

## Corrigé 22

1. Déterminer, dans les trois cas suivants, l'aire du domaine situé entre l'axe  $Ox$  et l'arc de courbe défini par  $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), y \geq 0\}$ .

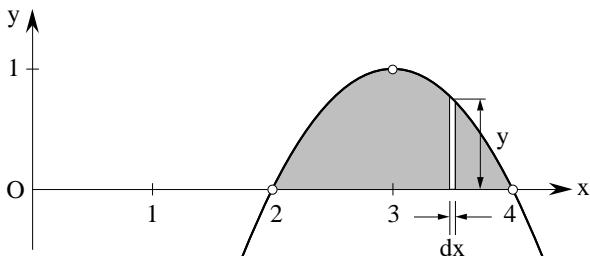
$$\text{a) } f(x) = 6x - x^2 - 8, \quad \text{b) } f(x) = e^{-|x|} - \frac{1}{2}, \quad \text{c) } f(x) = (2-x) \ln x.$$


---

a) Considérons la courbe définie par  $y = f(x)$ .

$$y = -x^2 + 6x - 8 \Leftrightarrow y = -(x-3)^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = -(x-3)^2.$$

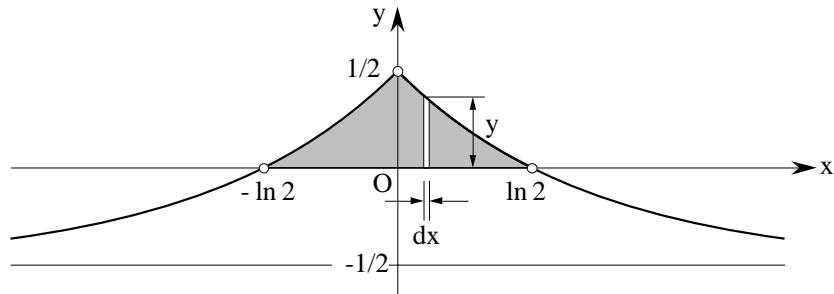
Représentation du domaine.



Soit  $A$  l'aire du domaine,  $A = \int_2^4 y dx$ .

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right]_2^4 \\ A &= \left( -\frac{64}{3} + 48 - 32 \right) - \left( -\frac{8}{3} + 12 - 16 \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

- b) La fonction  $f$  est paire, la courbe définie par  $y = f(x)$  est symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ , elle coupe l'axe  $Ox$  en  $x = \pm \ln 2$ .

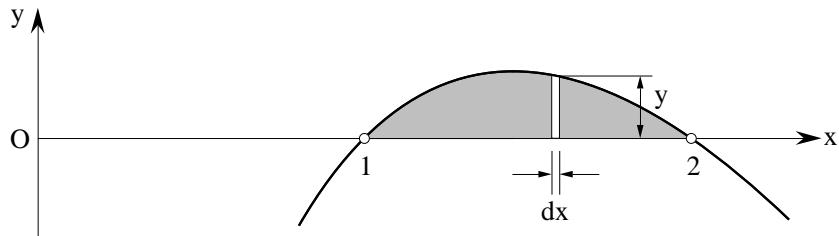


Soit  $B$  l'aire du domaine,  $B = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} y dx = 2 \int_0^{\ln 2} y dx$ .

$$B = 2 \int_0^{\ln 2} \left( e^{-x} - \frac{1}{2} \right) dx = 2 \left[ -e^{-x} - \frac{1}{2}x \right]_0^{\ln 2} = 2 \left[ \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) - (-1) \right]$$

$$B = 1 - \ln 2.$$

c) Soit  $y = f(x) = (2-x) \ln x$ .  $y \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$ .



$$\text{Soit } C \text{ l'aire du domaine, } C = \int_1^2 y \, dx = \int_1^2 (2-x) \ln x \, dx.$$

Recherche d'une primitive de  $(2-x) \ln x$  par intégration par parties.

$$\text{On pose } u' = 2-x \text{ et } v = \ln x, \quad u = 2x - \frac{x^2}{2} \text{ et } v' = \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned} \int (2-x) \ln x \, dx &= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \int \left(2 - \frac{x}{2}\right) \, dx \\ \int (2-x) \ln x \, dx &= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \ln x - 2x + \frac{x^2}{4} + K. \end{aligned}$$

Calcul de l'aire  $C$ :

