Corrigé 18

1. Soient $0 < a < b < c$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^*$, $h_2 \neq h_1$, et soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a\,, \\ h_1 & \text{si } a < x \leq b\,, \\ h_2 & \text{si } b < x < c\,, \\ 0 & \text{si } x \geq c\,. \end{cases}$$

a) Calculer la fonction-aire associée à f : $A(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ $(x \geq 0)$, et montrer qu'elle est continue sur $[0, \infty[$.

b) Déterminer l'ensemble des points où A est dérivable, noté $D_{A'}$, et montrer que

$$A'(x) = f(x)\,, \quad \forall x \in D_{A'}\,.$$

c) Esquisser f et A dans le cas où $a = 1$, $b = 2$, $c = 6$, $h_1 = 2$, $h_2 = -1$.

---

a) Pour commencer, comme f est nulle sur $[0, a]$, on a que

$$A(x) = 0 \quad \forall x \in [0, a]\,.$$

Ensuite, sur $]a, b]$, $A(x)$ se calcule en considérant le rectangle de base $]a, x]$ et de hauteur h_1, ce qui donne

$$A(x) = h_1(x - a)\,, \quad \forall x \in]a, b]\,.$$

Sur $]b, c[$, on commence par écrire

$$A(x) = A(b) + \big(A(x) - A(b)\big)$$

Or $A(x) - A(b)$ s'obtient en considérant le rectangle de base $]b, x]$ et de hauteur h_2, ce qui donne

$$A(x) = A(b) + h_2(x - b)\,.$$

Comme f s'annule à nouveau sur $[c, \infty[$, on a $A(x) = A(c)$ pour tout $x \geq c$. On obtient donc:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a\,, \\ h_1(x-a) & \text{si } a < x \leq b\,, \\ h_1(b-a) + h_2(x-b) & \text{si } b < x < c\,, \\ h_1(b-a) + h_2(c-b) & \text{si } x \geq c\,. \end{cases}$$

Cette fonction est clairement continue à l'intérieur de chacun des intervalles $]0, a[$, $]a, b[$, $]b, c[$, $]c, \infty[$. On observe qu'elle est également continue en chacun des points a, b, c. Par exemple, en $x = a$,

$$\lim_{x \to a^-} A(x) = \lim_{x \to a^+} A(x) = h_1(a - a) = 0 = A(a)\,,$$

b) Comme $A(x)$ est composée de quatre morceaux de droites, elle est dérivable à l'intérieur de chacun de ces intervalles. Ensuite, à partir de l'expression obtenue ci-dessus pour $A(x)$, on obtient

$$A'(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{A(x)-A(a)}{x-a} = 0\,, \quad A'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{A(x)-A(a)}{x-a} = h_1\,,$$

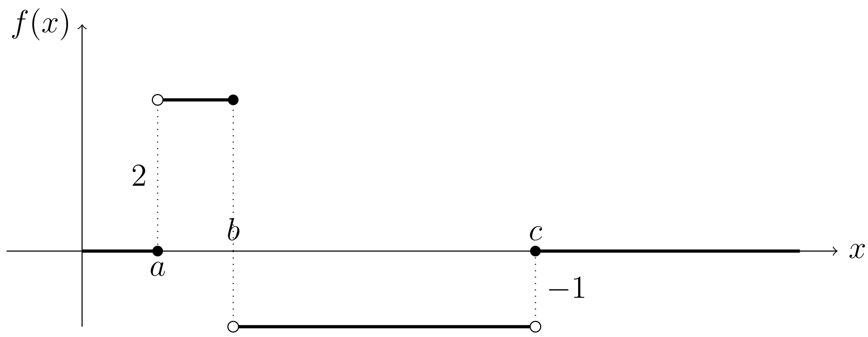
et comme $h_1 \neq 0$, on en déduit que A n'est dérivable en a. On montre de la même manière que A n'est dérivable ni en b ni en c, ce qui implique

