Corrigés - Série 21

1. Décomposer, si nécessaire, les fractions rationnelles suivantes en éléments simples ; puis chercher les primitives des fonctions ainsi définies.

a) $a(x) = \dfrac{1-x}{5+4x+x^2}$,

b) $b(x) = \dfrac{2x+5}{4x^2-12x+9}$,

c) $c(x) = \dfrac{3x^2+1}{(x^2+x)\,(x^2+1)}$,

d) $d(x) = \dfrac{x^6+1}{(x^2+1)^2}$,

e) $e(x) = \dfrac{4x^3+2x+2}{4x^4+1}$.

---

a) $a(x) = \dfrac{1-x}{x^2+4x+5}\,, \qquad D_a = \mathbb{R}\,.$

Le dénominateur de $a(x)$ est irréductible, $a(x)$ est un élément simple de deuxième espèce.

$$a(x) = \frac{-\frac{1}{2}\,(2x+4)}{x^2+4x+5} + \frac{3}{x^2+4x+5} = -\frac{1}{2}\,\frac{2x+4}{x^2+4x+5} + 3\,\frac{1}{(x+2)^2+1}\,.$$

$$\int a(x)\,dx = -\frac{1}{2}\,\ln(x^2+4x+5) + 3\,\arctan(x+2) + C\,.$$

b) $b(x) = \dfrac{2x+5}{4x^2-12x+9} = \dfrac{2x+5}{(2x-3)^2}\,, \qquad D_b = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\}\,.$

$b(x)$ se décompose en éléments simples de la façon suivante :

$$b(x) = \frac{2x+5}{(2x-3)^2} = \frac{a}{2x-3} + \frac{b}{(2x-3)^2}\,, \quad a\,,\,b \in \mathbb{R}\,.$$

Recherche des coefficients a et b par identification :

$a\,(2x-3)+b = 2x+5 \quad\Leftrightarrow\quad 2a\,x + (-3a+b) = 2x+5 \quad\Leftrightarrow\quad a=1$ et $b=8\,.$

$$b(x) = \frac{1}{2x-3} + \frac{8}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{2x-3} + 4\,\frac{2}{(2x-3)^2}\,.$$

$$\int b(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\ln|2x-3| - \frac{4}{2x-3} + C\,.$$

c) $c(x) = \dfrac{3x^2+1}{(x^2+x)\,(x^2+1)} = \dfrac{3x^2+1}{x\,(x+1)\,(x^2+1)}\,, \qquad D_c = \mathbb{R} - \{-1\,,\,0\}\,.$

Décomposition de $c(x)$ en éléments simples :

$$c(x) \;=\; \frac{3x^2+1}{x\,(x+1)\,(x^2+1)} \;=\; \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}\,, \quad a\,,\,b\,,\,c\,,\,d \in \mathbb{R}\,.$$

Recherche des coefficients a, b, c et d :

* multiplication par x, puis évaluation en $x=0$: $a = 1$,
* multiplication par $x+1$, puis évaluation en $x=-1$: $b=-2$,
* multiplication par x, puis passage à la limite lorsque $x \to \infty$: $c = 1$,
* évaluation en $x=+1$: $d = 1$.

$$c(x) \;=\; \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}\,.$$

Intégration de l'élément simple de deuxième espèce :

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx \;=\; \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right] dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + \arctan(x) + C\,.$$

Conclusion :

$$\int c(x)\,dx \;=\; \ln|x| - 2\,\ln|x+1| + \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + \arctan x + C\,.$$

d) $d(x) = \dfrac{x^6+1}{(x^2+1)^2}\,, \qquad D_d = \mathbb{R}\,.$

Le degré du numérateur étant supérieur à celui du dénominateur, on effectue la division euclidienne de x^6+1 par $(x^2+1)^2$.