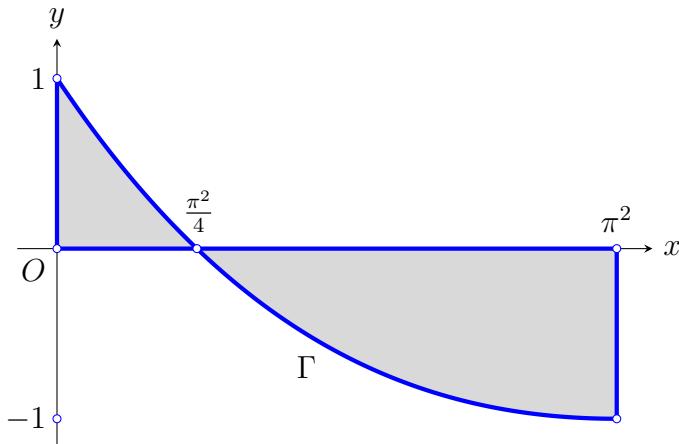
$$C = \left[ \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \ln x - 2x + \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

2. Dans le plan muni d'un système d'axes  $Oxy$ , on considère la courbe  $\Gamma$  défini par

$$\Gamma : y = \cos(\sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq \pi^2.$$

Calculer l'aire géométrique du domaine fini limité par la courbe  $\Gamma$ , l'axe  $Ox$ , l'axe  $Oy$  et la droite verticale d'équation  $x = \pi^2$ .

- Représentation du domaine



- Expression de l'aire géométrique du domaine

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi^2} |\cos(\sqrt{x})| dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx + \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} [-\cos(\sqrt{x})] dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx.
 \end{aligned}$$

- Recherche de primitive

Pour intégrer  $\cos(\sqrt{x})$ , on change de variable en posant

$$\sqrt{x} = t, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad x = t^2, \quad dx = 2t dt.$$

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx = \int \cos(t) \cdot 2t dt = 2 \int t \cdot \cos(t) dt.$$

Puis on intègre  $t \cdot \cos(t)$  par parties :

$$\int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)} dt = t \cdot \sin(t) - \int 1 \cdot \sin(t) dt = t \cdot \sin(t) + \cos(t) + C.$$

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx = 2 [\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})] + C.$$

- Conclusion

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) dx \\
 &= 2 [\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})]_0^{\frac{\pi^2}{4}} - 2 [\sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \\
 &= 2 [(\frac{\pi}{2} + 0) - (0 + 1)] - 2 [(0 + (-1)) - (\frac{\pi}{2} + 0)] \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

### 3. Calculer l'aire du domaine limité par les courbes d'équation

$$y = x^2 + 2x + 3 \quad \text{et} \quad y = 2x + 4.$$

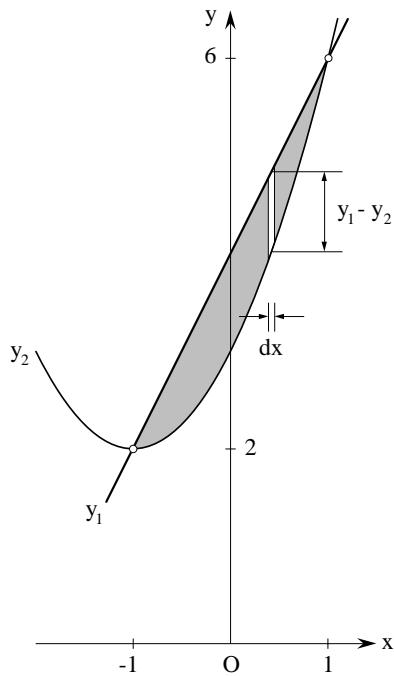

---

Posons  $y_1 = 2x + 4$  et  $y_2 = x^2 + 2x + 3$ .

Les deux courbes se coupent en  $(-1, 2)$  et en  $(1, 6)$ .