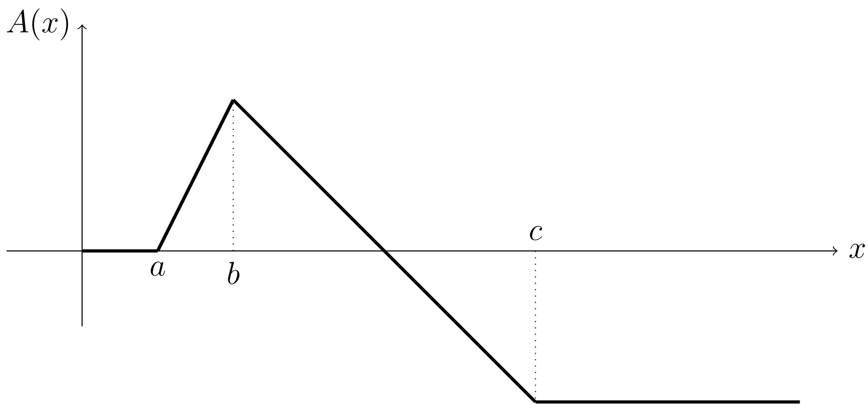
$$D_{A'} =]0,\infty[\setminus\{a,b,c\}\,.$$

On vérifie aussi immédiatement que

$$A'(x) = f(x)\,, \quad \forall x \in D_{A'}\,.$$

c) Dans le cas où $a=1,\ b=2,\ c=6,\ h_1=2,\ h_2=-1$,





2. Soit P_n une partition en n intervalles de même longueur de l'intervalle $[0\,,\,a]$, $a>0$.

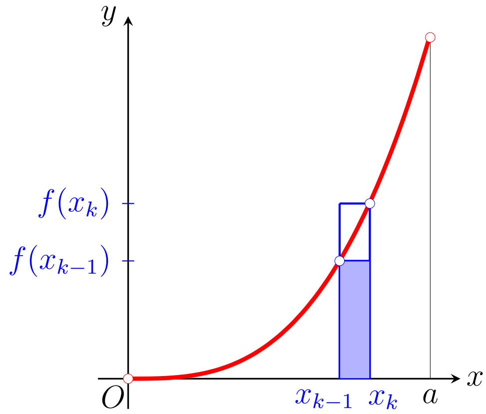
Calculer les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f(x)=x^3$, associées à cette partition.

Montrer que ces deux sommes convergent vers la même valeur lorsque n tend vers l'infini.

Indication :

Utiliser le résultat : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$.

Puis le démontrer par récurrence.



- Description de la partition

  Soit P_n la partition de l'intervalle $[0\,,\,a]$ en n intervalles isométriques $[x_{k-1}\,,\,x_k]$, $0\leq k\leq n-1$, avec $x_0=0$ et $x_n=a$.

  - Chaque intervalle $[x_{k-1}\,,\,x_k]$ a pour longueur

    $$\Delta\,x_k \;=\; x_k-x_{k-1} \;=\; \frac{a}{n}\,, \qquad 1\leq k\leq n\,.$$

  - Et chaque abscisse de la partition vaut $x_k=k\cdot\frac{a}{n}\,,\quad 0\leq k\leq n\,.$

- Somme de Darboux inférieure

  Soit A_k l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $[x_{k-1}\,,\,x_k]$, $1\leq k\leq n$

  $$A_k=(x_k-x_{k-1})\cdot f\,(x_{k-1}) = \frac{a}{n}\cdot f\left(\tfrac{(k-1)\cdot a}{n}\right) = \frac{a}{n}\cdot\left[\frac{(k-1)\cdot a}{n}\right]^3 = (k-1)^3\cdot\frac{a^4}{n^4}\,.$$

  Soit s_n la somme de Darboux inférieure :

  $$s_n=\sum_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3\cdot\frac{a^4}{n^4}=\frac{a^4}{n^4}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3=\frac{a^4}{n^4}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}j^3$$

  $$=\frac{a^4}{n^4}\cdot\sum_{j=1}^{n-1}j^3=\frac{a^4}{n^4}\cdot\left[\frac{(n-1)\,n}{2}\right]^2=\frac{a^4}{4}\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2}=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{4}\cdot\frac{2n-1}{n^2}\,.$$