$x^6+1 \;=\; (x^4+2x^2+1)\,(x^2-2) + 3\,(x^2+1)\,.$

D'où : $d(x) \;=\; x^2 - 2 + \dfrac{3\,(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \;=\; x^2-2+3\,\dfrac{1}{x^2+1}\,.$

$$\int d(x)\,dx \;=\; \frac{1}{3}\,x^3 - 2x + 3\,\arctan x + C\,.$$

e) $e(x) = \dfrac{4x^3+2x+2}{4x^4+1}\,, \qquad D_e = \mathbb{R}\,.$

- Décomposition en éléments simples

  - Décomposition du dénominateur en facteurs irréductibles

    * Première méthode

      Recherche des quatre racines complexes de $4x^4 + 1$.

$$4x^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = -\frac{1}{4} = [\,\tfrac{1}{4}\,,\ \pi + 2k\pi\,]$$

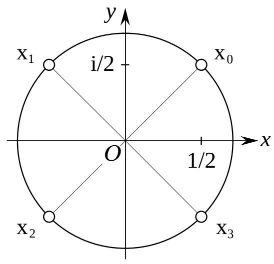
$$\Leftrightarrow \quad x = [\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{k\pi}{2}\,], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$x_0 = \tfrac{1}{2}\,(1 + i)$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\,(-1 + i)$$

$$x_2 = \overline{x_1} = \tfrac{1}{2}\,(-1 - i)$$

$$x_3 = \overline{x_0} = \tfrac{1}{2}\,(1 - i)$$



On regroupe les facteurs dont les racines sont conjuguées :

$$(x - x_0)\,(x - x_3) = x^2 - x + \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad (x - x_1)\,(x - x_2) = x^2 + x + \tfrac{1}{2}\,,$$

$$4x^4 + 1 = 4\left(x^2 - x + \tfrac{1}{2}\right)\left(x^2 + x + \tfrac{1}{2}\right) = (2x^2 - 2x + 1)\,(2x^2 + 2x + 1)\,.$$

    * Deuxième méthode

      On complète l'expression $4x^4 + 1$ pour former un carré :

$$4x^4 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2$$

$$= \left[\,(2x^2 + 1) - (2x)\,\right]\left[\,(2x^2 + 1) + (2x)\,\right] = (2x^2 - 2x + 1)\,(2x^2 + 2x + 1)\,.$$

$$e(x) = \frac{4x^3 + 2x + 2}{(2x^2 - 2x + 1)\,(2x^2 + 2x + 1)}\,.$$

  - Décomposition de la fonction rationnelle en éléments simples

$$e(x) = \frac{4x^3 + 2x + 2}{(2x^2 - 2x + 1)\,(2x^2 + 2x + 1)} = \frac{ax + b}{2x^2 - 2x + 1} + \frac{cx + d}{2x^2 + 2x + 1}\,.$$

On détermine les coefficients a, b, c et d par identification et on obtient :

$$a = 0\,, \qquad b = 1\,, \qquad c = 2 \qquad \text{et} \qquad d = 1\,.$$

$$e(x) = \frac{4x^3 + 2x + 2}{(2x^2 - 2x + 1)\,(2x^2 + 2x + 1)} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} + \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 1}\,.$$

- Intégration des éléments simples

$$e(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1} + \frac{2x+1}{2x^2+2x+1}$$

$$\circ \int \frac{1}{2x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{2}{4x^2-4x+2}\,dx = \int \frac{2}{(4x^2-4x+1)+1}\,dx$$

$$= \int \frac{2}{(2x-1)^2+1}\,dx = \arctan(2x-1)+C\,.$$

$$\circ \int \frac{2x+1}{2x^2+2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1)+C\,.$$

$$\int e(x)\,dx = \arctan(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x^2+2x+1)+C\,.$$

2. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5}{x^2}\cdot\ln(x^3-2x^2+5x)\,, \qquad x>0\,.$$

- Intégration par parties

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \underset{\uparrow}{\frac{5}{x^2}}\cdot \underset{\downarrow}{\ln(x^3-2x^2+5x)}\,dx\\ &= -\frac{5}{x}\cdot\ln(x^3-2x^2+5x) - \int -\frac{5}{x}\cdot\frac{3x^2-4x+5}{x^3-2x^2+5x}\,dx\\ &= -\frac{5}{x}\cdot\ln(x^3-2x^2+5x) + 5\int \frac{3x^2-4x+5}{x\,(x^3-2x^2+5x)}\,dx\end{aligned}$$

