

Corrigé 15

1. Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes en $x = x_0$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad a(x) = \frac{1 - 3x^2 + 2x^3}{1 - x + \ln x}, \quad x_0 = 1 & \text{e)} \quad e(x) = \sin(x) \cdot \ln(x), \quad x_0 = 0, \quad x > 0 \\
 \text{b)} \quad b(x) = \frac{a^x - e^x}{x}, \quad x_0 = 0 & \text{f)} \quad f(x) = \left[\tanh(x) \right]^{\sinh^2(x)}, \quad x \rightarrow +\infty \\
 \text{c)} \quad c(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}, \quad x_0 = 0 & \text{g)} \quad g(x) = \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}}, \quad x_0 = 0 \\
 \text{d)} \quad d(x) = \frac{x}{\ln [3x + \cosh(2x)]}, \quad x \rightarrow -\infty &
 \end{array}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x^2 + 2x^3}{1 - x + \ln x}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

On lève l'indétermination à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x^2 + 2x^3}{1 - x + \ln x} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6x + 6x^2}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6x^2(x-1)}{x-1} = -6.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - e^x}{x}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - e^x}{x} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a) \cdot e^{x \ln a} - e^x}{1} = \ln(a) - 1.$$

c) • Limite de $c(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \text{ n'est pas une forme indéterminée, car } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

• Limite de $c(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \text{ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ", car } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

○ Première tentative

On lève l'indétermination de type " $\frac{0}{0}$ " à l'aide de la règle de Bernoulli-l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

On a toujours une indétermination de type " $\frac{0}{0}$ ". L'expression obtenue en appliquant la règle de Bernoulli-de l'Hôpital est même pire que l'expression initiale. Il faut essayer autre chose.

- Deuxième tentative

On se ramène à une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ " :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{1} = -\infty.$$

$$\text{d)} \quad 3x + \cosh(2x) = 3x + \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = e^{-2x} \cdot \frac{6x e^{2x} + e^{4x} + 1}{2} \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2 e^{-2x}} = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\ln[3x + \cosh(2x)]}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\ln[3x + \cosh(2x)]} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + \cosh(2x)}{3 + 2 \sinh(2x)} \quad (\text{F.I. de type } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 2 \sinh(2x)}{4 \cosh(2x)} \quad (\text{F.I. de type } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cosh(2x)}{8 \sinh(2x)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\tanh(2x)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \cdot \ln(x) \stackrel{\text{IPE}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

f) Continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\tanh(x)]^{\sinh^2(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sinh^2(x) \cdot \ln[\tanh(x)]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh^2(x) \cdot \ln[\tanh(x)]}$$

car la fonction exponentielle est continue.

Forme indéterminée :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh^2(x) \cdot \ln[\tanh(x)]$ est une forme indéterminée " $\infty \cdot 0$ ", car

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = +1$ et la fonction \ln est continue.

Pour pouvoir utiliser la règle de Bernoulli-de l'Hospital, il faut se ramener à une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ " ou " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$:

On se ramène à une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ " pour pouvoir utiliser la règle de Bernoulli-de l'Hospital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh^2(x) \cdot \ln [\tanh(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln [\tanh(x)]}{\frac{1}{\sinh^2(x)}} \\
&\stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\tanh(x)} \cdot \frac{1}{\cosh^2(x)}}{-2 \cdot \frac{1}{\sinh^3(x)} \cdot \cosh(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sinh(x) \cdot \cosh(x)} \cdot \frac{\sinh^3(x)}{\cosh(x)} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh^2(x) \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\tanh(x)]^{\sinh^2(x)} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

$$\text{g) } g(x) = \left[\frac{\sin x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \cdot \ln(\frac{\sin x}{x})}.$$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{\sin x}{x}$, c'est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - x \sin x) - \cos x}{6x^2} = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6} \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = e^{-\frac{1}{6}}$ car la fonction exponentielle est continue.

2. On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\ln [\cosh(x)]}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour quelles valeurs du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction g est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

La fonction g est prolongeable par continuité en $x = 0$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe (est finie).