- Somme de Darboux supérieure

  Soit B_k l'aire du rectangle construit sur l'intervalle $[x_{k-1}\,,\,x_k]$, $1\leq k\leq n$

$$B_k = (x_k - x_{k-1}) \cdot f(x_k) = \frac{a}{n} \cdot f\left(\tfrac{k \cdot a}{n}\right) = \frac{a}{n} \cdot \left[\frac{k \cdot a}{n}\right]^3 = k^3 \cdot \frac{a^4}{n^4}\,.$$

Soit S_n la somme de Darboux supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k = \sum_{k=1}^{n} k^3 \cdot \frac{a^4}{n^4} = \frac{a^4}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{a^4}{n^4} \cdot \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$= \frac{a^4}{4} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} \cdot \frac{2n+1}{n^2}\,.$$

- Limite des sommes de Darboux

  * $\displaystyle \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} \cdot \frac{2n-1}{n^2}\right] = \frac{a^4}{4}\,.$

  * $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} \cdot \frac{2n+1}{n^2}\right] = \frac{a^4}{4}\,.$

  Ces deux sommes convergent bien vers la même valeur.

  La fonction $f(x) = x^3$ étant continue, elle est intégrable au sens de Riemann (et donc de Darboux).
  Cette valeur $\frac{a^4}{4}$ est donc par définition la valeur de l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^a x^3\,dx$.

- Démonstration par récurrence de la proposition :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

  – Vérification pour $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \Bigg|_{n=1} = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 \Bigg|_{n=1} = \left[\frac{2}{2}\right]^2 = 1\,.$$

  – Démonstration du pas de récurrence

  * Hypothèse : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

  * Conclusion : $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2$.

$*$ Preuve :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \cdot \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2 .
\end{aligned}$$

3. On donne la relation suivante : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos\left[(n+1)\,x\right]}{2\,(1-\cos x)}$.

a) Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ en déterminant les deux sommes de Darboux sur une partition régulière de l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}]$ et en vérifiant qu'elles convergent vers la même valeur.

b) Démontrer par récurrence, la relation donnée.

- Partition de l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$

  On partage l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ en n intervalles isométriques $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$, $1 \leq k \leq n\,,\ x_0 = 0\,,\ x_n = \frac{\pi}{2}\,,$ de longueur $\Delta x = \frac{\pi}{2n}$.

  Les abscisses x_k du découpage, ont donc pour expression :

  $$x_k = k \cdot \tfrac{\pi}{2n}\,,\ 0 \leq k \leq n\,.$$

- Somme de Darboux inférieure

La hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$, est la plus petite ordonnée $\cos(x)$ de cet intervalle, c'est donc $\cos(x_k)$, car $\cos(x)$ est décroissante sur $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

La somme de Darboux inférieure s'écrit donc

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot \cos(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \cdot \cos\left(k \cdot \tfrac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos\left(k \cdot \tfrac{\pi}{2n}\right).$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} \cos\left(k \cdot \tfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right] = \frac{\pi}{2n} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left[(n+1) \cdot \frac{\pi}{2n}\right]}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} - 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right]}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}\right] = \frac{\pi}{2n} \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2n}\right]}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}\right]$$

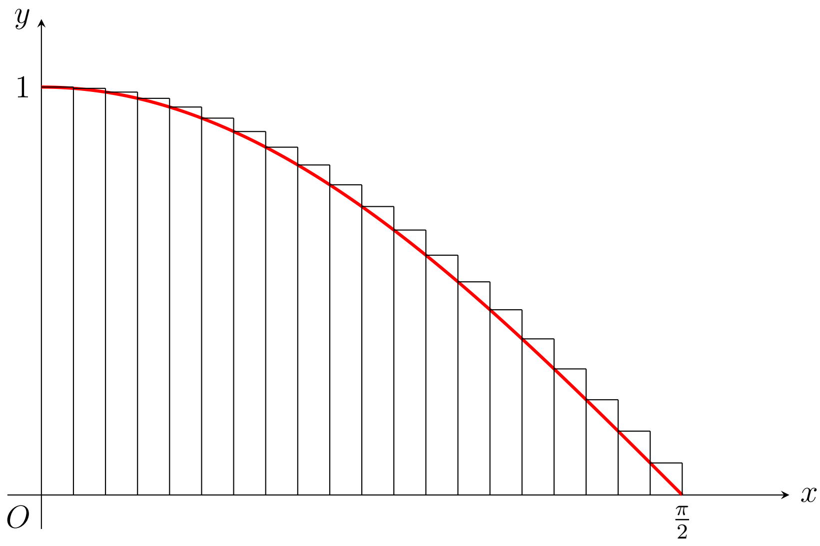
- Limite de la somme de Darboux inférieure