- Décomposition en éléments simples

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$\frac{3x^2-4x+5}{x\,(x^3-2x^2+5x)}$$

se base sur la décomposition en facteurs irréductibles de son dénominateur :

$$x\,(x^3-2x^2+5x) = x^2\,\underbrace{(x^2-2x+5)}_{\Delta<0}\,.$$

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-4x+5}{x^2\,(x^2-2x+5)} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+5} \\
&= \frac{Ax\,(x^2-2x+5)+B\,(x^2-2x+5)+(Cx+D)\,x^2}{x^2\,(x^2-2x+5)} \\
&= \frac{(A+C)\,x^3+(-2A+B+D)\,x^2+(5A-2B)\,x+5B}{x^2\,(x^2-2x+5)}
\end{aligned}$$

On en déduit les coefficients A, B, C, D par identification :

$$\left\{\begin{array}{l} A+C=0 \\ -2A+B+D=3 \\ 5A-2B=-4 \\ 5B=5 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A=-\frac{2}{5} \\ B=1 \\ C=\frac{2}{5} \\ D=\frac{6}{5} \end{array}\right.$$

En conclusion :

$$5\int \frac{3x^2-4x+5}{x^2\,(x^2-2x+5)}\,dx = \int \left[-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2x+6}{x^2-2x+5}\right] dx\,.$$

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce

  On décompose la fonction rationnelle $\dfrac{2x+6}{x^2-2x+5}$ pour faire apparaître la dérivée d'une fonction logarithme :

$$\frac{2x+6}{x^2-2x+5} = \frac{2x-2}{x^2-2x+5}+\frac{8}{x^2-2x+5}$$

et on décrit $\dfrac{8}{x^2-2x+5}$ comme la dérivée d'une fonction arctangente :

$$\begin{aligned}
\frac{8}{x^2-2x+5} = \frac{8}{(x^2-2x+1)+4} = \frac{8}{(x-1)^2+4} &= \frac{2}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} \\
&= 4\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,.
\end{aligned}$$

En résumé :

$$\int \frac{2x+6}{x^2-2x+5}\,dx = \ln(x^2-2x+5)+4\,\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right)+C\,.$$

- Conclusion

$$\begin{aligned}
&\int \frac{5}{x^2}\cdot \ln(x^3-2x^2+5x)\,dx \\
=\ & -\frac{5}{x}\cdot\ln(x^3-2x^2+5x)+5\int \frac{3x^2-4x+5}{x^2\,(x^2-2x+5)}\,dx \\
=\ & -\frac{5}{x}\cdot\ln(x^3-2x^2+5x)+\int\left[-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2x+6}{x^2-2x+5}\right]dx \\
=\ & -\frac{5}{x}\cdot\ln(x^3-2x^2+5x)-\int\frac{2}{x}\,dx+\int\frac{5}{x^2}\,dx+\int\frac{2x+6}{x^2-2x+5}\,dx \\
=\ & -\frac{5}{x}\cdot\ln(x^3-2x^2+5x)-2\,\ln(x)-\frac{5}{x}+\ln(x^2-2x+5x)+4\,\arctan\left(\tfrac{x-1}{2}\right)+C\,.
\end{aligned}$$

3. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x)=\dfrac{1}{\cos^4 x}$,

b) $b(x)=\dfrac{4}{\cos^3 x}$,

c) $c(x)=\dfrac{10\,\tan x}{3\,\cos x-2\,\sin^2 x}$,

d) $d(x)=\dfrac{1}{1+\sin x+2\,\cos x}$,

---

a) Le produit $a(x)\cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi+x)$:

$$a(\pi+x)\cdot d\,(\pi+x)\ =\ \frac{1}{\cos^4(\pi+x)}\cdot(\pi+x)'\,dx\ =\ \frac{1}{\cos^4(x)}\cdot dx\ =\ a(x)\cdot dx\,.$$

