

Corrigé 19

1. $a(x) = 12(x+1)(x-2)(x-1)$.

Il est en général plus facile d'intégrer une somme qu'un produit :

$$a(x) = 12(x^2 - 1)(x - 2) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24.$$

Chaque terme du polynôme $a(x)$ est de la forme $n x^{n-1}$ (à un coefficient multiplicatif près). On intègre le polynôme $a(x)$ terme à terme :

$$\int a(x) dx = \int (12x^3 - 24x^2 - 12x + 24) dx = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + C.$$

2. $b(x) = \frac{x^3 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}, \quad D_b = \mathbb{R}_+^*$.

On décrit la fonction b à l'aide de puissances rationnelles de x .

$$b(x) = \frac{x^3 - x^{1/3}}{x^{1/2}} = x^{5/2} - x^{-1/6}.$$

Les deux termes de la fonction b sont de la forme $q x^{q-1}$, $q \in \mathbb{Q}$, (à un coefficient multiplicatif près).

$$\int b(x) dx = \int (x^{5/2} - x^{-1/6}) dx = \frac{2}{7} x^{7/2} - \frac{6}{5} x^{5/6} + C.$$

3. $c(x) = \sin(2x) \cdot \cos^2 x$.

On se ramène à une expression du type $\sin x \cdot \cos^k x$ ou $\cos x \cdot \sin^k x$, puis à une expression du type $u'(x) \cdot n u^{n-1}(x)$.

$$c(x) = \sin(2x) \cdot \cos^2 x = 2 \sin x \cdot \cos^3 x = -\frac{1}{2} (-\sin x) \cdot 4 \cos^3 x.$$

$$\int c(x) dx = -\frac{1}{2} \int (-\sin x) \cdot 4 \cos^3 x dx = -\frac{1}{2} \cos^4 x + C.$$

4. $d(x) = \sin(4x) \cdot \cos x$.

- Une méthode

On décrit la fonction d comme une somme de fonctions trigonométriques, à l'aide des formules de transformation produits-sommes :

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] .$$

$$d(x) = \sin(4x) \cdot \cos x = \frac{1}{2} [\sin(5x) + \sin(3x)] .$$

Les deux termes de la fonction d sont de la forme $-a \sin(ax)$ (à un coefficient multiplicatif près).

$$\int d(x) dx = \frac{1}{2} \int [\sin(5x) + \sin(3x)] dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5} \cos(5x) - \frac{1}{3} \cos(3x) \right] + C .$$

- Une autre méthode

On exprime $\sin(4x)$ en fonction de $\sin x$ et de $\cos x$:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sin(4x) \cdot \cos x = 2 \sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos x \\ &= 4 \sin x \cdot \cos x \cdot [2 \cos^2 x - 1] \cdot \cos x = 8 \sin x \cdot \cos^4 x - 4 \sin x \cdot \cos^2 x \\ \int d(x) dx &= 8 \int \sin x \cdot \cos^4 x dx - 4 \int \sin x \cdot \cos^2 x dx , \\ \int d(x) dx &= -8 \frac{\cos^5 x}{5} + 4 \frac{\cos^3 x}{3} + C . \end{aligned}$$

5. $e(x) = \frac{x}{e^{(x^2+1)}}$.

La fonction e est de la forme $u'(x) \cdot e^{u(x)}$ avec $u(x) = -(x^2 + 1)$.

$$e(x) = x \cdot e^{-(x^2+1)} = -\frac{1}{2} (-2x) \cdot e^{-(x^2+1)} .$$

$$\int e(x) dx = -\frac{1}{2} \int (-2x) \cdot e^{-(x^2+1)} dx = -\frac{1}{2} e^{-(x^2+1)} + C .$$

6. $f(x) = \tan^2 x$.

La fonction f s'exprime facilement en fonction de la dérivée de la fonction $\tan x$.

$$f(x) = \tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1 .$$

$$\int f(x) dx = \int [(1 + \tan^2 x) - 1] dx = \tan x - x + C .$$

$$7. \ g(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}.$$

On décompose la fonction g en une somme en utilisant la relation de Pythagore.

$$g(x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Les deux termes de la somme sont des expressions du type $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

$$\int g(x) dx = \int \left(-\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

$$\int g(x) dx = -\ln |\cos x| + \ln |\sin x| + C = \ln |\tan x| + C.$$

$$8. \ h(x) = \frac{1}{1 - e^x}.$$

On se ramène à une expression du type $\frac{u'(x)}{u(x)}$ en amplifiant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par e^{-x} .

$$h(x) = \frac{1}{1 - e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} = -\frac{-e^{-x}}{e^{-x} - 1}.$$

$$\int h(x) dx = - \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx = -\ln |e^{-x} - 1| + C.$$

$$9. \ i(x) = \frac{1}{\cosh x}.$$

On utilise la définition de la fonction $\cosh x$: $\int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$.