En utilisant les infiniment petits équivalents, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2n}\right]}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2} = 1\,,$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = -\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2n}\right]}{2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} = 1\,.$$

- Somme de Darboux supérieure



La hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[\,x_{k-1}\,,\,x_k\,]$, $1 \leq k \leq n$, est la plus grande ordonnée $\cos(x)$ de cet intervalle, c'est donc $\cos(x_{k-1})$, car $\cos(x)$ est décroissante sur $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

La somme de Darboux supérieure s'écrit donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot \cos\left(x_{k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \cdot \cos\left[(k-1)\cdot\tfrac{\pi}{2n}\right] = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(j \cdot \tfrac{\pi}{2n}\right).$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos\left[(n-1)\cdot\frac{\pi}{2n}\right] - \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right] - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}\right] = \frac{\pi}{2n} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2n}\right]}{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}\right]$$

- Limite de la somme de Darboux supérieure

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2n}\right]}{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} = 1\,.$$

- Conclusion

Les deux sommes de Darboux convergent vers la même valeur :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = 1\,.$$

Or $\cos(x)$ est une fonction continue, donc intégrable au sens de Riemann sur $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$, d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = 1\,.$$

- Démonstration par récurrence de la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)} .$$

  - Vérification pour $n = 0$:

$$\left. \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \right|_{n=0} = \cos(0 \cdot x) = 1$$

et $$\left. \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)} \right|_{n=0} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(0 \cdot x) - \cos(x)}{2(1-\cos x)} = 1 .$$

  - Démonstration du pas de récurrence :

    * Hypothèse :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)} , \quad \text{pour un } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ donné.}$$

    * Conclusion : $\displaystyle \sum_{k=0}^{n+1} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos[(n+1)x] - \cos[(n+2)x]}{2(1-\cos x)} .$

    * Preuve :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + \cos[(n+1)x]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)} + \cos[(n+1)x]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x] + 2\cos[(n+1)x] - 2\cos x \cdot \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) + \cos[(n+1)x] - 2\cos x \cdot \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)}$$

et en exprimant $\cos(nx)$ sous la forme $\cos[(n+1)x - x]$:

$$\cos[(n+1)x - x] = \cos x \cdot \cos[(n+1)x] + \sin x \cdot \sin[(n+1)x] ,$$

on obtient :

$$\frac{1}{2} + \frac{\cos[(n+1)x] - \cos x \cdot \cos[(n+1)x] + \sin x \cdot \sin[(n+1)x]}{2(1-\cos x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos[(n+1)x] - \cos[(n+2)x]}{2(1-\cos x)} .$$

4. Exercice facultatif

Démontrer la relation donnée dans l'exercice 3 :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)},$$

en utilisant dans $\mathbb{C}$ la relation : $e^{ix} = \cos(x) + i\,\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $\cos(x)$ peut être considéré comme la partie réelle de e^{ix} :

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right].$$

La somme $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ est la somme partielle d'une série géométrique de premier terme 1 et de raison e^{ix}, elle se réécrit de la façon suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}.$$

En vue d'en extraire la partie réelle, on rend le dénominateur réel :

$$\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{\left[1-e^{i(n+1)x}\right]\left[1-e^{-ix}\right]}{\left[1-e^{ix}\right]\left[1-e^{-ix}\right]} = \frac{1-e^{ix}+e^{inx}-e^{i(n+1)x}}{2(1-\cos x)}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right] = \frac{1-\cos x+\cos(nx)-\cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)},$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos[(n+1)x]}{2(1-\cos x)}.$$

5. Calculer, si elle existe, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)$.

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right) \cdot \tfrac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)$

est une somme de Riemann de la fonction $\sin(x)$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

Or cette fonction est continue, donc intégrable au sens de Riemann. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\,\Big|_0^{\pi} = 2.$$

6. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $A(x) = \displaystyle\int_2^{2x} \frac{1}{\arg\cosh t}\, dt\,,\quad x > 1\,;$ b) $B(x) = \displaystyle\int_{\arcsin x}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt\,,\ \ 0 < x < 1\,.$

---

a) Soient $f(t) = \dfrac{1}{\arg\cosh t}$ et $F(t)$ une primitive quelconque de $f(t)$.

