

Corrigé 20

1. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \frac{2^{u(x)}}{u(x)}$ où $u(x) = \sqrt{x}$.

- Changement de variable

On pose $u = \sqrt{x}$ et on exprime $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ en fonction de la variable u :

$$u = \sqrt{x}, \quad x > 0, \quad u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = u^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2u du.$$

$$\int a(x) dx = \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2^u}{u} 2u du = \int 2^{u+1} du.$$

- Intégration

$$\int 2^{u+1} du = \int e^{(u+1) \ln(2)} du = \frac{e^{(u+1) \ln(2)}}{\ln(2)} + C = \frac{2^{u+1}}{\ln(2)} + C.$$

- Retour à la variable x

$$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{(1+\sqrt{x})} + C.$$

b) $b(x) = \sin(\sqrt{x})$.

- Changement de variable

On pose $u = \sqrt{x}$ et on exprime $\int \sin(\sqrt{x}) dx$ en fonction de u :

$$u = \sqrt{x}, \quad x > 0, \quad u > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = u^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2u du.$$

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = \int \sin(u) (2u du) = 2 \int u \cdot \sin(u) du.$$

- Intégration

$$\begin{aligned} \int \underset{\downarrow}{u} \cdot \underset{\uparrow}{\sin}(u) du &= -u \cdot \cos(u) - \int 1 \cdot [-\cos(u)] du \\ &= -u \cdot \cos(u) + \int \cos(u) du = -u \cdot \cos(u) + \sin(u) + C. \end{aligned}$$

- Retour à la variable x

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = 2 [\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cdot \cos(\sqrt{x})] + C.$$

c) $c(x) = x^3 \cdot \sin(x^2).$

- Par changement de variable

* On pose $x^2 = t$, $t \geq 0$, d'où $2x dx = dt$ ou $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$.

$$\int x^3 \cdot \sin(x^2) dx = \int (\sqrt{t})^3 \cdot \sin(t) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin(t) dt,$$

$$\text{ou } \int x^3 \cdot \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \sin(x^2) (2x dx) = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin(t) dt.$$

* Puis on intègre la fonction $t \cdot \sin(t)$ par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin(t)$, d'où $u'(t) = 1$ et $v(t) = -\cos(t)$:

$$\int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(t)} dt = -t \cdot \cos(t) + \int \cos(t) dt = -t \cdot \cos(t) + \sin(t) + K,$$

En conclusion :

$$\int c(x) dx = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin(t) dt = \frac{1}{2} [-x^2 \cdot \cos(x^2) + \sin(x^2)] + C.$$

- Ou directement par parties

On peut intégrer par parties la fonction $f(x) = x^2 \cdot [x \cdot \sin(x^2)]$ en posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = x \cdot \sin(x^2)$, d'où $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -\frac{1}{2} \cos(x^2)$:

$$\begin{aligned} \int c(x) dx &= \int \underset{\downarrow}{x^2} \cdot \underset{\uparrow}{[x \cdot \sin(x^2)]} dx = -\frac{1}{2} x^2 \cdot \cos(x^2) + \int x \cdot \cos(x^2) dx, \\ \int c(x) dx &= -\frac{1}{2} x^2 \cdot \cos(x^2) + \frac{1}{2} \sin(x^2) + C. \end{aligned}$$

2. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}},$

- Changement de variable

On pose $x = \sinh(u)$ et on exprime $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ en fonction de u :

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh(u) \quad \text{et} \quad dx = \cosh(u) du.$$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\sinh^2 u \cosh u} \cosh u du = \int \frac{1}{\sinh^2 u} du.$$

- Intégration

$$\int \frac{1}{\sinh^2(u)} du = - \int \frac{-1}{\sinh^2(u)} du = -\coth(u) + C = -\frac{\cosh(u)}{\sinh(u)} + C.$$

- Retour à la variable x

$$\int a(x) dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

b) $b(x) = x^2 (1-x^2)^{-3/2} = \frac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3}, \quad D_b =]-1, 1[.$

- Une méthode : intégration par parties.

$$b(x) = x \cdot x (1-x^2)^{-3/2}, \quad \text{posons } u = x \text{ et } v' = x (1-x^2)^{-3/2}.$$

$$u' = 1 \text{ et } v = (1-x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\int b(x) dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C.$$

- Une autre méthode : intégration par changement de variable.