On pose donc $u=\tan(x)$, $x=\arctan(u)$, $dx=\dfrac{1}{u^2+1}\,du$, $\cos^2(x)=\dfrac{1}{u^2+1}$,

$$\int a(x)\,dx\ =\ \int(u^2+1)^2\cdot\frac{1}{u^2+1}\,du\ =\ \int(u^2+1)\,du\ =\ \frac{1}{3}\,u^3+u+C\,,$$

$$\int a(x)\,dx\ =\ \frac{1}{3}\,\tan^3(x)+\tan(x)+C\,.$$

b) • Changement de variable

◦ Test de Bioche

Le produit $b(x)\cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(\pi-x)$:

$$b(\pi-x)\cdot d\,(\pi-x)=\frac{4}{\cos^3(\pi-x)}\cdot(\pi-x)'\,dx=\frac{-4}{\cos^3(x)}\cdot(-dx)=b(x)\cdot dx\,.$$

On pose donc $u=\sin(x)$.

- ∘ Changement de variable

$$u=\sin(x)\,,\quad x=\arcsin(u)\,,\quad dx=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du\,,\quad \cos(x)=\sqrt{1-u^2}\,.$$

$$\int b(x)\,dx \;=\; \int \frac{4}{\left(\sqrt{1-u^2}\,\right)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \;=\; \int \frac{4}{\left(1-u^2\right)^2}\,du\,.$$

- Décomposition en éléments simples

$$\frac{4}{(1-u^2)^2} \;=\; \frac{4}{(1-u)^2\,(1+u)^2} \;=\; \frac{a}{1-u}+\frac{b}{(1-u)^2}+\frac{c}{1+u}+\frac{d}{(1+u)^2}$$

Recherche des coefficients a, b, c et d :

- ∗ multiplication par $(1-u)^2$, puis évaluation en $u=1$: $b=1$,
- ∗ multiplication par $(1+u)^2$, puis évaluation en $u=-1$: $d=1$,
- ∗ multiplication par u, puis limite lorsque $u\to\infty$: $0=-a+c$,
- ∗ évaluation en $u=0$: $4=a+b+c+d$, d'où $a=c=1$.

$$\frac{4}{(1-u^2)^2} \;=\; \frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}\,.$$

- Intégration des éléments simples

∘ $$\int \frac{1}{1-u}\,du \;=\; -\int \frac{-1}{1-u}\,du = -\ln|1-u|+C\,.$$

∘ $$\int \frac{1}{(1-u)^2}\,du \;=\; \int -\frac{-1}{(1-u)^2}\,du = \frac{1}{1-u}+C\,.$$

∘ $$\int \frac{1}{1+u}\,du \;=\; \ln|1+u|+C\,.$$

∘ $$\int \frac{1}{(1+u)^2}\,du \;=\; -\int -\frac{1}{(1+u)^2}\,du = -\frac{1}{1+u}+C\,.$$

Conclusion :

$$\int \frac{4}{(1-u^2)^2}\,du \;=\; -\ln|1-u|+\frac{1}{1-u}+\ln|1+u|-\frac{1}{1+u}+C\,.$$

$$\int \frac{4}{(1-u^2)^2}\,du \;=\; \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{2u}{1-u^2}+C\,.$$

$$\int b(x)\,dx=\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right|+\frac{2\,\sin(x)}{1-\sin^2(x)}+C=\ln\left[\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right]+\frac{2\,\sin(x)}{\cos^2(x)}+C\,.$$

c) • Changement de variable

∘ Test de Bioche

Le produit $c(x) \cdot dx$ est invariant lorsqu'on remplace x par $(-x)$:

$$c(-x) \cdot d(-x) = \frac{10 \tan(-x)}{3 \cos(-x) - 2 \sin^2(-x)} \cdot (-x)' \, dx$$

$$= -\frac{10 \tan(x)}{3 \cos(x) - 2 \sin^2(x)} \cdot (-dx) = c(x) \cdot dx \, .$$

On pose donc $u = \cos(x)$.

