# Corrigé 16

**1.** Pour chacune des courbes définies ci-dessous, rechercher les éléments de symétrie déductibles de la parité des fonctions coordonnées.

a) $\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \frac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{cases}$

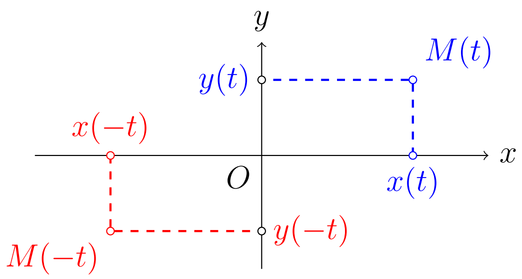
d) $\begin{cases} x(t) = \frac{2t^2(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \\ y(t) = \frac{4t^3}{(t^2+1)^2} \end{cases}$

---

a) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ :

- $x(t) = 3t - t^3$, $x(-t) = -3t + t^3 = -x(t)$, $x(t)$ est donc impaire,
- $y(t) = \sqrt[3]{t}$, $y(-t) = \sqrt[3]{-t} = -\sqrt[3]{t} = -y(t)$, $y(t)$ est donc impaire.

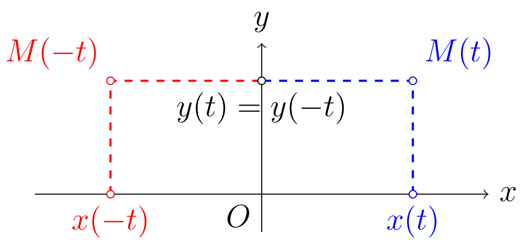
On en déduit que la courbe $\Gamma$ est symétrique par rapport à l'origine $O$.




b) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ :

- $x(t) = \sin t$, $x(-t) = -\sin t = -x(t)$, $x(t)$ est donc impaire,
- $y(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t}$, $y(-t) = \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t} = y(t)$, $y(t)$ est donc paire.

On en déduit que la courbe $\Gamma$ est symétrique par rapport à l'axe $Oy$.



c) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ :

- $x(t) \;=\; e^{-t}\cos t\,, \qquad x(-t) \;=\; e^{+t}\cos(-t) \;=\; e^{+t}\cos t\,,$

  la fonction $x(t)$ n'est ni paire ni impaire, on peut donc déjà en déduire que la courbe $\Gamma$ ne possède pas de symétrie déductible de la parité des fonctions coordonnées,

- $y(t) \;=\; e^{-t}\sin t\,, \qquad y(-t) \;=\; e^{+t}\sin(-t) \;=\; -e^{+t}\sin t\,,$

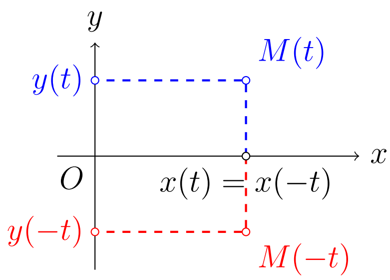
  la fonction $y(t)$ n'est ni paire ni impaire.

d) On teste la parité des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ :

- $x(t) = \dfrac{2\,t^2\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,, \quad x(-t) = \dfrac{2\,t^2\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = x(t)\,, \quad x(t)$ est donc paire,

- $y(t) = \dfrac{4\,t^3}{(t^2+1)^2}\,, \quad y(-t) = -\dfrac{4\,t^3}{(t^2+1)^2} = -y(t)\,, \quad y(t)$ est donc impaire.

On en déduit que la courbe $\Gamma$ est symétrique par rapport à l'axe $Ox$.




**2.** Soit $\Gamma$ la courbe définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 1-t^2 \\ y(t) = t^2-t^3 \end{array}\right. \qquad t\in\mathbb{R}\,.$

Calculer l'équation cartésienne de la tangente à la courbe $\Gamma$ passant par le point $P\,(4\,;\,-8) \notin \Gamma$.

---

- Equation de la tangente à $\Gamma$ en $T\,(x(t_0)\,,\,y(t_0))$.

$$y - y(t_0) \;=\; m\,(x - x(t_0))\,, \qquad \text{avec} \qquad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_T .$$

- Calcul de la pente $m$.