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln [\cosh(x)]}{x^n}$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ", car

$\lim_{x \rightarrow 0} \cosh(x) = 1$ et la fonction \ln est continue.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln [\cosh(x)]}{x^n} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cosh(x)} \cdot \sinh(x)}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{n x^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour déterminer cette limite en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, il faut distinguer deux cas selon que $n = 1$ (dénominateur constant non nul) ou $n > 1$ (dénominateur qui tend vers 0) :

- si $n = 1$, $g(x) = \frac{\tanh(x)}{1} = \tanh(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$,
- si $n \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ est une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{n x^{n-1}} \stackrel{\text{BH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cosh^2(x)}}{n(n-1)x^{n-2}}.$$

De même ici, il faut distinguer deux cas selon que $n = 2$ (dénominateur constant non nul) ou $n > 2$ (dénominateur qui tend vers 0) :

- si $n = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cosh^2(x)}}{2} = \frac{1}{2}$,
- si $n > 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cosh^2(x)}}{n(n-1)x^{n-2}} = \infty$.

La fonction g est donc prolongeable par continuité en $x = 0$ si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$.

3. Faire l'étude complète des fonctions données dans l'exercice 4 de la série 13.

a) $a(x) = x + \sqrt{1-x}$, c) $c(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$,

b) $b(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$, d) $d(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}$,

a) $a(x) = x + \sqrt{1-x}$, $D_a =]-\infty, 1]$, a est continue sur D_a .

Etude des branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = -\infty.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [a(x) - x] = +\infty.$$

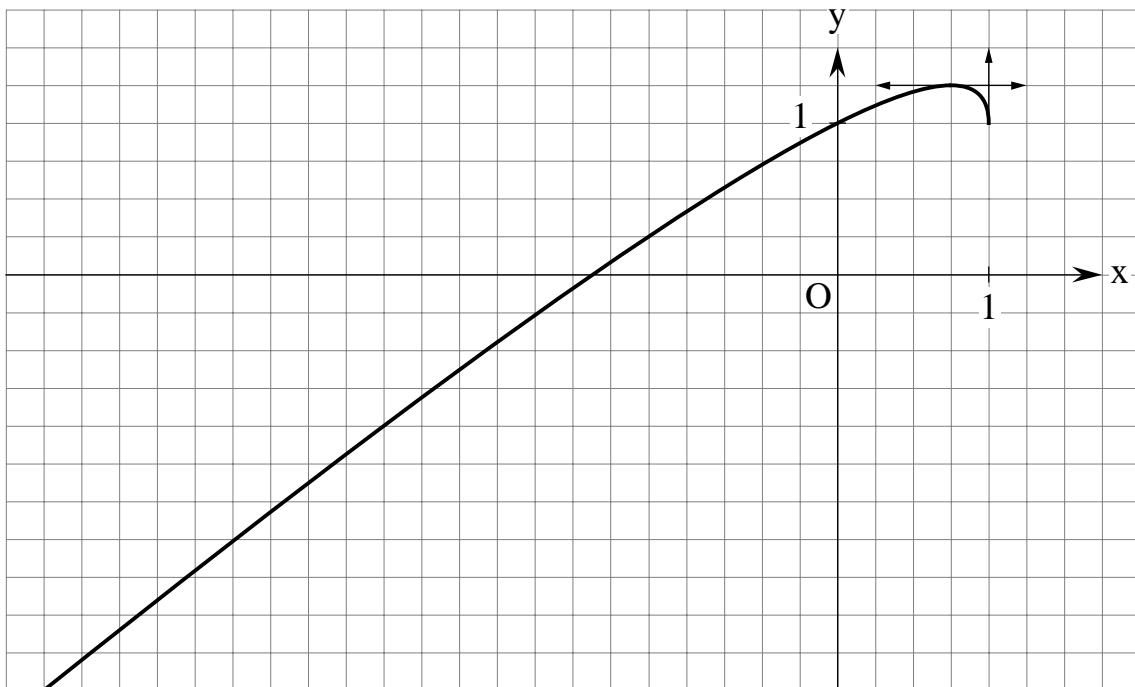
Le graphe de a admet donc au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction de pente $m = 1$.