$$\text{Posons } x = \sin t, \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \quad dx = \cos t dt.$$

$$\int b(x) dx = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^3 t} \cos t dt = \int \tan^2 t dt = \int [(1 + \tan^2 t) - 1] dt$$

$$\int b(x) dx = \tan t - t + C = \tan(\arcsin x) - \arcsin x + C$$

$$\int b(x) dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x + C.$$

c) $c(x) = \sqrt{4x-x^2}, \quad D_c = [0, 4].$

Le polynôme $4x-x^2$ est réductible dans $\mathbb{R}[x]$, il est de la forme $1-y^2$:

$$4x-x^2 = -(x^2-4x+4)+4 = 4-(x-2)^2 = 4 \left[1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 \right]$$

$$\int \sqrt{4x-x^2} dx = 2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} dx, \quad \text{on pose } \frac{x-2}{2} = \sin t,$$

$$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \in [0, 4], \quad \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2} = \cos t, \quad dx = 2 \cos t dt$$

$$\int \sqrt{4x-x^2} dx = 2 \int \cos t (2 \cos t dt) = 4 \int \cos^2 t dt$$

$$= 2 \int [\cos(2t) + 1] dt = \sin(2t) + 2t + C = 2 \sin t \cos t + 2t + C.$$

$$\int \sqrt{4x - x^2} dx = 2 \left(\frac{x-2}{2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{2} \right)^2} + 2 \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C,$$

$$\int \sqrt{4x - x^2} dx = \frac{x-2}{2} \cdot \sqrt{4x - x^2} + 2 \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$$

d) $d(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}, \quad D_d =] - \infty, -5[\cup] -1, +\infty[.$

Le polynôme $x^2 + 6x + 5$ est réductible dans $\mathbb{R}[x]$, il est de la forme $y^2 - 1$:

$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2 - 4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 1}}.$$

Le changement de variable "naturel" consiste à poser $\frac{x+3}{2} = \cosh t$, $t > 0$.

Mais $\cosh t \in [1, +\infty[$, il faut donc distinguer les deux cas suivants :

- $\frac{x+3}{2} < -1 \Leftrightarrow x < -5$; dans ce cas, on pose $\frac{x+3}{2} = -\cosh t$, $t > 0$.

$$x = -2 \cosh t - 3, \quad dx = -2 \sinh t.$$

$$\int d(x) dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sinh t} (-2 \sinh t dt) = \int -dt = -t + C.$$

$$\int d(x) dx = -\arg \cosh \left(-\frac{x+3}{2} \right) + C.$$

- $\frac{x+3}{2} > 1 \Leftrightarrow x > -1$; dans ce cas, on pose $\frac{x+3}{2} = \cosh t$, $t > 0$.

$$x = 2 \cosh t - 3, \quad dx = 2 \sinh t.$$

$$\int d(x) dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sinh t} (2 \sinh t dt) = \int dt = t + C = \arg \cosh \left(\frac{x+3}{2} \right) + C.$$

En résumé :
$$\int d(x) dx = \begin{cases} -\arg \cosh \left(-\frac{x+3}{2} \right) + C & \text{si } x < -5 \\ \arg \cosh \left(\frac{x+3}{2} \right) + C & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

e) $e(x) = \frac{x (\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D_e =] -1, 1[.$

Posons $x = \cos t$, $t \in]0, \pi[.$ $dx = -\sin t dt.$

$$\int e(x) dx = \int \frac{t^2 \cos t}{\sin t} (-\sin t dt) = - \int t^2 \cos t dt.$$

On intègre $t^2 \cos t$ par parties en posant $u = t^2$ et $v' = \cos t$.

$$\int \underset{\downarrow}{t^2} \cdot \underset{\uparrow}{\cos(t)} dt = t^2 \cdot \sin(t) - 2 \int t \cdot \sin(t) dt.$$

Et on intègre $t \cdot \sin(t)$ par parties en posant $u = t$ et $v' = \sin(t)$:

$$\int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(t)} dt = -t \cdot \cos(t) + \int \cos(t) dt = -t \cdot \cos(t) + \sin(t) + K.$$

$$\text{D'où } \int e(x) dx = -t^2 \sin t - 2t \cos t + 2 \sin t + C.$$

$$\int e(x) dx = -\sqrt{1-x^2} (\arccos x)^2 - 2x \arccos x + 2\sqrt{1-x^2} + C.$$