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} \;=\; \frac{3\,t^2-2\,t}{2\,t}\,, \;=\; \frac{3\,t-2}{2}\,, \quad t\neq 0\,, \qquad m \;=\; \left.\frac{dy}{dx}\right|_T \;=\; \frac{3\,t_0-2}{2}\,.$$

- Equation de la tangente à $\Gamma$ en $T$.

$$y + t_0^3 - t_0^2 \;=\; \frac{3\,t_0-2}{2}\,(x + t_0^2 - 1)\,.$$

- La tangente à $\Gamma$ en $T$ passe par le point $P$.

$$y_P+t_0^3-t_0^2 \;=\; \frac{3\,t_0-2}{2}\,(x_P+t_0^2-1) \quad\Leftrightarrow\quad -8+t_0^3-t_0^2 \;=\; \frac{3\,t_0-2}{2}\,(4+t_0^2-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad t_0^3+9\,t_0+10=0 \quad\Leftrightarrow\quad (t_0+1)\,(t_0^2-t_0+10)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t_0=-1\,.$$

- Equation de la tangente à $\Gamma$ issue de $P$.

$$t_0=-1 \quad\Rightarrow\quad T\,(0\,,\,2) \quad \text{et} \quad m=-\frac{5}{2}\,.$$

D'où l'équation de la tangente cherchée :

$$y-2=-\frac{5}{2}\,x \quad\Leftrightarrow\quad 5\,x+2\,y-4=0\,.$$

*Remarque :* en $t=0$, la pente $\dfrac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}=\dfrac{0}{0}$ n'est pas définie. Le point $(x(0),y(0))=(1,0)$ est un point stationnaire dont la pente se calcule comme

$$\lim_{t\to 0}\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=-1.$$

L'équation de la tangente dans le point $(1,0)$ est alors donnée par

$$t:y=-x+1$$

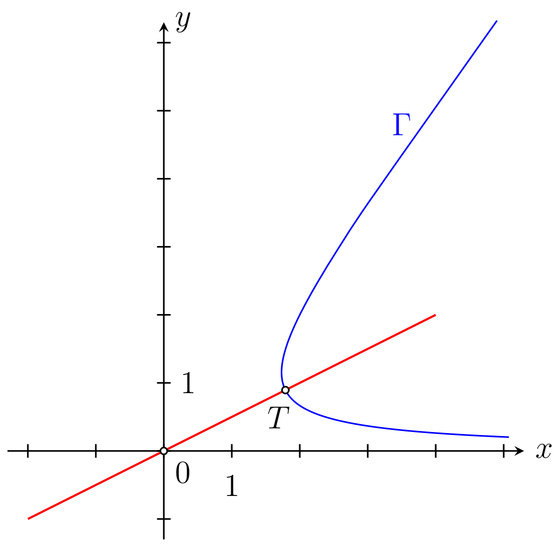
et on observe que le point $P\notin t$.

**3.** On considère la courbe $\Gamma$ décrite ci-dessous paramétriquement :

$$\Gamma:\begin{cases} x(t) &=& \dfrac{t}{\sqrt{2t-3}} \\ y(t) &=& \dfrac{2}{\sqrt{2t-3}}\,. \end{cases}$$

Déterminer les équations cartésiennes des normales à $\Gamma$ passant par l'origine.

---



Notons $T(x_0, y_0)$ un point de $\Gamma$ dont est issue une normale cherchée. Ce point est atteint pour un valeur $t_0$ du paramètre à déterminer.

L'équation de la normale s'écrit

$$y - y_0 = m(x - x_0)\,.$$

- Domaine de définition : $D_{\text{déf}} = ]\,\frac{3}{2}, +\infty[$
- $T \in \Gamma$ :

$$x_0 = x(t_0) = \frac{t_0}{\sqrt{2t_0 - 3}} \qquad y_0 = y(t_0) = \frac{2}{\sqrt{2t_0 - 3}}\,.$$

- Pente de la normale à $\Gamma$ en $T$: $m = -\dfrac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}$.

  Dérivées :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{1 \cdot \sqrt{2t-3} - t\frac{2}{2\sqrt{2t-3}}}{2t-3} = \frac{t-3}{(2t-3)^{\frac{3}{2}}} \\
\dot{y}(t) &= 2(-\tfrac{1}{2})(2t-3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = -\frac{2}{(2t-3)^{\frac{3}{2}}}\,.
\end{aligned}$$

  La pente de la normale en $T$ s'écrit donc

$$m = \frac{t_0 - 3}{2}\,.$$

- La normale passant par l'origine, le point $(0, 0)$ vérifie l'équation de la normale :

$$\begin{aligned}
y_0 &= m x_0 \\
\frac{2}{\sqrt{2t_0 - 3}} &= \frac{t_0 - 3}{2}\,\frac{t_0}{\sqrt{2t_0 - 3}} \\
t_0^2 - 3t_0 - 4 &= 0 \\
(t_0 - 4)(t_0 + 1) &= 0\,.
\end{aligned}$$