Puis on se ramène à une expression du type $\frac{u'(x)}{u^2(x)+1}$ en amplifiant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par e^x .

$$\int i(x) dx = 2 \int \frac{e^x}{[e^x]^2 + 1} dx = 2 \arctan(e^x) + C.$$

Ou en ampliant numérateur et dénominateur par $\cosh x$ et en se ramenant à une expression du type $\frac{u'(x)}{u^2(x)+1}$:

$$\int i(x) dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} dx = \int \frac{\cosh x}{1 + \sinh^2 x} dx = \arctan(\sinh x) + C.$$

10. $j(x) = \frac{\ln x}{x}.$

On exprime $j(x)$ sous la forme $u'(x) \cdot u(x)$, qui, à une constante multiplicative près, est la dérivée de $u^2(x)$.

$$\int j(x) dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} dx = \frac{1}{2} \ln^2(x) + C.$$

11. $k(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}.$

On exprime $k(x)$ sous la forme $\frac{u'(x)}{u^2(x)}$, qui est la dérivée de $-\frac{1}{u(x)}$.

$$\int k(x) dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln^2(x)}}_{\frac{1}{u^2(x)}} dx = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

12. $l(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$

On exprime $l(x)$ sous la forme $u'(x) \cdot \cos[u(x)]$ est la dérivée de $\sin[u(x)]$.

$$\int l(x) dx = 2 \int \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\cos(\sqrt{x})}_{\cos[u(x)]} dx = 2 \sin(\sqrt{x}) + C.$$

13. $m(x) = \sin^2(a x), \quad a \in \mathbb{R}^*.$

On "linéarise" $\sin^2(\alpha)$ en l'exprimant à l'aide de $\cos(2\alpha)$.

Les relations

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

permettent d'exprimer $\cos^2(\alpha)$ et $\sin^2(\alpha)$ en fonction de $\cos(2\alpha)$:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int m(x) dx &= \int \sin^2(a x) dx = \int \frac{1 - \cos(2ax)}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos(2ax)}{2} dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C. \end{aligned}$$

14. Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x \cdot e^{2x}$,

c) $c(x) = \arctan(x)$,

b) $b(x) = \ln(x)$,

d) $d(x) = e^{ax} \cos(bx)$.

a) On intègre la fonction $a(x)$ par parties en dérivant x et en intégrant e^{2x} :

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx$$

avec $v(x) = x$ et $u'(x) = e^{2x}$; d'où $v'(x) = 1$ et $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int \downarrow x \cdot \overset{\uparrow}{e^{2x}} \, dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \, dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{2x-1}{4} \cdot e^{2x} + C.$$

b) On intègre la fonction b par parties en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$; d'où $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\int b(x) \, dx = \int \underset{\downarrow}{1} \cdot \underset{\uparrow}{\ln(x)} \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - x + C = x \cdot (\ln x - 1) + C.$$

c) On intègre $c(x)$ par parties en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$; d'où $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\int c(x) \, dx = \int \underset{\downarrow}{1} \cdot \underset{\uparrow}{\arctan(x)} \, dx = x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx,$$

$$\int c(x) \, dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

d) On intègre la fonction d en utilisant deux fois la méthode de l'intégration par parties.

$$\int d(x) \, dx = \int \underbrace{e^{ax}}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\cos(bx)}_{\downarrow} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos(bx) + \frac{b}{a} \int \underset{\downarrow}{e^{ax}} \cdot \underset{\uparrow}{\sin(bx)} \, dx,$$

$$\int d(x) \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cdot \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cdot \cos(bx) \, dx \right],$$

$$\int d(x) \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \sin(bx) - \underbrace{\frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cdot \cos(bx) \, dx}_{\int d(x) \, dx},$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int d(x) \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cdot \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \cdot \sin(bx) + \text{Cste},$$

$$\int d(x) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos(bx) + b \sin(bx)] + C.$$
