Corrigé 14

1. Déterminer et caractériser les extrema et les points remarquables du graphe de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 9 - 8\,|x|}\,.$$

On ne demande pas de déterminer ses éventuels points d'inflexion.

Domaine de définition de f : $D_f = \mathbb{R}$, f continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - 6x + 9} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^2 + 10x + 9} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-3)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{(x+9)\,(x+1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Dérivée de f :

- $y = \sqrt[3]{(x-3)^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2}{3\,\sqrt[3]{x-3}}\,,$
- $y = \sqrt[3]{(x+9)\,(x+1)} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{2x+10}{3\,\sqrt[3]{(x+9)^2\,(x+1)^2}} = \dfrac{2\,(x+5)}{3\,\sqrt[3]{(x+9)^2\,(x+1)^2}}\,,$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\,\sqrt[3]{x-3}} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{2\,(x+5)}{3\,\sqrt[3]{(x+9)^2\,(x+1)^2}} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-9\,,\,-1\,,\,0\,,\,3\}\,.$$

La fonction dérivée $f'(x)$ change de signe en $x = -5$, $x = 0$ et $x = 3$. Elle ne change pas de signe en $x = -9$ et $x = -1$. Plus précisément :

x		-9		-5		-1		0		3	
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

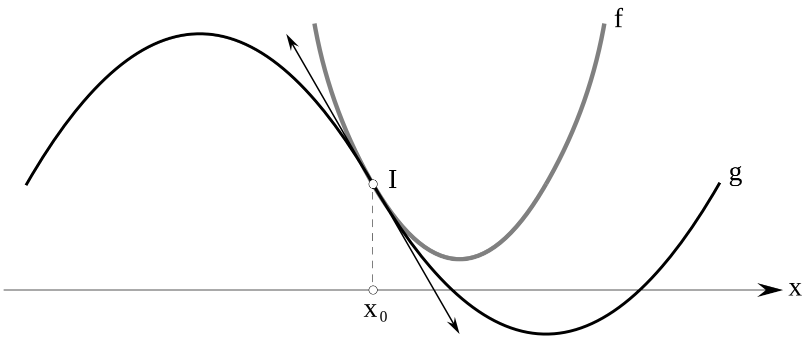
Le graphe de f possède donc cinq points remarquables dont trois sont des extrema :

- $\lim\limits_{x\to-9} f'(x) = -\infty$, $(-9, 0)$ est un point à tangente verticale, mais ce n'est pas un extremum,
- $(-5, -2\sqrt[3]{2})$ est un minimum à tangente horizontale,
- $\lim\limits_{x\to-1} f'(x) = +\infty$, $(-1, 0)$ est un point à tangente verticale, mais ce n'est pas un extremum,
- $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = +\dfrac{10}{\sqrt[3]{3^7}}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{3^4}}$. $(0, \sqrt[3]{9})$ est un maximum et un point anguleux dont les demi-tangentes sont de pente $+\frac{10}{\sqrt[3]{3^7}}$ et $-\frac{2}{\sqrt[3]{3^4}}$,
- $\lim\limits_{x\to3^-} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f'(x) = +\infty$, $(3, 0)$ est un minimum et un point de rebroussement.

2. On donne les fonctions $f(x) = x^2 + x + 2$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + p\,x + q$.

Déterminer les coefficients p et q de telle sorte qu'au point d'inflexion du graphe de g, celui-ci touche tangentiellement le graphe de f.

Figure d'étude.



Recherche de l'abscisse x_0 du point d'inflexion I du graphe de g.

$$g'(x) \;=\; 3x^2 + 6x + p\,, \qquad g''(x) \;=\; 6x + 6 \;=\; 6\,(x+1)\,.$$

$g''(x)$ s'annule et change de signe en $x_0 = -1$, $g(-1) = 2 - p + q$.

Le point $I\,(-1\,;\,2-p+q)$ est un point d'inflexion du graphe de g dont la pente de la tangente vaut $g'(-1) = -3 + p$.