Soit  $A$  l'aire du domaine fini limité par les deux courbes.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (y_1 - y_2) dx \\ A &= \int_{-1}^1 [(2x + 4) - (x^2 + 2x + 3)] dx \\ A &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx \\ A &= \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



4. Calculer l'aire des domaines finis compris entre les courbes définies par les équations suivantes :

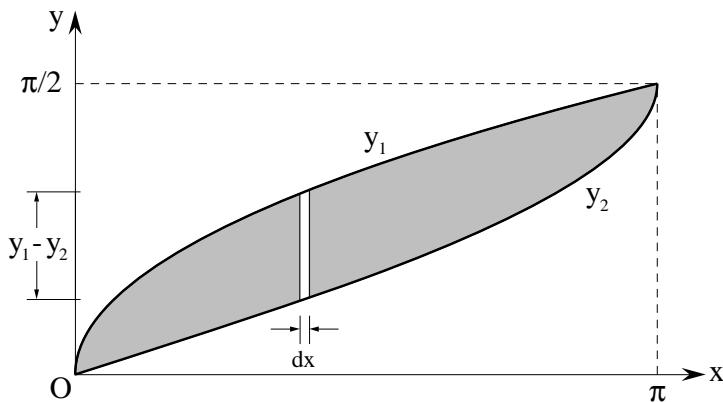
a)  $y = \frac{1}{2} \sqrt{\pi x}$  et  $y = \arcsin(\frac{x}{\pi})$ .

Intégrer d'abord par rapport à  $x$ , puis par rapport à  $y$ .

Indication : ces deux courbes se coupent en  $x = 0$  et  $x = \pi$ .

- Intégration par rapport à  $x$ .

Posons  $y_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi x}$  et  $y_2 = \arcsin(\frac{x}{\pi})$ ,  $x \in [0, \pi]$ .



L'aire  $A$  du domaine s'écrit :

$$A = \int_0^\pi (y_1 - y_2) dx = \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\pi x} - \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) \right] dx$$

Recherche des primitives :

$$\int \frac{1}{2} \sqrt{\pi x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int \sqrt{x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{3} x^{3/2} + C.$$

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \int 1 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx. \quad \text{Posons } u' = 1 \text{ et } v = \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} dx,$$

$$\int \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) + \sqrt{\pi^2 - x^2} + C.$$

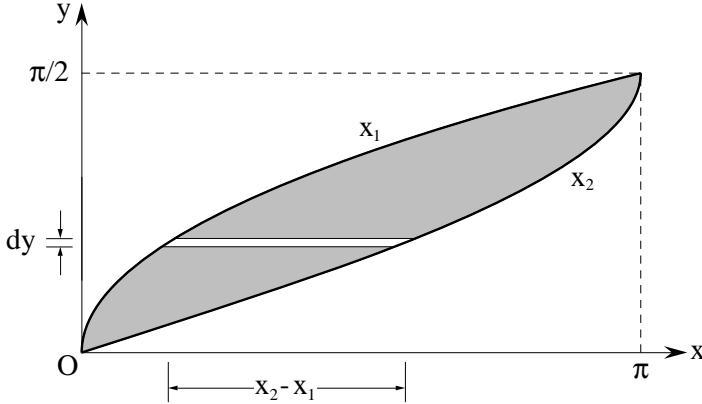
$$\text{D'où : } A = \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{3} x^{3/2} - x \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) - \sqrt{\pi^2 - x^2} \right]_0^\pi = \pi - \frac{\pi^2}{6}.$$

- Intégration par rapport à  $y$ .

$\forall (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a :

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{\pi x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{\pi} y^2 \quad \text{et} \quad y = \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right) \Leftrightarrow x = \pi \sin y.$$

Posons  $x_1 = \frac{4}{\pi} y^2$  et  $x_2 = \pi \sin y$ .



L'aire  $A$  du domaine s'écrit :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\pi \sin y - \frac{4}{\pi} y^2] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\pi \sin y - \frac{4}{\pi} y^2] dy$$

$$A = \left[ -\pi \cos y - \frac{4}{3\pi} y^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \frac{\pi^2}{6}.$$

L'intégration par rapport à  $y$  s'impose ici comme la méthode nécessitant les calculs les plus élémentaires.

b)  $y^2 + 2y - x = 0$  et  $y - x + 2 = 0$ .

---

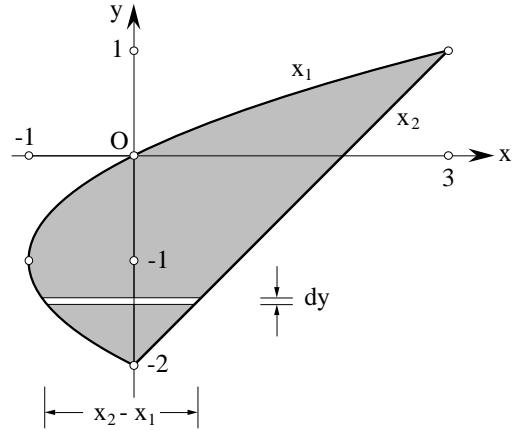
On intègre par rapport à la variable  $y$ .

$$B = \int_{-2}^1 [x_2(y) - x_1(y)] dy$$

avec  $x_1(y) = y^2 + 2y$  et  $x_2(y) = y + 2$ .

$$B = \int_{-2}^1 (-y^2 - y + 2) dy$$

$$B = \left[ -\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + 2y \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$



Remarque : on peut aussi calculer cette aire en intégrant par rapport à  $x$ .