  Comme $-1 \notin D_{\text{déf}}$, la seule valeur du paramètre est

$$t_0 = 4\,.$$

- Equation de la normale : avec

$$x_0 = x(4) = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad y_0 = y(4) = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad m = \frac{1}{2}$$

  il vient

$$y - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

  ou encore

$$y = \frac{x}{2}\,.$$

**4.** a) Pour la courbe paramétrée suivante, déterminer le point stationnaire et la tangente en ce point.

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{1-2t} \\ y(t) &= \dfrac{t^3}{1-2t} \end{cases}$$

---

$M\,(x,y)$ est un point stationnaire de $\Gamma$ en $t = t_0$ si et seulement si $\dot{x}\,(t_0) = 0$ et $\dot{y}\,(t_0) = 0$.

$$\dot{x}\,(t) = \frac{2t\,(1-2t)+2t^2}{(1-2t)^2} = \frac{-2t^2+2t}{(1-2t)^2} = \frac{-2t\,(t-1)}{(1-2t)^2}\,.$$

$$\dot{x}\,(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 1\,.$$

$$\dot{y}\,(t) = \frac{3t^2\,(1-2t)+2t^3}{(1-2t)^2} = \frac{-4t^3+3t^2}{(1-2t)^2} = \frac{-t^2\,(4t-3)}{(1-2t)^2}\,.$$

$$\dot{y}\,(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{3}{4}\,.$$

$\Gamma$ admet en $t_0 = 0$ un point stationnaire : c'est l'origine.

La pente de la tangente en ce point est donnée par $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}\,(t)}{\dot{x}\,(t)}$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}\,(t)}{\dot{x}\,(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^2\,(4t-3)}{-2t\,(t-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,(4t-3)}{2\,(t-1)} = 0\,.$$

$\Gamma$ admet donc à l'origine un point stationnaire à tangente horizontale $(y = 0)$.

Remarque :

En $t = 0$, $\dot{x}\,(t)$ change de signe et $\dot{y}\,(t)$ garde un signe constant.
Donc le point stationnaire est un point de rebroussement et la tangente est en fait une demi-tangente horizontale.

b) Pour la courbe paramétrée suivante, déterminer les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= t^2 + \dfrac{4}{t-1} \\ y(t) &= 2t^2 - \dfrac{16}{t-1} \end{cases}$$

---

- Asymptotes

  Limites aux points frontières de $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Limites aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty\,, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty\,.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^3-2t^2-16}{t^3-t^2+4} = 2\,,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} [\,y(t)-2\,x(t)\,] = \lim_{t\to\pm\infty} -\frac{24}{t-1} = 0\,.$$

$\Gamma$ admet, lorsque $t\to\pm\infty$, une asymptote oblique d'équation $y=2x$.

* Limites au voisinage de $t=1$.

$$\lim_{t\to 1^-} x(t) = -\infty\,, \qquad \lim_{t\to 1^-} y(t) = +\infty$$

$$\lim_{t\to 1^+} x(t) = +\infty\,, \qquad \lim_{t\to 1^+} y(t) = -\infty$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} \frac{2t^3-2t^2-16}{t^3-t^2+4} = -4\,,$$

$$\lim_{t\to 1} [\,y(t)+4\,x(t)\,] = \lim_{t\to 1} 6t^2 = 6\,.$$

$\Gamma$ admet, lorsque $t\to 1$, une asymptote oblique : $y=-4x+6$.

- Tangentes horizontales et verticales

$$\dot{x}(t) = 2t - \frac{4}{(t-1)^2} = \frac{2\,(t^3-2t^2+t-2)}{(t-1)^2} = \frac{2\,(t-2)\,(t^2+1)}{(t-1)^2}\,,$$

$$\dot{y}(t) = 4t + \frac{16}{(t-1)^2} = \frac{4\,(t^3-2t^2+t+4)}{(t-1)^2} = \frac{4\,(t+1)\,(t^2-3t+4)}{(t-1)^2}\,.$$

$$\dot{x}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=2\,, \qquad \dot{y}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=-1\,.$$

* Lorsque $t=-1$, $\dot{y}(t)=0$ et $\dot{x}(t)\neq 0$, $\Gamma$ admet en $(-1\,;\,10)$ une tangente horizontale d'équation $y=10$.

* Lorsque $t=2$, $\dot{x}(t)=0$ et $\dot{y}(t)\neq 0$, $\Gamma$ admet en $(8\,;\,-8)$ une tangente verticale d'équation $x=8$.

