Corrigé 17

1. Etudier la courbe du plan Γ définie ci-dessous, déterminer les points remarquables et donner le tableau de variation, puis représenter graphiquement la courbe Γ (échelle : 4 carrés / unité).

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) &= -2t^3+3t^2+2 \\ y(t) &= -2t^3+9t^2-12t+3 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2.$$

- Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$, domaine d'étude $I = [\,0\,,\,2\,]$.

- Dérivées.

  $\dot{x}(t) = -6t^2+6t = -6t\,(t-1)$.

  $\dot{y}(t) = -6t^2+18t-12 = -6\,(t^2-3t+2) = -6\,(t-1)\,(t-2)$.

- Points remarquables.

  - En $t_0 = 0$, $\dot{x}(0)=0$ et $\dot{y}(0) \neq 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -\infty$.

    $M_0\,(2\,,\,3)$ est un point de Γ à tangente verticale.

  - En $t_1 = 1$, $\dot{x}(1)=0$ et $\dot{y}(1)=0$,

    $M_1\,(3\,,\,-2)$ est un point stationnaire.

    La pente de la tangente en M_1 est donnée par $\displaystyle m_1 = \lim_{t\to 1} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -1$.

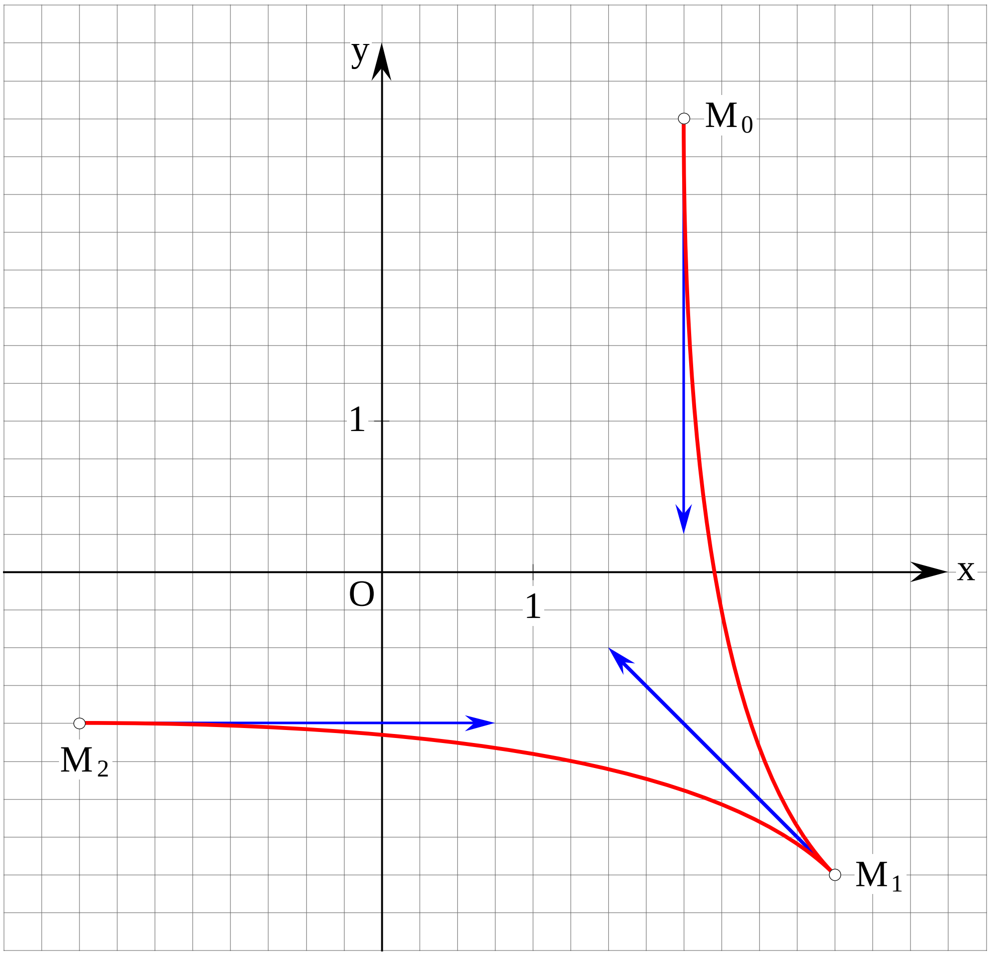
  - En $t_2 = 2$, $\dot{x}(2) \neq 0$ et $\dot{y}(2)=0$, $\displaystyle\frac{\dot{y}(2)}{\dot{x}(2)} = 0$.

