la courbe Γ , la droite horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$ et la droite verticale d'équation $x = 1$, ($x \geq 1$ et $y \geq -\frac{1}{2}$).

Calculer l'aire du domaine D .

Figure d'étude :



L'aire \mathcal{A} du domaine D s'écrit :

$$\mathcal{A} = \int_{y_A}^{y_B} (x_{\Gamma} - 1) dy = \int_{t_A}^{t_B} [x_{\Gamma}(t) - 1] \dot{y}(t) dt.$$

Recherche des bornes t_A et t_B .

$$\bullet A(x_A, -\frac{1}{2}) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t_A \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } y(t_A) = -\frac{1}{2}.$$

$$\sin(t_A) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t_A = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\bullet B(1, y_B) \in \Gamma \text{ et } y_B > 0 \Leftrightarrow \exists t_B \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } x(t_B) = 1.$$

$$2 \cos(t_B) = 1 \Leftrightarrow \cos(t_B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_B = \frac{\pi}{3}.$$

Calcul de l'aire \mathcal{A} du domaine D :

$$\mathcal{A} = \int_{t_A}^{t_B} [x_{\Gamma}(t) - 1] \dot{y}(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [2 \cos t - 1] \cos t dt ,$$

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos^2 t - \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2t + 1 - \cos t) dt ,$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2} \sin 2t + t - \sin t \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi - 1}{2} .$$