Il faut intégrer de  $x = -1$  à  $x = 0$  la différence des ordonnées des deux branches de la parabole d'équation  $(y+1)^2 = x+1$ , et intégrer de  $x = 0$  à  $x = 3$  la différence des ordonnées de la branche supérieure de la parabole et de la droite d'équation  $y = x - 2$ .

$$B = \int_{-1}^0 [(-1 + \sqrt{x+1}) - (-1 - \sqrt{x+1})] dx + \int_0^3 [(-1 + \sqrt{x+1}) - (x-2)] dx.$$

c)  $(y-3)^2 = x-1$  et  $(y-3)^2 = 4(x-4)$ .

---

Les deux paraboles se coupent en  $(5, 1)$  et  $(5, 5)$ .

Posons  $x_1(y) = (y-3)^2 + 1$

et  $x_2(y) = \frac{(y-3)^2}{4} + 4$ .

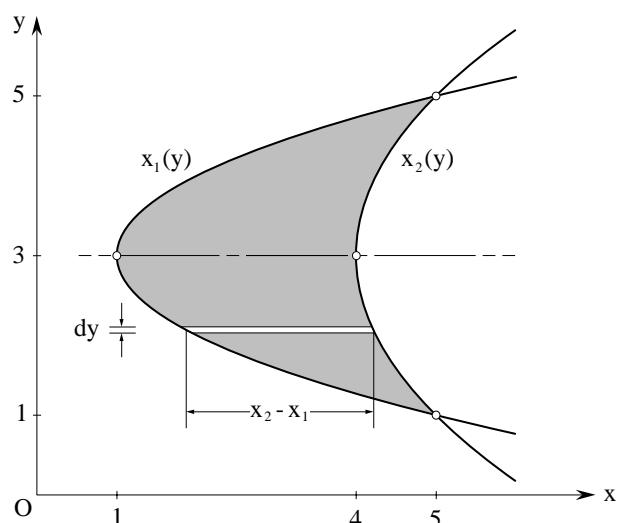
L'aire  $C$  du domaine s'écrit :

$$C = \int_1^5 [x_2(y) - x_1(y)] dy,$$

$$C = 2 \int_1^3 [x_2(y) - x_1(y)] dy.$$

$$C = 2 \int_1^3 \left[ \frac{(y-3)^2}{4} + 4 - [(y-3)^2 + 1] \right] dy = 2 \int_1^3 \left[ -\frac{3}{4} (y-3)^2 + 3 \right] dy$$

$$C = 2 \left[ -\frac{1}{4} (y-3)^3 + 3y \right]_1^3 = 2 [9 - (2+3)] = 8.$$



d)  $y = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y = x^2$  et  $y = 2x$ .

---

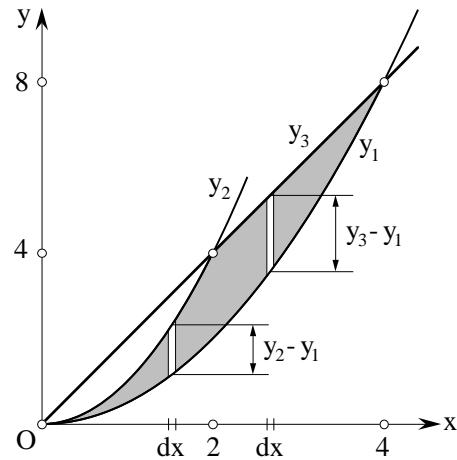
Posons  $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y_2 = x^2$  et  $y_3 = 2x$ .