    $M_2\,(-2\,,\,-1)$ est un point de Γ à tangente horizontale.

- Tableau de variation.

t	0		1		2
$\dot{x}(t)$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2
$\dot{y}(t)$		$-$	0	$+$	0
$y(t)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1

- Représentation graphique de Γ.



2. Faire l'étude complète de la courbe paramétrée suivante :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= t^2 - 2t \\ y(t) &= \dfrac{1+t^4}{t^2} \end{cases}$$

Définition du domaine d'étude

- Soit $D_{\text{déf}}$ le domaine de définition de la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$:

  $$D_{\text{déf}} = D_x \cap D_y = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*.$$

  La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ est continue sur $D_{\text{déf}}$.

- $\vec{r}(t)$ n'est ni périodique, ni paire ni impaire. Pas de restriction du domaine d'étude.

Limites aux points-frontière de $D_{\mathbf{def}}$.

Limites aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty \,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1+t^4}{t^2\,(t^2-2t)} = 1\,.$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} [\,y(t)-x(t)\,] = \lim_{t\to\pm\infty} \left[\frac{1+t^4}{t^2} - (t^2-2t)\right] = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1+2t^3}{t^2} = \pm\infty\,.$$

Γ admet, aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$, deux branches paraboliques de direction de pente $m=1$.

Limites au voisinage de $t=0$.

$$\lim_{t\to 0} x(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} y(t) = +\infty\,.$$

Γ admet, lorsque $t \to 0$, une asymptote verticale d'équation $x=0$.

Dérivées.

$\dot{x}(t) = 2t-2 = 2\,(t-1)\,, \qquad \dot{x}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=1\,.$

$$\dot{y}(t) = \frac{4t^3\,(t^2)-(1+t^4)\,2t}{t^4} = \frac{2\,(t^4-1)}{t^3} = \frac{2\,(t+1)\,(t-1)\,(t^2+1)}{t^3}\,,$$

$\dot{y}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-1$ ou $t=1$.

En $t=-1$, Γ admet un point à tangente horizontale de coordonnées $(3\,;\,2)$.

En $t=1$, $\dot{\vec{r}}(t)=\vec{0}$, Γ admet un point stationnaire de coordonnées $(-1\,;\,2)$.

La pente de la tangente à Γ en ce point est donnée par $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

$$\lim_{t\to 1} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)\,(t^2+1)}{t^3} = 4\,.$$

Tableau de variation.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\dot{x}(t)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	$0\ \Vert\ 0$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$\dot{y}(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

A ce stade de l'étude de la courbe paramétrée, on peut faire une esquisse de la représentation de la courbe Γ. Celle-ci met en évidence l'existence d'un point double.

Recherche du point double.

Soient $t_1, t_2 \in D_{\text{def}}$, $t_1 \neq t_2$, tels que $(x(t_1)\,,\,y(t_1)) = (x(t_2)\,,\,y(t_2))$.

$$x(t_1) = x(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2 \quad \Leftrightarrow \quad (t_1 - t_2)\,(t_1 + t_2 - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 + t_2 = 2\,.$$