**5.** Déterminer les paramètres réels $a$ et $b$ pour que la droite $d$ : $9x+3y+4=0$ soit une asymptote oblique de la courbe $\Gamma$ :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{(t-a)\,(t-b)} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{t-b} \end{cases}$$

---

Pour que la courbe $\Gamma$ admette une asymptote oblique, il est nécessaire que $x(t)$ et $y(t)$ tendent simultanément vers l'infini (condition nécessaire mais non suffisante).

Limite aux points frontières de $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ :

- lorsque $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 1$ et $y(t) \to \pm\infty$, la courbe $\Gamma$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$,
- lorsque $t \to a$, $(a \neq b)$, $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \frac{a^2}{a-b}$, la courbe $\Gamma$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{a^2}{a-b}$,
- lorsque $t \to b$, $x(t) \to \pm\infty$ et $y(t) \to \pm\infty$, la courbe $\Gamma$ admet peut-être une asymptote oblique.

La condition n'est remplie que lorsque $t$ tend vers $b$.

La courbe $\Gamma$ admet, lorsque $t$ tend vers $b$, la droite $d:\ y = -3x - \dfrac{4}{3}$ comme asymptote oblique si et seulement si

$$\lim_{t\to b} \frac{y(t)}{x(t)} = -3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to b}\,[\,y(t) + 3\,x(t)\,] = -\frac{4}{3}\,.$$

$$\lim_{t\to b} \frac{y(t)}{x(t)} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to b}\,(t-a) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad b - a = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a = b + 3\,.$$

$$\lim_{t\to b}\,[\,y(t) + 3\,x(t)\,] = \lim_{t\to b} \left[ \frac{t^2}{t-b} + \frac{3\,t^2}{(t-b-3)\,(t-b)} \right] = \lim_{t\to b} \frac{t^2\,(t-b-3) + 3\,t^2}{(t-b-3)\,(t-b)}$$

$$= \lim_{t\to b} \frac{t^2}{t-b-3} = -\frac{b^2}{3}\,. \qquad \text{Donc} \quad \lim_{t\to b}\,[\,y(t) + 3\,x(t)\,] = -\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm 2\,.$$

Ce problème admet deux solutions : $(a\,,\,b) = (1\,,\,-2)$ ou $(a\,,\,b) = (5\,,\,2)\,.$

**6.** On considère dans le plan, la courbe $\Gamma$ définie par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t^3}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^4}{t^2-1} \end{cases}$$

a) Etudier les branches infinies de la courbe $\Gamma$.

b) Déterminer le point stationnaire de $\Gamma$ et sa tangente.
Faire l'esquisse locale de la courbe $\Gamma$ au voisinage de ce point.
En quoi ce point est-il remarquable ?

---

a) Limites aux points frontières du domaine de définition $D_{\text{def}} = \mathbb{R} - \{-1\,,\,1\}$.

- $t \to \pm\infty$ : $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty\,, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = +\infty\,.$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^4}{t^2-1}\cdot\frac{t-1}{2t^3} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t}{2\,(t+1)} = \frac{1}{2}\,,$$

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \left[y(t) - \tfrac{1}{2}\,x(t)\right] = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^4 - t^3\,(t+1)}{t^2-1} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{-t^3}{t^2-1} = \mp\infty\,.$$

  La courbe $\Gamma$ admet, lorsque $t\to\pm\infty$ deux branches paraboliques de direction de pente $m = \frac{1}{2}$.

- $t \to -1$ : $\displaystyle\lim_{t\to-1} x(t) = 1\,, \qquad \lim_{t\to-1^{\pm}} y(t) = \mp\infty\,.$

  La courbe $\Gamma$ admet, lorsque $t\to-1$ une asymptote verticale : $x = 1$.

- $t \to 1$ : $\displaystyle\lim_{t\to1^{\pm}} x(t) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{t\to1^{\pm}} y(t) = \pm\infty\,.$

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

  $$\lim_{t\to1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to1} \frac{t}{2\,(t+1)} = \frac{1}{4}\,,$$

  $$\lim_{t\to1} \left[\,y(t) - \tfrac{1}{4}\,x(t)\,\right] = \lim_{t\to1} \frac{2t^4 - t^3\,(t+1)}{2\,(t^2-1)} = \lim_{t\to1} \frac{t^3}{2\,(t+1)} = \frac{1}{4}\,.$$

  La courbe $\Gamma$ admet, lorsque $t\to1$ une asymptote oblique : $y = \frac{1}{4}\,(x+1)$.

b) Recherche du point stationnaire de $\Gamma$.

$$\dot{x}(t) = \frac{6t^2\,(t-1) - 2t^3}{(t-1)^2} = \frac{4t^3 - 6t^2}{(t-1)^2} = \frac{2t^2\,(2t-3)}{(t-1)^2}\,.$$

$$\dot{y}(t) = \frac{4t^3\,(t^2-1) - t^4\,(2t)}{(t^2-1)^2} = \frac{2t^5 - 4t^3}{(t^2-1)^2} = \frac{2t^3\,(t^2-2)}{(t^2-1)^2}\,.$$

$\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ sont simultanément nuls si et seulement si $t = 0$. L'unique point stationnaire de $\Gamma$ est l'origine $O$.