Tableau de variation de la fonction a :

x	$-\infty$	$3/4$	1
$a'(x)$	+	0	-
$a(x)$	$-\infty$	\nearrow	\downarrow

$5/4$

Représentation graphique de la fonction a :



b) $b(x) = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$, $D_b = \mathbb{R} - \{-1\}$, b est continue sur D_b .

Etude des branches infinies.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

Le graphe de b admet aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

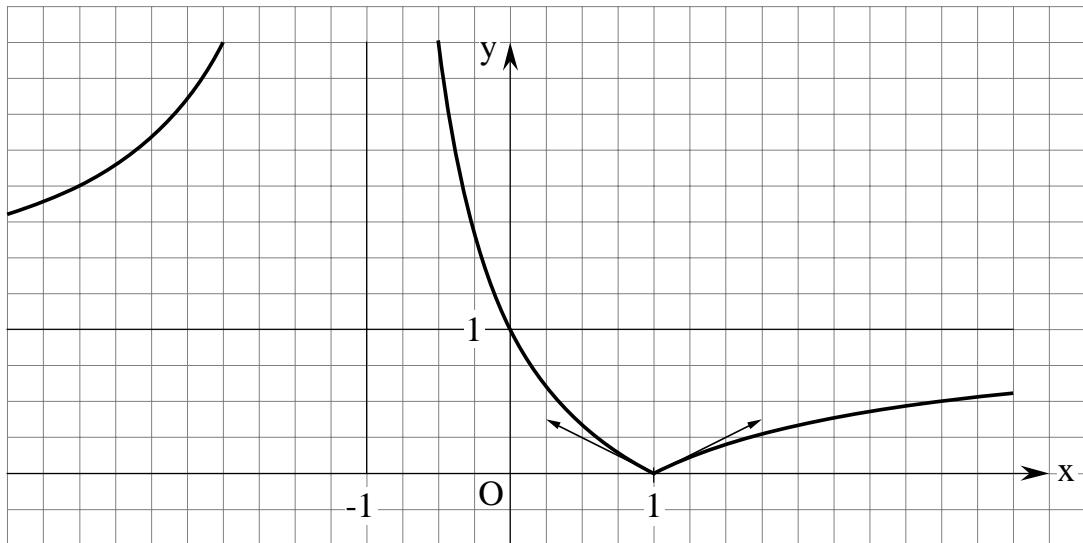
- $\lim_{x \rightarrow -1} b(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = +\infty$.

Le graphe de b admet une asymptote verticale en $x = -1$.

Tableau de variation de la fonction b :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$b'(x)$	+		-	
$b(x)$	1 ↗	$+\infty$	0 ↘	1 ↗

Représentation graphique de la fonction b :



c) $c(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$, $D_c = \mathbb{R}$, c est continue sur \mathbb{R} .

Etude des branches infinies.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^2} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right) = +\infty.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