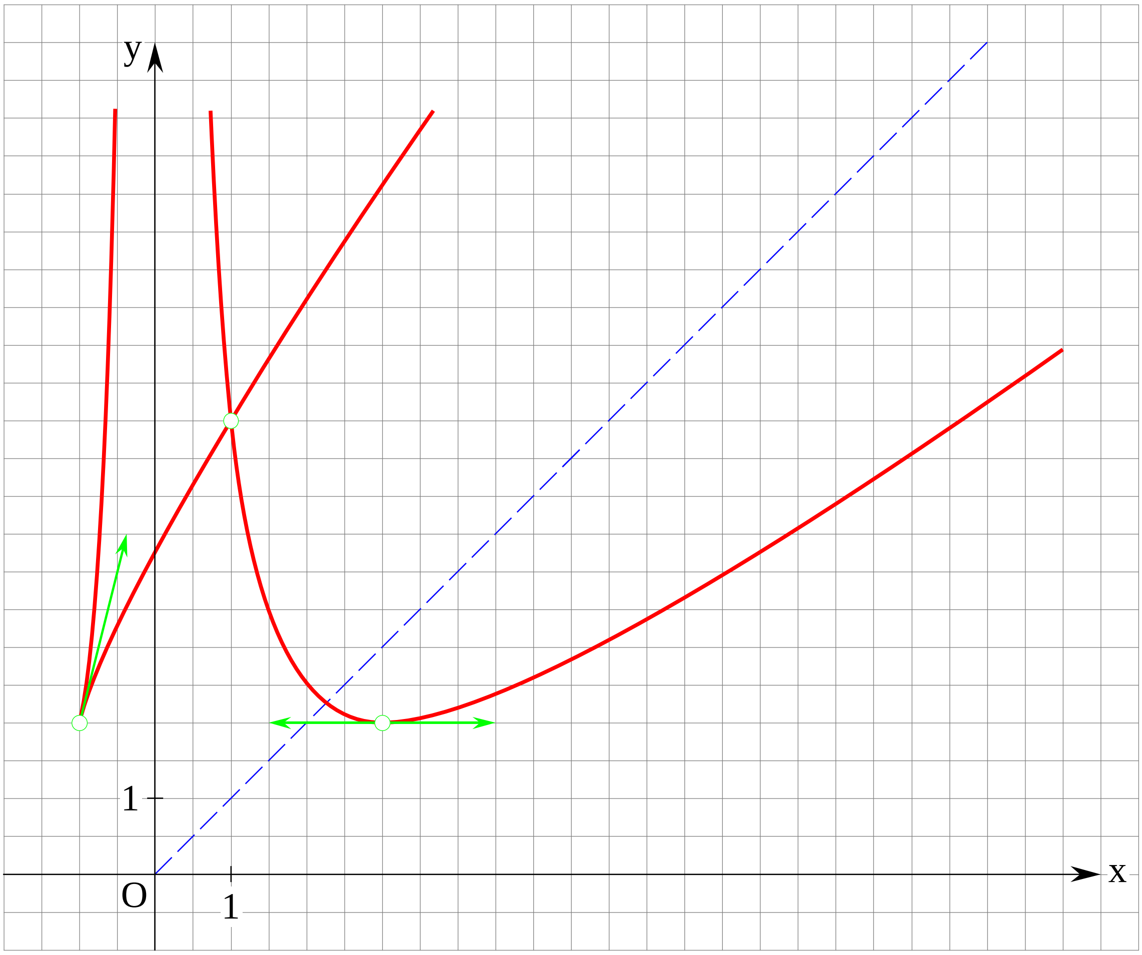
$$y(t_1) = y(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad (1 + t_1^4)\,t_2^2 = (1 + t_2^4)\,t_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad (t_1^2 - t_2^2)\,(t_1^2\,t_2^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1^2\,t_2^2 = 1\,,$$

car $t_1^2 - t_2^2 = (t_1 + t_2)\,(t_1 - t_2) = 2\,(t_1 - t_2) \neq 0\,, \quad (t_1 \neq t_2)\,.$

$$\text{D'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 t_2 = -1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 t_2 = 1 \end{array} \right.$$

L'unique solution est $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ qui correspond au point de coordonnées $(1\,;\,6)$.

Représentation graphique de la courbe Γ.



On déduit du tracé de la courbe Γ que le point stationnaire de coordonnées $(-1\,;\,2)$ est un point de rebroussement dont la demi-tangente est de pente $m = 4$.

3. On considère dans le plan, la courbe Γ définie par

$$\vec{r}\,(t) \;=\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 3t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Montrer que l'on peut restreindre le domaine d'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $I = [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$.

Indication : En plus de la parité et de la périodicité des fonctions coordonnées de la fonction vectorielle $\vec{r}\,(t)$, tester l'évaluation des fonctions coordonnées en $\pi - t$.

b) Faire l'étude de la courbe paramétrée sur l'intervalle I, puis en déduire le tracé de la courbe Γ.