3. Déterminer, sur son domaine de définition, l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}.$$

- Domaine de définition de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } x^2 - 1 > 0\} =]1, +\infty[.$$

- Changement de variable

$$x = \cosh t, \quad x > 1, \quad t > 0, \quad \sqrt{(x^2 - 1)} = \sinh t, \quad dx = \sinh t dt.$$

$$\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx = \int \frac{\cosh t \ln(\cosh t)}{\sinh^3 t} \sinh t dt = \int \frac{\cosh t}{\sinh^2 t} \ln(\cosh t) dt$$

- Intégration par parties

$$u' = \frac{\cosh t}{\sinh^2 t}, \quad u = -\frac{1}{\sinh t} \quad \text{et} \quad v = \ln(\cosh t), \quad v' = \frac{\sinh t}{\cosh t}.$$

$$\int \underset{\uparrow}{\frac{\cosh t}{\sinh^2 t}} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(\cosh t)} dt = -\frac{\ln(\cosh t)}{\sinh t} + \int \frac{1}{\cosh t} dt.$$

$$\bullet \int \frac{dt}{\cosh t} = \int \frac{\cosh t}{\cosh^2 t} dt = \int \frac{\cosh t}{1 + \sinh^2 t} dt = \arctan(\sinh t) + C.$$

$$\text{Ou} \quad \int \frac{dt}{\cosh t} = \int \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = 2 \int \frac{e^t}{(e^t)^2 + 1} dt = 2 \arctan(e^t) + C.$$

- Conclusion

$$\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx = -\frac{\ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)}} + \arctan \sqrt{(x^2 - 1)} + C$$

ou (en utilisant que $\arg \sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$)

$$\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx = -\frac{\ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)}} + 2 \arctan(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$$

N.B. : les deux expressions sont différentes mais on peut vérifier qu'elles sont égales à une constante près. Ceci peut se faire en vérifiant que

$$(\arctan \sqrt{(x^2 - 1)})' = (2 \arctan(x + \sqrt{x^2 - 1}))'.$$

4. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x \cdot \cos x}{2 \sqrt{1 + \sin x}}, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

- Intégration par parties

$$u = x, \quad u' = 1, \quad v' = \frac{\cos x}{2 \sqrt{1 + \sin x}}, \quad v = \sqrt{1 + \sin x}.$$

$$\int \frac{x \cdot \cos x}{2 \sqrt{1 + \sin x}} dx = x \sqrt{1 + \sin x} - \int \sqrt{1 + \sin x} dx$$

- Intégration de $\sqrt{1 + \sin x}$ par changement de variable :

$$\sin x = t, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad t \in]-1, 1], \quad x = \arcsin t, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx = \int \sqrt{1 + t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t}} = -2 \sqrt{1 - t} + K.$$

- Conclusion

$$\int \frac{x \cdot \cos x}{2 \sqrt{1 + \sin x}} dx = x \sqrt{1 + \sin x} + 2 \sqrt{1 - \sin x} + C.$$

5. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{4e^x - e^{2x}}, \quad x \leq \ln(4).$$

- Changement de variable : $u = e^x$, $u \in]0, 4]$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du, \quad \int f(x) dx = \int \frac{\sqrt{4u - u^2}}{u} du.$$

- Transformation

$$\sqrt{4u - u^2} = \sqrt{4 - 4 + 4u - u^2} = \sqrt{4 - (u - 2)^2} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{u-2}{2}\right)^2}.$$

- Changement de variable : $\frac{u-2}{2} = \sin t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{u-2}{2} = \sin t \Rightarrow du = 2 \cos t dt, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{u-2}{2}\right)^2} = \cos t, \quad u = 2 \sin t + 2,$$

$$\int \frac{\sqrt{4u - u^2}}{u} du = 2 \int \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u-2}{2}\right)^2}}{u} du = 2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin t + 1} dt.$$

- Intégration

$$2 \int \frac{\cos^2 t}{\sin t + 1} dt = 2 \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t + 1} dt = 2 \int [1 - \sin t] dt = 2t + 2 \cos t + C.$$

- Conclusion

$$\int f(x) dx = 2t + 2 \cos t + C = 2 \arcsin\left(\frac{u-2}{2}\right) + \sqrt{4u - u^2} + C,$$

$$\int f(x) dx = 2 \arcsin\left(\frac{e^x-2}{2}\right) + \sqrt{4e^x - e^{2x}} + C.$$