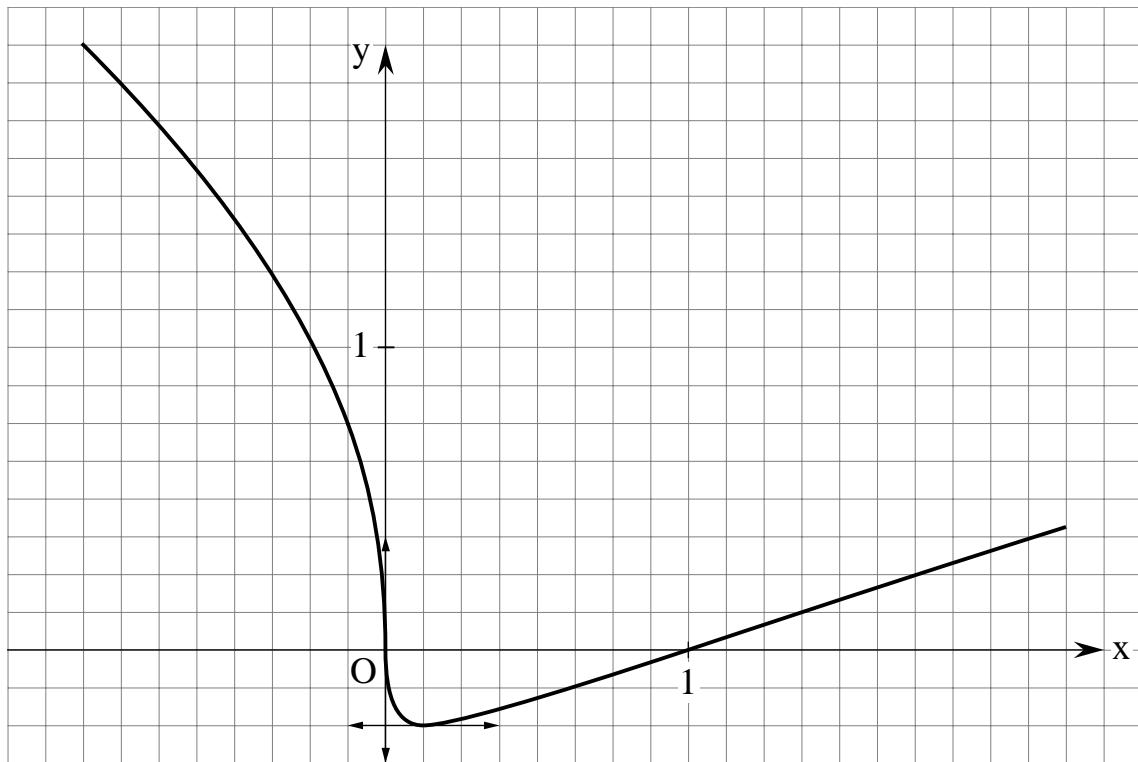
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right) = 0.$$

Le graphe de c admet donc aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ deux branches paraboliques de direction horizontale.

Tableau de variation de la fonction c .

x	$-\infty$	0	$1/8$	$+\infty$
$c'(x)$	-	$-\infty$	0	+
$c(x)$	$+\infty$	0 ↘	$-1/4$	$+\infty$

Représentation graphique de la fonction c :



$$d) \quad d(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}, \quad D_d = \mathbb{R}, \quad d \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Etude des branches infinies.

$$\text{Si } x \neq 0, \quad d(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x} = x \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}}.$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = +\infty.$$

Recherche d'une éventuelle asymptote oblique.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [d(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^3 - 6x^2 + 9x) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2 + 9x)^2} + x \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x} + x^2}$$