---

a) Restriction du domaine d'étude à l'intervalle $I = [0\,,\,\frac{\pi}{2}]$.

i) Période de $\vec{r}\,(t)$:

$\vec{r}\,(t)$ est de période T ssi $\vec{r}\,(t+T) = \vec{r}\,(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.
La période de $x(t)$ est $T_x = \pi$, celle de $y(t)$ est $T_y = \frac{2\pi}{3}$.
La période T de $\vec{r}\,(t)$ est le PPCM (plus petit multiple commun) de T_x et T_y, d'où $T = 2\pi$.
On peut donc restreindre l'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi\,]$.

ii) Parité des fonctions coordonnées :

$x(-t) = \cos 2\,(-t) = \cos 2t = x(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t)$ est paire.
$y(-t) = \sin 3\,(-t) = -\sin 3t = -y(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y(t)$ est impaire.
La courbe Γ est donc symétrique par rapport à l'axe Ox et on peut restreindre l'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $[\,0\,;\,\pi\,]$.

iii) Evaluation en $\pi - t$:

$x(\pi - t) = \cos 2\,(\pi - t) = \cos 2t = x(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,

$y(\pi - t) = \sin 3\,(\pi - t) = \sin 3t = y(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

En d'autres termes : $\quad x(\frac{\pi}{2} + t) = x(\frac{\pi}{2} - t) \quad$ et $\quad y(\frac{\pi}{2} + t) = y(\frac{\pi}{2} - t)$.

On peut donc restreindre l'étude de $\vec{r}\,(t)$ à l'intervalle $[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$, car

$$\vec{r}\,(\tfrac{\pi}{2} + t) \;=\; \vec{r}\,(\tfrac{\pi}{2} - t)\,, \quad t \in [\,0\,;\,\tfrac{\pi}{2}\,]\,.$$

b) Dérivées.

i) Calcul de $\dot{\vec{r}}(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{d\,x}{dt} = -2\,\sin 2t\,, \quad \dot{y}(t) = \frac{d\,y}{dt} = 3\,\cos 3t\,, \quad \dot{\vec{r}}(t) \;=\; \begin{pmatrix} -2\,\sin(2t) \\ 3\,\cos(3t) \end{pmatrix}.$$

ii) Points remarquables.

- $t = 0$: Γ admet une tangente verticale en $A\,(1, 0)$.
- $t = \frac{\pi}{6}$: Γ admet une tangente horizontale en $B\,(\frac{1}{2}, 1)$.
- $t = \frac{\pi}{2}$: le point $C\,(-1, -1)$ est un point stationnaire de Γ.

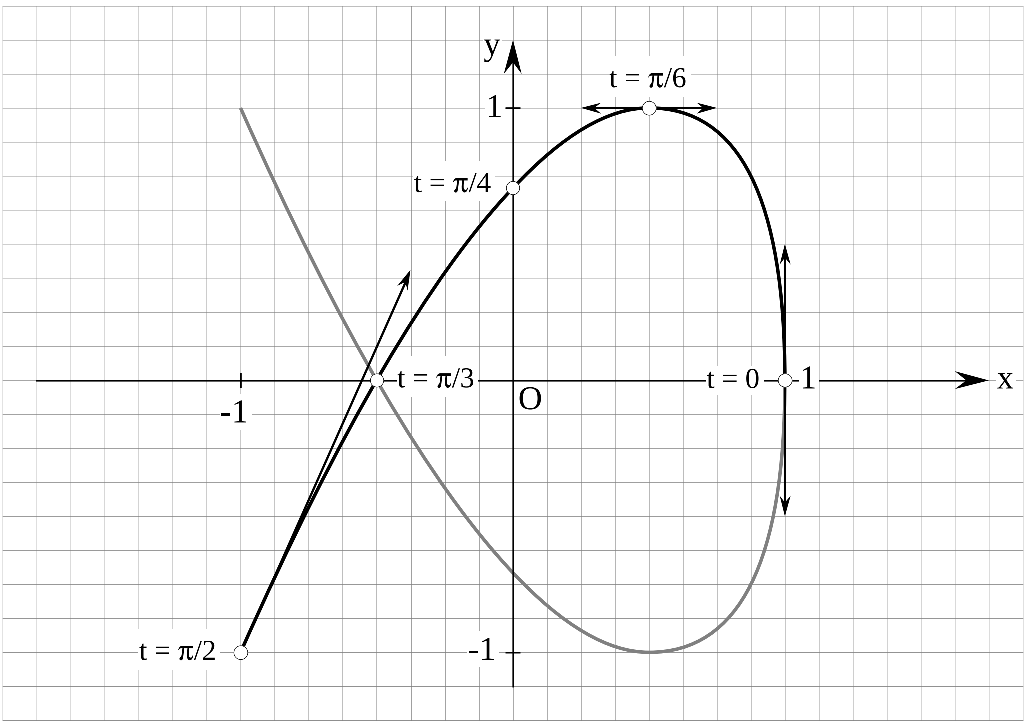
  Soit m la pente de la tangente à Γ en $C\,(-1, -1)$.

$$m = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{d\,y}{dx} = -\frac{3}{2} \cdot \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3t}{\sin 2t} = -\frac{3}{2} \cdot \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{-3\,\sin 3t}{2\,\cos 2t} = \frac{9}{4}\,.$$

c) Tableau de variation.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\dot{x}(t)$	0	$-$	$-\sqrt{3}$	$-$	0
$x(t)$	1	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	-1
$\dot{y}(t)$	3	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

d) Représentation graphique.