L'aire  $D$  du domaine fini limité par les trois courbes se décompose de la façon suivante

$$D = \int_0^2 (y_2 - y_1) dx + \int_2^4 (y_3 - y_1) dx$$

$$D = \int_0^2 (x^2 - \frac{1}{2}x^2) dx + \int_2^4 (2x - \frac{1}{2}x^2) dx$$

$$D = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4.$$



5. Dans le plan, on considère les deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  suivantes :

$$\Gamma_1 : y = \sqrt{3(1-x)}, \quad x \leq 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : y+1 = \frac{4}{9}(x-1)^2.$$

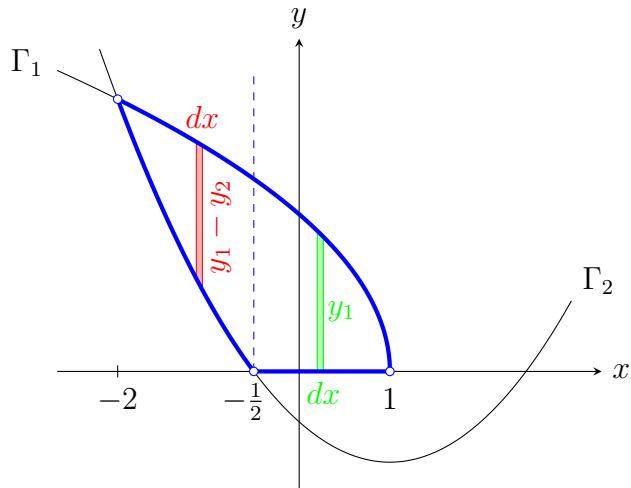
Calculer l'aire du domaine fini contenu dans le demi-plan  $y \geq 0$  et limité par les deux arcs  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Indication : les deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se coupent en  $x = -2$ .

---

- Une méthode : découpage du domaine en "tranches verticales"

- Représentation du domaine



Le découpage du domaine en "tranches verticales" exige de distinguer deux cas selon que  $x$  est plus grand ou plus petit que  $-\frac{1}{2}$ .

- Expression de l'aire du domaine

- \* si  $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ , les "tranches verticales" ont pour épaisseur  $dx$  et pour longueur  $y_1 - y_2$ ,
- \* si  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ , les "tranches verticales" ont pour épaisseur  $dx$  et pour longueur  $y_1$ .

Expression de l'aire  $A$  :

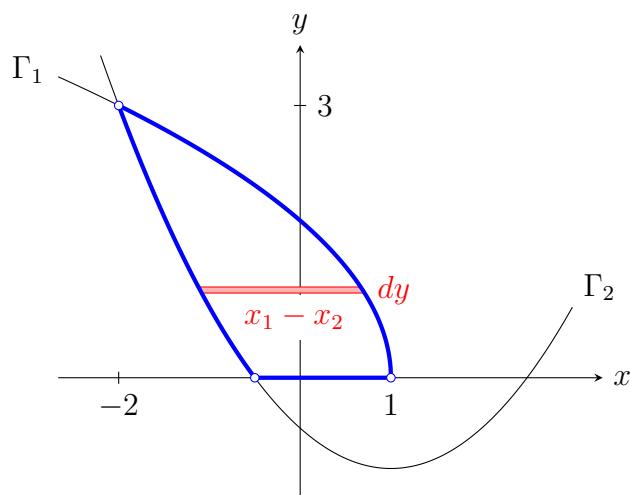
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} [y_1(x) - y_2(x)] dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 y_1(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 y_1(x) dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} y_2(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 \sqrt{3(1-x)} dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left[ -1 + \frac{4}{9}(x-1)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

- Intégration

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 \sqrt{3(1-x)} dx - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left[ -1 + \frac{4}{9}(x-1)^2 \right] dx \\ &= \sqrt{3} \left[ -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^1 - \left[ -x + \frac{4}{27}(x-1)^3 \right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} \left[ 0 - (-2\sqrt{3}) \right] - \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - (2-4) \right] \\ &= 4. \end{aligned}$$

- Une meilleure méthode : découpage du domaine en "tranches horizontales"

- Représentation du domaine



- Expression de l'aire du domaine

Les "tranches horizontales" ont pour largeur  $dy$  et pour longueur  $x_1 - x_2$ .