Le graphe de f passe par I et est tangent à celui de g en I si et seulement si

$$f(-1) = g(-1) \qquad \text{et} \qquad f'(-1) = g'(-1)\,.$$

$$f(-1) = 2\,, \quad f(-1) = g(-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2 - p + q \quad \Leftrightarrow \quad p = q\,.$$

$$f'(x) = 2x + 1\,, \quad f'(-1) = g'(-1) \quad \Leftrightarrow \quad -1 = -3 + p \quad \Leftrightarrow \quad p = 2\,.$$

Les deux courbes sont tangentes en I si et seulement si $p = 2$ et $q = 2$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) \;=\; \sqrt{x^2 + n\,|x+2|}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le graphe de f admet-il en $x_0 = -2$, un point anguleux qui n'est pas un extremum ?

- Existence d'un point anguleux en $x_0 = -2$

  Le graphe de f admet en x_0 un point anguleux si et seulement si

  - f est continue en x_0 : c'est le cas.
  - f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$.

    Calcul de la dérivée de f :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - n\,x - 2n} & \text{si} \quad x < -2 \\ \sqrt{x^2 + n\,x + 2n} & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}, \qquad D_f = \mathbb{R}\,.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - n}{2\sqrt{x^2 - n\,x - 2n}} & \text{si} \quad x < -2 \\ \dfrac{2x + n}{2\sqrt{x^2 + n\,x + 2n}} & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}.$$

    Comparaison des nombres dérivés à gauche et à droite en $x_0 = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \frac{-4-n}{4} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -2^+} f'(x) = \frac{-4+n}{4}\,.$$

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad -4 - n \neq -4 + n \quad \Leftrightarrow \quad n \neq 0\,.$$

    Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le graphe de f possède un point anguleux en $x_0 = -2$.

- Le point anguleux n'est pas un extremum

  Le graphe de f n'admet pas d'extremum en $x_0 = -2$ si et seulement si la dérivée f' ne change pas de signe en $x_0 = -2$.

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \frac{-4-n}{4} < 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

  La dérivée à gauche en $x_0 = -2$ étant négative pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut que la dérivée à droite en $x_0 = -2$ soit aussi négative (éventuellement nulle).

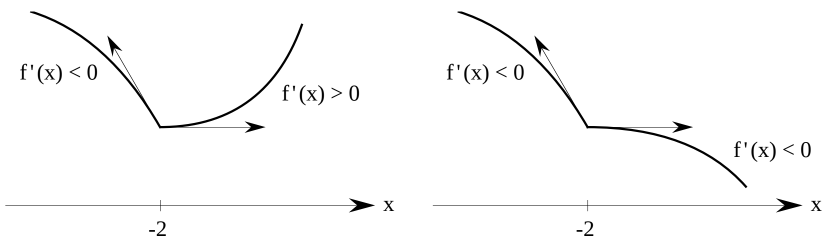
  Voici deux méthodes de résolution :

  – Première méthode : étude du signe du nombre dérivé à droite en $x_0 = -2$.

    - $\lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-4+n}{4} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < 4\,.$
    - Que se passe-t-il si $\lim\limits_{x \to -2^+} f'(x) = 0$?

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 4\,.$$

La demi-tangente à droite est horizontale, il y a deux possibilités :



Extremum en x = -2 Pas d'extremum en x = -2

Pour ce cas limite : $n = 4$, il faut étudier le signe de la fonction dérivée dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$.

$$\left.\begin{array}{r} x > -2 \\ n = 4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(x) \ = \ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}} \ > \ 0\,.$$

Donc pour $n = 4$, il y a aussi un extremum en $x_0 = -2$.

En résumé : $n \in \mathbb{N}^*$ et $n < 4 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{1\,,\,2\,,\,3\}$.

– Deuxième méthode : étude du signe de la fonction dérivée dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$.

$$x > -2\,, \quad f'(x) = \frac{2x+n}{2\,\sqrt{x^2+n\,x+2n}}\,, \qquad \operatorname{sgn}\left[f'(x)\right] = \operatorname{sgn}(2x+n)\,.$$

On distingue deux cas, selon que $-\frac{n}{2}$ est plus grand ou plus petit que -2.