4. Soit Γ l'arc paramétré défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \sin(t) + \cos^2(t) \\ y(t) = \cos(t)\,[\,1 + \sin(t)\,] \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

a) Montrer qu'on peut restreindre l'étude de Γ à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

b) Faire l'étude complète de l'arc paramétré Γ, puis le représenter dans un système d'axes orthonormé d'unité 8 carrés.

---

a) Les deux fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ sont 2π-périodiques. On peut donc restreindre l'étude de l'arc Γ à un intervalle de longueur $T = 2\pi$.

D'autre part $x(t)$ et $y(t)$ ne sont ni paires ni impaires, mais en les évaluant en $\pi - t$, on vérifie que

$$x(\pi - t) = \sin(\pi - t) + \cos^2(\pi - t) = \sin(t) + \cos^2(t) = x(t)$$

et $$y(\pi - t) = \cos(\pi - t)\,[\,1 + \sin(\pi - t)\,] = -\cos(t)\,[\,1 + \sin(t)\,] = -y(t)\,.$$

En d'autres termes :

$$x\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) = x\left(\tfrac{\pi}{2} + t\right) \qquad \text{et} \qquad y\left(\tfrac{\pi}{2} - t\right) = -y\left(\tfrac{\pi}{2} + t\right), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Donc si t et u sont symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$, on déduit $M(u)$ par rapport à $M(t)$ par symétrie d'axe Ox.

On choisit donc comme intervalle de longueur $T = 2\pi$, l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{3\pi}{2}\,]$ (symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$) et on le restreint à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

b) Etude de l'arc paramétré Γ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$.

- Points frontières du domaine d'étude
  - $x\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées $(-1\,,\,0)$,
  - $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées $(1\,,\,0)$.

- Dérivées
  - $\dot{x}\,(t) = \cos(t) - 2\,\cos(t)\,\sin(t) = \cos(t)\,[\,1 - 2\,\sin(t)\,]$,

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t) = 0 \\ t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(t) = 0 \quad \text{ou} \\ \sin(t) = \frac{1}{2} \\ t \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \\ t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \\ t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Signe de $\dot{x}\,(t)$:

t	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(t)$	0	$+$		$+$	0
$1-2\,\sin(t)$		$+$	0	$-$	
$\dot{x}(t)$	0	$+$	0	$-$	0

- $\dot{y}\,(t) = -\sin(t)\,[\,1+\sin(t)\,] + \cos^2(t) = -2\,\sin^2(t) - \sin(t) + 1\,,$

$$\dot{y}\,(t) = [\,\sin(t)+1\,]\,[\,1-2\,\sin(t)\,]\ .$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{y}\,(t) = 0 \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \sin(t) = -1 \quad \text{ou} \\ \sin(t) = \frac{1}{2} \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \\ t = \frac{\pi}{6} \end{array}\right.$$

Signe de $\dot{y}\,(t)$:

t	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\sin(t)+1$	0	$+$		$+$	
$1-2\,\sin(t)$		$+$	0	$-$	
$\dot{y}(t)$	0	$+$	0	$-$	

- Points remarquables

  - En $t = -\frac{\pi}{2}$, $M(-1,0)$ est un point stationnaire. La pente de la tangente est donnée par

$$\lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)+1}{\cos(t)} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} = 0\,.$$

C'est un point à tangente horizontale.

  - En $t = \frac{\pi}{6}$, $M(\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ est un point stationnaire. La pente de la tangente est donnée par

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{6}} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)+1}{\cos(t)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}\,.$$

C'est un point à tangente oblique de pente $m = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

  - En $t = \frac{\pi}{2}$, $M(1,0)$ est un point à tangente verticale, car $\dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\dot{y}(\frac{\pi}{2}) \neq 0$.

- Tableau de variation

t	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\dot{x}(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	-1	$\nearrow$	$5/4$	$\searrow$	1
$\dot{y}(t)$	0	$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

- Représentation de l'arc Γ