La fonction $A(x)$ s'écrit donc $A(x) = F(2x) - F(2)$.

$$A'(x) = [\,F(2x) - F(2)\,]' = (2x)' \cdot F'(2x) = 2\, f(2x) = \frac{2}{\arg\cosh(2x)}\,.$$

b) Soient $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $G(t)$ une primitive quelconque de $g(t)$.

La fonction $B(x)$ s'écrit donc $B(x) = G(x) - G(\arcsin x)$.

$$B'(x) = [\,G(x) - G(\arcsin x)\,]' = G'(x) - (\arcsin x)' \cdot G'(\arcsin x)$$

$$B'(x) = g(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot g(\arcsin x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x}{\arcsin x}\,.$$

7. Déterminer, si elle existe, la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt}{x^6}\,.$

Commençons par montrer que le numérateur tend vers 0 lorsque $x \to 0$.

La fonction $N(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt$ est une fonction continue, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} N(x) = N(0)$.

Et $N(0) = \displaystyle\int_0^{0} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt = 0\,.$

Cette limite est donc une forme indéterminée de type "$\frac{0}{0}$", on lève l'indétermination en utilisant la règle de Bernoulli-de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{x^6} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{N'(x)}{6\,x^5} \quad \text{avec} \quad N'(x) = \left[e^{(t^2)} - 1\right]_{t=x^2} \cdot (x^2)' = 2x \cdot \left[e^{(x^4)} - 1\right].$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \left[e^{(t^2)} - 1\right] dt}{x^6} &\overset{\text{BH}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \left[e^{(x^4)} - 1\right]}{6\,x^5} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^4)} - 1}{x^4}\,, \qquad \text{FI } "\tfrac{0}{0}" \\
&\overset{\text{BH}}{=} \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{4\,x^3 \cdot e^{(x^4)}}{4\,x^3} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} e^{(x^4)} \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

8. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\, dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

On étudie le signe de la dérivée de $f(x)$.

Soit $G(t)$ une primitive de $g(t) = e^{-t^2+5t}$,

$$f(x) = G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})$$

On en déduit l'expression de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})\right]' \\
&= G'(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}+1)' - G'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' \\
&= g(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - g(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[e^{-(\sqrt{x}+1)^2+5(\sqrt{x}+1)} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[e^{-x-2\sqrt{x}-1+5\sqrt{x}+5} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right].
\end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de $\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right]$ car $\dfrac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0\,,\ \forall\, x > 0\,.$

$$e^{-2\sqrt{x}+4} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq e^0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0$$

car la fonction exponentielle est croissante,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4\,.$$

Signe de $f'(x)$:

x	0		4	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$

La fonction f atteint donc son maximum en $x = 4$.

9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Indications : utiliser les trois règles suivantes vues au cours

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

(iii) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x).$

On coupe l'intégrale entre a et $a+T$ en intercalant 0, puis T :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx \underbrace{=}_{(i)} \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{a+T} f(x)dx \underbrace{=}_{(i)} \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x)dx}_{=\int_0^a f(x)dx \quad (ii)}.$$

D'où on a

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{a+T} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &\underbrace{=}_{(iii)} \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx - \int_a^0 f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.\end{aligned}$$

Interprétation graphique

Le résultat nous apprend que pour une fonction périodique, l'intégrale est la même sur chaque intervalle de longueur égale à la période. Géométriquement : l'aire sous la courbe est la même sur chaque intervalle de longueur d'une période. Sur le dessin ci-dessous, la surface grise et la surface hachurée ont la même aire analytique : la région entre 0 et a a été translantée en la région entre T et $a + T$.