∘ Changement de variable

$$u = \cos(x) \, , \quad x = \arccos(u) \, , \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du \, , \quad \sin(x) = \sqrt{1-u^2} \, .$$

$$\int c(x) \, dx = \int \frac{10 \, \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}}{3u - 2\,(1-u^2)} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du \right) = \int \frac{-10}{u\,(2u^2+3u-2)} \, du \, .$$

• Décomposition en éléments simples

$$\frac{-10}{u\,(2u^2+3u-2)} = \frac{-10}{u\,(2u-1)\,(u+2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{2u-1} + \frac{c}{u+2} \, .$$

Recherche des coefficients a, b et c :

∗ multiplication par u, puis évaluation en $u = 0$: $a = 5$,

∗ multiplication par $2u - 1$, puis évaluation en $u = \frac{1}{2}$: $b = -8$,

∗ multiplication par $u + 2$, puis évaluation en $u = -2$: $c = -1$.

$$\frac{-10}{u\,(2u^2+3u-2)} = \frac{5}{u} - \frac{8}{2u-1} - \frac{1}{u+2} \, .$$

• Intégration des éléments simples

Les éléments simples sont tous de première espèce :

$$\int \frac{-10 \, du}{u\,(2u^2+3u-2)} = 5 \ln|u| - 4 \ln|2u-1| - \ln|u+2| + C \, .$$

$$\int c(x) \, dx = 5 \ln|\cos(x)| - 4 \ln|2 \cos(x) - 1| - \ln[\cos(x) + 2] + C \, .$$

d) • Changement de variable

  ◦ Test de Bioche

  Les trois tests de Bioche appliqués au produit $d(x) \cdot dx$ sont négatifs.

  On pose donc $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

  ◦ Changement de variable

$$u = \tan\left(\tfrac{x}{2}\right), \qquad x = 2\,\arctan(u), \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du,$$

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

$$\int d(x)\,dx = \int \frac{1}{1+\sin x + 2\,\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{2\,(1-u^2)}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= \int \frac{2}{(1+u^2)+2u+2\,(1-u^2)}\,du = \int \frac{-2}{u^2-2u-3}\,du.$$

• Décomposition en éléments simples

$$\frac{-2}{u^2-2u-3} = \frac{-2}{(u+1)\,(u-3)} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u-3}.$$

Recherche des coefficients a et b :

∗ multiplication par $u+1$, puis évaluation en $u=-1$: $a = \frac{1}{2}$,

∗ multiplication par $u-3$, puis évaluation en $u=3$: $b = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{-2}{u^2-2u-3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-3}\right].$$

• Intégration des éléments simples

$$\int d(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-3}\right]du = \frac{1}{2}\,\big[\ln|\,u+1\,| - \ln|\,u-3\,|\big] + C$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{u+1}{u-3}\right| + C = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-3}\right| + C$$

4. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 2\,x\,\sqrt{x} + 10\,x}$, $\quad x > 0$, $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{1+\tanh(x)}{4+\tanh^2(x)}$.

a) • Changement de variable

Pour "faire disparaître" $\sqrt{x}$ et ainsi se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle, on pose $u = \sqrt{x}$:

$$u = \sqrt{x}\,, \quad x = u^2\,, \quad x > 0\,, \quad u > 0\,, \quad dx = 2u\,du\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{5}{x^2 + 2\,x\,\sqrt{x} + 10\,x}\,dx = \int \frac{5}{u^4 + 2\,u^3 + 10\,u^2} \cdot 2u\,du$$

$$= \int \frac{10}{u^3 + 2\,u^2 + 10\,u}\,du\,.$$

• Décomposition en éléments simples

$$\frac{10}{u^3 + 2\,u^2 + 10\,u} = \frac{10}{u\,(u^2 + 2\,u + 10)} = \frac{a}{u} + \frac{b\,u + c}{u^2 + 2\,u + 10}$$

car $u^2 + 2\,u + 10$ est un polynôme irréductible de degré 2.