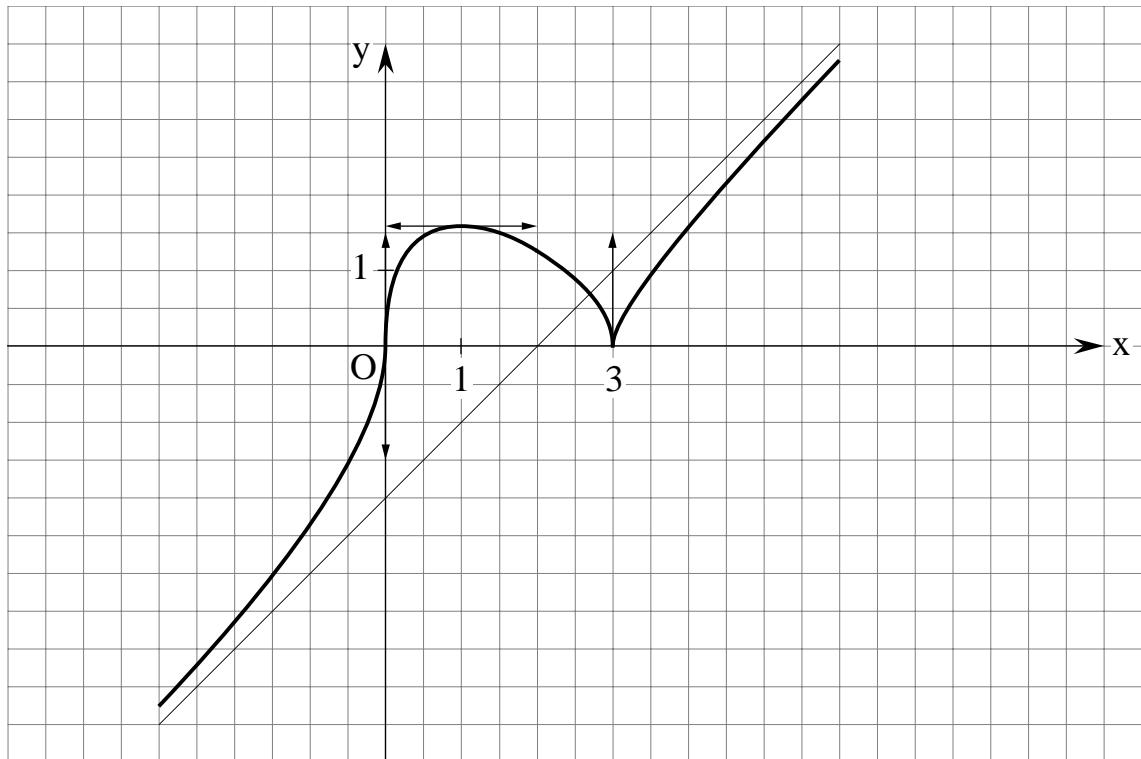
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2(-2 + \frac{3}{x})}{x^2 \left[\sqrt[3]{(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}} + 1 \right]} = -2.$$

Le graphe de d admet aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$.

Tableau de variation de la fonction d .

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$d'(x)$	+	$+\infty$	+	0	-
$d(x)$	$-\infty$	↗ 0	↗ $\sqrt[3]{4}$	↘ 0	↗ $+\infty$

Représentation graphique de la fonction d :



4. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan \left[\frac{x^2}{4(x+1)} \right] \quad \text{si} \quad x \neq -1 \quad \text{et} \quad f(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Faire l'étude complète de la fonction f .

Caractériser les points remarquables et représenter le graphe de f dans un système d'axes cartésien d'unité 2 cm (4 carrés).

Domaine de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$.

Domaine de définition de $y = \arctan \left[\frac{x^2}{4(x+1)} \right] : D_y = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Etude des limites aux points frontières de D_y .

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2},$

Le graphe de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\frac{\pi}{2},$

Le graphe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = +\frac{\pi}{2}$.

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\frac{\pi}{2} = f(-1),$

La fonction f n'est pas continue en $x_0 = -1$, mais elle est continue à droite en ce point.

Expression de la dérivée de f pour $x \neq -1$.

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{x^2}{4(x+1)} \right]'}{1 + \left[\frac{x^2}{4(x+1)} \right]^2} = \frac{\frac{x^2+2x}{4(x+1)^2}}{\frac{16(x+1)^2+x^4}{16(x+1)^2}} = \frac{4x(x+2)}{16(x+1)^2+x^4}, \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

La fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$, plus précisément :

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -4,$

dans un voisinage à gauche de $x_0 = -1$, lorsque x tend vers -1 , la pente de la tangente au graphe de f tend vers la valeur -4 .

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = -4 = f'(-1^+),$

la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = -1$. Le graphe de f admet en $(-1, \frac{\pi}{2})$ une demi-tangente à droite de pente $m = -4$.

Signe de la dérivée. $f'(x)$ s'annule en $x = -2$ ou $x = 0$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-4	-4

Points remarquables.

- Le point de coordonnées $(-2, -\frac{\pi}{4})$ est un maximum à tangente horizontale.
- Le point de coordonnées $(-1, \frac{\pi}{2})$ est un maximum dont la demi-tangente à droite est de pente $m = -4$.
- Le point de coordonnées $(0, 0)$ est un minimum à tangente horizontale.

Tableau de variation.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$	\nearrow $-\pi/2$	$-\pi/4$	\searrow $+\pi/2$	0	\nearrow $+\pi/2$

Représentation graphique.