◦ Si $-\frac{n}{2} \leq -2$, alors on a :

x		$-n/2$		-2	
$\frac{2x+n}{2\sqrt{x^2+n\,x+2n}}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

Dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$, la fonction dérivée $f'(x)$ est positive, le graphe de f admet donc un extremum en $x_0 = -2$.

◦ Si $-\frac{n}{2} > -2$, alors on a :

x		-2		$-n/2$	
$\frac{2x+n}{2\sqrt{x^2+n\,x+2n}}$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

Dans un voisinage à droite de $x_0 = -2$, la fonction dérivée $f'(x)$ est négative, le graphe de f n'admet donc pas d'extremum en $x_0 = -2$.

En résumé : $n \in \mathbb{N}^*$ et $-\frac{n}{2} > -2 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{1\,,\,2\,,\,3\}$.

4. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = ax^2 + 6x - 3\arctan(2x), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

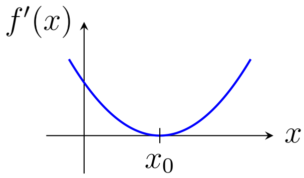
Déterminer le paramètre réel a de sorte que le graphe de f admette un point à tangente horizontale qui ne soit pas un extremum.

Le graphe de f admet en x_0 un point à tangente horizontal qui n'est pas un extremum si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et $f'(x)$ ne change pas de signe en x_0.

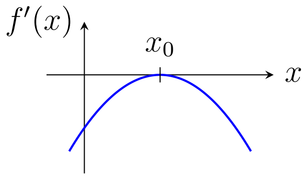
Calcul de $f'(x)$.

$$f'(x) = 2ax + 6 - 3\,\frac{2}{4x^2+1} = \frac{8ax^3 + 24x^2 + 2ax}{4x^2+1} = \frac{2x\,(4ax^2 + 12x + a)}{4x^2+1}.$$

$f'(x_0) = 0$ et $f'(x)$ ne change pas de signe en x_0 si et seulement si x_0 est une racine double de $f'(x)$.



ou



En d'autres termes, si et seulement si $f'(x) = \dfrac{\lambda\,(x-x_0)^2(x-x_1)}{4x^2+1}$, $x_0 \neq x_1$.

Or $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une racine de $f'(x)$.

On a donc l'alternative suivante :

- Soit $x_0 = 0$ est une racine double de $f'(x)$.

  C'est le cas si et seulement si $x_0 = 0$ est racine simple de $4ax^2 + 12x + a$.

  $$4ax^2 + 12x + a\Big|_{x=0} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = \frac{24x^2}{4x^2+1}.$$

- Soit $x_0 \neq 0$ est une racine double de $f'(x)$.

  C'est le cas si et seulement si $4ax^2 + 12x + a$ admet une racine double non nulle.

  $$\Delta' = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 6^2 - 4a^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = -3 \quad \text{ou} \quad a = 3.$$

$$a = -3 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = -\frac{6x\,(2x-1)^2}{4x^2+1}, \qquad a = 3 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = \frac{6x\,(2x+1)^2}{4x^2+1}.$$

En résumé, le graphe de f admet un point à tangente horizontal qui n'est pas un extremum si et seulement si $a \in \{-3\,,\,0\,,\,3\}$.

5. Pour quelle(s) valeur(s) de k, $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction suivante admet-elle un point de rebroussement en $x = 0$?

$$f(x) = \sqrt[3]{x^k\,(x-1)^2}\,.$$

Le graphe de f admet un point de rebroussement en $x_0 \in D_f$ si et seulement si

- f est continue en x_0,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$,
- f' change de signe en x_0.

$f(x) = \sqrt[3]{x^k\,(x-1)^2}$, $\quad D_f = \mathbb{R}$ car $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Calcul de la dérivée de f.