Recherche des coefficients a, b et c :

∗ multiplication par u, puis évaluation en $u = 0$: $a = 1$,

∗ multiplication par u, puis $u \to \infty$: $0 = a + b \quad \Rightarrow \quad b = -1$,

∗ évaluation en $u = -2$: $-\frac{1}{2} = -\frac{a}{2} + \frac{-2b+c}{10} \quad \Rightarrow \quad c = -2$.

$$\frac{10}{u^3 + 2\,u^2 + 10\,u} = \frac{1}{u} - \frac{u+2}{u^2 + 2\,u + 10}\,.$$

• Intégration des éléments simples

On décompose l'élément simple de deuxième espèce de sorte à faire apparaître la dérivée de fonctions logarithme et arctangente :

$$\frac{u+2}{u^2 + 2\,u + 10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,u + 2}{u^2 + 2\,u + 10} + \frac{1}{u^2 + 2\,u + 10}\,,$$

avec $$\frac{1}{u^2 + 2\,u + 10} = \frac{1}{(u+1)^2 + 9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u+1}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{u+1}{3}\right)^2 + 1}\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{2} \int \frac{2\,u + 2}{u^2 + 2\,u + 10}\,du - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{u+1}{3}\right)^2 + 1}\,du\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \ln|u| - \frac{1}{2} \ln\left(u^2 + 2\,u + 10\right) - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{u+1}{3}\right) + C\,.$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{x + 2\sqrt{x} + 10}\right) - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{3}\right) + C\,.$$

b) • Changement de variable

Pour se ramener à l'intégration d'une fonction rationnelle, on pose $u = \tanh(x)$:

$$u = \tanh(x)\,, \quad x = \arg\tanh(u)\,, \quad dx = \frac{1}{1-u^2}\,du\,.$$

$$\int g(x)\,dx \;=\; \int \frac{1+\tanh(x)}{4+\tanh^2(x)}\,dx \;=\; \int \frac{1+u}{4+u^2}\cdot\frac{1}{1-u^2}\,du$$

$$= \int \frac{1}{(1-u)\cdot(4+u^2)}\,du\,.$$

• Décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1-u)\cdot(4+u^2)} \;=\; \frac{a}{1-u} + \frac{b\,u+c}{4+u^2}$$

car $4+u^2$ est un polynôme irréductible de degré 2.

Recherche des coefficients a, b et c :

* multiplication par $1-u$, puis évaluation en $u=1$: $a = \frac{1}{5}$,
* multiplication par u, puis $u \to \infty$: $0 = -a + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{5}$,
* évaluation en $x = 0$: $\frac{1}{4} = a + \frac{c}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{(1-u)\cdot(4+u^2)} \;=\; \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{1-u} + \frac{u+1}{4+u^2}\right].$$

• Intégration des éléments simples

On décompose l'élément simple de deuxième espèce de manière à faire apparaître la dérivée de fonctions logarithme et arctangente :

$$\frac{u+1}{4+u^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\,u}{4+u^2} + \frac{1}{4+u^2}\,, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{4+u^2} \;=\; \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\,.$$

$$\int g(x)\,dx \;=\; \frac{1}{5}\int \frac{1}{1-u}\,du \;+\; \frac{1}{10}\int \frac{2\,u}{4+u^2}\,du \;+\; \frac{1}{10}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\,du\,.$$

$$\int g(x)\,dx \;=\; -\frac{1}{5}\,\ln|1-u| \;+\; \frac{1}{10}\,\ln\left(4+u^2\right) \;+\; \frac{1}{10}\,\arctan\left(\tfrac{u}{2}\right) + C\,.$$

$$= \frac{1}{10}\,\ln\left(\tfrac{4+u^2}{(1-u)^2}\right) \;+\; \frac{1}{10}\,\arctan\left(\tfrac{u}{2}\right) + C\,.$$

$$\int g(x)\,dx \;=\; \frac{1}{10}\,\ln\left(\tfrac{4+\tanh^2(x)}{[1-\tanh(x)]^2}\right) + \frac{1}{10}\,\arctan\left[\tfrac{\tanh(x)}{2}\right] + C\,.$$