On explicite  $x_1(y)$  et  $x_2(y)$  sous la condition  $x_1, x_2 \leq 1$  :

$$* \Gamma_1 : y = \sqrt{3(1-x)} \Rightarrow x = 1 - \frac{y^2}{3}, \quad x_1(y) = 1 - \frac{y^2}{3}.$$

$$* \Gamma_2 : y + 1 = \frac{4}{9}(x-1)^2 \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{y+1},$$

$$x_2(y) = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{y+1}.$$

Expression de l'aire  $A$  du domaine :

$$A = \int_0^3 [x_1(y) - x_2(y)] dy = \int_0^3 \left[ -\frac{y^2}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{y+1} \right] dy$$

- Intégration

$$A = \int_0^3 \left[ -\frac{y^2}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{y+1} \right] dy = \left[ -\frac{y^3}{9} + (y+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = [(-3+8)-1] = 4.$$

## 6. On considère l'ellipse définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Montrer que l'aire du domaine limité par cette ellipse vaut  $\pi ab$ .

L'ellipse est symétrique par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , on calcule l'aire du domaine contenu dans le premier quadrant ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).

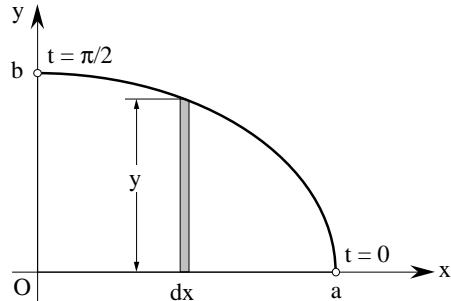
$$\frac{A}{4} = \int_0^a y(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \dot{x}(t) dt.$$

Or  $x$  varie de 0 à  $a$  lorsque  $t$  varie de  $\frac{\pi}{2}$  à 0, donc  $t_1 = \frac{\pi}{2}$  et  $t_2 = 0$ .

$$\frac{A}{4} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y(t) \cdot \dot{x}(t) dt.$$

$$\frac{A}{4} = -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt$$

$$\frac{A}{4} = -\frac{1}{2}ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos 2t) dt$$



$$\frac{A}{4} = -\frac{1}{2} ab \left[ t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{1}{4} \pi ab \Leftrightarrow A = \pi ab.$$

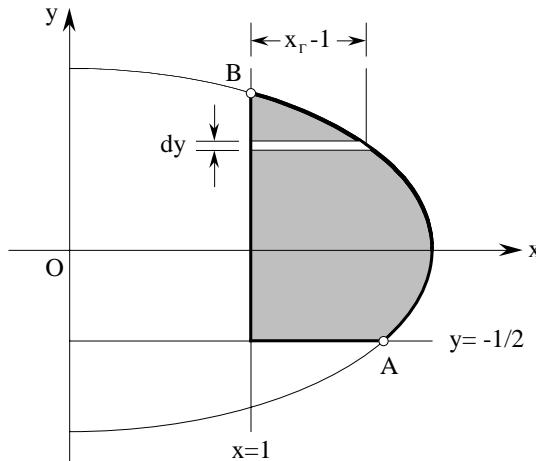
7. Dans le plan  $Oxy$ , on considère la demi-ellipse  $\Gamma$  définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

On considère le domaine fini  $D$  limité par la courbe  $\Gamma$ , la droite horizontale d'équation  $y = -\frac{1}{2}$  et la droite verticale d'équation  $x = 1$ , ( $x \geq 1$  et  $y \geq -\frac{1}{2}$ ).

Calculer l'aire du domaine  $D$ .

Figure d'étude :



L'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $D$  s'écrit :

$$\mathcal{A} = \int_{y_A}^{y_B} (x_\Gamma - 1) dy = \int_{t_A}^{t_B} [x_\Gamma(t) - 1] \dot{y}(t) dt.$$

Recherche des bornes  $t_A$  et  $t_B$ .

- $A(x_A, -\frac{1}{2}) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t_A \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } y(t_A) = -\frac{1}{2}.$

$$\sin(t_A) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t_A = -\frac{\pi}{6}.$$

- $B(1, y_B) \in \Gamma \text{ et } y_B > 0 \Leftrightarrow \exists t_B \in ]0, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } x(t_B) = 1.$

$$2 \cos(t_B) = 1 \Leftrightarrow \cos(t_B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_B = \frac{\pi}{3}.$$

Calcul de l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine  $D$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{t_A}^{t_B} [x_\Gamma(t) - 1] \dot{y}(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [2 \cos t - 1] \cos t dt, \\ \mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos^2 t - \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2t + 1 - \cos t) dt, \\ \mathcal{A} &= \left[ \frac{1}{2} \sin 2t + t - \sin t \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi - 1}{2}.\end{aligned}$$


---