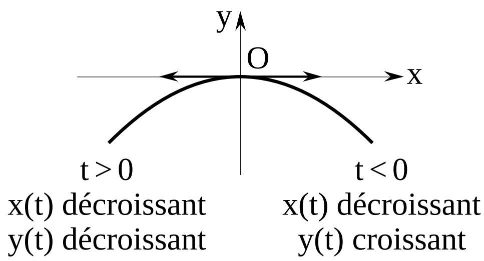
La pente de la tangente en ce point est donnée par $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

$$\lim_{t\to0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to0} \frac{2t^3\,(t^2-2)}{(t^2-1)^2}\cdot\frac{(t-1)^2}{2t^2\,(2t-3)} = \lim_{t\to0} \frac{t\,(t^2-2)}{(t+1)^2\,(2t-3)} = 0\,.$$

La courbe $\Gamma$ admet à l'origine une tangente horizontale.

Variation locale et esquisse de $\Gamma$ au voisinage de $O$.

| $t$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $\dot{x}(t)$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $\dot{y}(t)$ | $+$ | $0$ | $-$ |




Le point stationnaire de $\Gamma$ est un point à tangente horizontale.

**7.** On considère dans le plan la courbe paramétrée :

$$\Gamma : \quad \begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t^2 + a\,t - \frac{1}{t^2} \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, la courbe paramétrée $\Gamma$ possède-t-elle un point stationnaire ?

Déterminer alors l'équation cartésienne de la tangente en ce point.

b) On pose $a = 4$. Etudier les branches infinies de $\Gamma$.

---

a) La courbe paramétrée $\Gamma$ définie par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ possède un point stationnaire en $t = t_0$ si et seulement si $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{0}$.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2t \\ 4t + a + 2\,\frac{1}{t^3} \end{pmatrix}.$$

$\dot{x}(t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_0 = -1$, donc $\Gamma$ admet un point stationnaire en $t_0$ si et seulement si $t_0 = -1$ et $\dot{y}(-1) = 0$ :

$$\dot{y}(-1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -4 + a - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 6\,.$$

$\Gamma$ admet un point stationnaire si et seulement si $a = 6$.

Ce point est atteint en $t = -1$ et $\vec{r}\,(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

L'équation de la tangente $d$ à $\Gamma$ en ce point s'écrit :

$$d:\; y - y(t_0) = m\,(x - x(t_0))$$

où la pente de la tangente est donnée par $m = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

$$m = \lim_{t\to -1} \frac{4t+6+2\,\frac{1}{t^3}}{2+2t} = \lim_{t\to -1} \frac{4t^4+6t^3+2}{2t^3\,(1+t)} = \lim_{t\to -1} \frac{(1+t)\,(4t^3+2t^2-2t+2)}{2t^3\,(1+t)}$$

$$m = \lim_{t\to -1} \frac{(4t^3+2t^2-2t+2)}{2t^3} = -1$$

D'où l'équation cartésienne de $d$ : $x+y+6=0$.

b) On pose $a=4$. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t+t^2 \\ 2t^2+4t-\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$, $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

- Lorsque $t$ tend vers 0.

  $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = \lim\limits_{t\to 0} t\,(2+t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = \lim\limits_{t\to 0} \left(2t^2+4t-\dfrac{1}{t^2}\right) = -\infty$.

  La courbe $\Gamma$ admet, lorsque $t$ tend vers 0, une asymptote verticale d'équation $x=0$.

- Lorsque $t$ tend vers $\pm\infty$.

  $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} t\,(2+t) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{2t^4+4t^3-1}{t^2} = +\infty$.

  Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^4+4t^3-1}{t^3\,(2+t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^4}{t^4} = 2.$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} [\,y(t)-2\,x(t)\,] = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^4+4t^3-1-2\,t^3\,(2+t)}{t^2} = \lim_{t\to\pm\infty} -\frac{1}{t^2} = 0.$$

  La courbe $\Gamma$ admet, lorsque $t$ tend vers $\pm\infty$, une asymptote oblique d'équation $y=2x$.