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left[\,x^k\,(x-1)^2\,\right]^{-2/3} \cdot \left[\,k\,x^{k-1}\,(x-1)^2 + 2\,x^k\,(x-1)\,\right],$$

$$f'(x) = \frac{x^{k-1}\,(x-1)\,[\,k\,(x-1)+2x\,]}{3\,\sqrt[3]{(x^k\,(x-1)^2)^2}} = \frac{x^{k-1}\,[\,(2+k)\,x-k\,]}{3\,\sqrt[3]{x^{2k}\,(x-1)}},$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{3k-3}}{x^{2k}}} \cdot \frac{(2+k)\,x-k}{3\,\sqrt[3]{x-1}} = \sqrt[3]{x^{k-3}} \cdot \frac{(2+k)\,x-k}{3\,\sqrt[3]{x-1}}\,.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+k)\,x-k}{3\,\sqrt[3]{x-1}} = \dfrac{k}{3} \neq 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \pm\infty$ ssi $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x^{k-3}} = \pm\infty$.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^{k-3}} = \pm\infty \quad\Leftrightarrow\quad k-3<0 \quad\Leftrightarrow\quad k<3 \quad\Leftrightarrow\quad k=1 \text{ ou } k=2\,.$$

- $k = 1$: $\quad f'(x) = \dfrac{3x-1}{3\,\sqrt[3]{x^2\,(x-1)}}$, $\quad f'$ ne change pas de signe en $x = 0$.

  Le graphe de f admet en $x = 0$ une tangente verticale, mais pas de point de rebroussement.

- $k = 2$: $\quad f'(x) = \dfrac{4x-2}{3\,\sqrt[3]{x\,(x-1)}}$, $\quad f'$ change de signe en $x = 0$.

  Le graphe de f admet en $x = 0$ un point de rebroussement.

Le graphe de f admet en $x = 0$ un point de rebroussement ssi $k = 2$.

6. Etudier les branches infinie du graphe de f défini par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - 2x$.

On détermine la limite de f aux "points frontières" de son domaine de définition :

$$D_f =]-\infty\,,\,-1] \cup [\,0\,,\,+\infty[\,.$$

Or $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

Il faut donc encore étudier $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- Lorsque $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\,|x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\,\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[-x\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} + 2\right] = +\infty$$

On cherche une éventuelle asymptote oblique d'équation $y = m\,x + h$:

$\circ$ $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} + 2\right] = -3$

$\circ$ $h = \lim\limits_{x\to-\infty} [\,f(x) - m\,x\,] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x} + x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^2+x) - x^2}{\sqrt{x^2+x} - x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right]} = -\frac{1}{2}\,.$$

Le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -3x - \frac{1}{2}$ lorsque $x \to -\infty$.

- Lorsque $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\,|x|\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\,\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2\right] = -\infty\,.$$

On cherche une éventuelle asymptote oblique d'équation $y = m\,x + h$:

$\circ$ $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{1+\tfrac{1}{x}} - 2\right] = -1$

$\circ$ $h = \lim\limits_{x\to+\infty} [\,f(x) - m\,x\,] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2+x) - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right]} = \frac{1}{2}\,.$$

Le graphe de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.

7. Les deux énoncés ci-dessous sont faux. Le but est de le démontrer en présentant un contre-exemple, c'est-à-dire un exemple ne vérifiant pas l'affirmation énoncée.

a) Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.
On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D_f$ et f est dérivable sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

b) Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.
On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D_f$ et f est dérivable sur $]x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta[$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0.

On rappelle le théorème vu au cours : Soit f une fonction continue en x_0 et dérivable sur un voisinage épointé de x_0. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Le but de l'exercice est de comprendre que la réciproque n'est pas forcément vraie (a)) et que le théorème est faux si la fonction n'est pas continue en x_0 (b)).

a) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

On a $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas. Pourtant f est dérivable en $x = 0$ puisque $f'(0) = 0$ (en calculant le rapport de Newton).

b) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

On a que $f'(x) = 1$ pour tout $x \neq 0$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1$, mais f n'est dérivable en 0 car pas même continue.

Cet exercice nous permet de conclure le résultat suivant : si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe alors soit f est dérivable en x_0, soit f est discontinue en x_0.