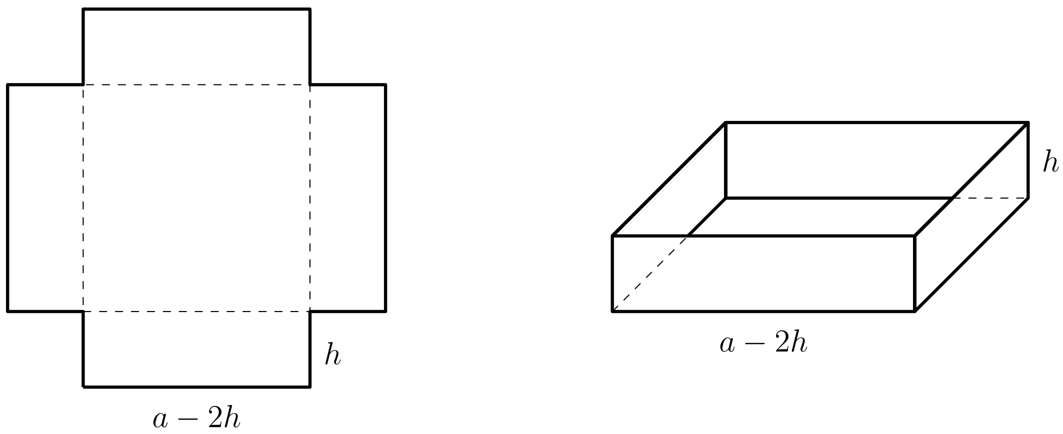
Corrigé 13

1. A l'aide d'une feuille de carton carrée de côté a, on construit une boîte rectangulaire ouverte en découpant des carrés sur les angles et en pliant les rebords du domaine ainsi obtenu.

Comment faut-il couper la feuille pour que le volume de la boîte soit maximum ?

Figure d'étude.



Expression du volume V de la boîte en fonction de la variable h :

$$V(h) = h\,(a-2h)^2\,,$$

avec $h>0$ et tel que $a-2h>0$, d'où : $h \in \,]\,0\,,\,\frac{a}{2}\,[\,$.

Etude du signe de la dérivée de V par rapport à h sur l'intervalle $]\,0\,,\,\frac{a}{2}\,[$:

$V'(h) = (a-2h)^2 + h\,[\,2\,(a-2h)\,(-2)\,] = (a-2h)\,[\,(a-2h)-4h\,] = (a-2h)\,(a-6h)\,.$

On peut ordonner les deux zéros de $V'(h)$ car a est positif : $\frac{a}{6} < \frac{a}{2}$,

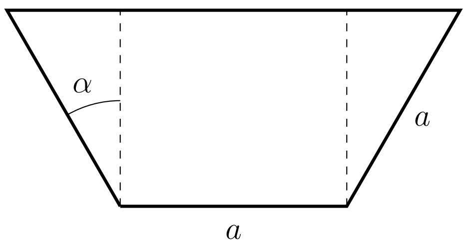
h	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$
$V'(h)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0

La fonction $V(h)$ est croissante à gauche de $\frac{a}{6}$ et décroissante à droite. Le volume V de la boîte est maximum lorsque $h=\frac{a}{6}$.

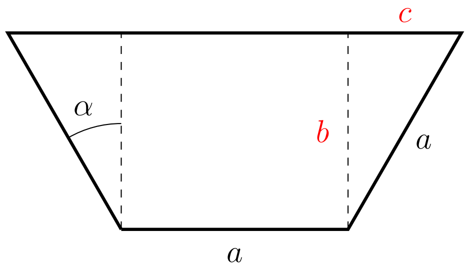
2. On considère le trapèze isocèle décrit ci-contre et défini par les grandeurs $a > 0$ et $\alpha \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$.

La valeur de a est fixe, mais α est variable.

Pour quelle valeur de α l'aire du trapèze est-elle maximale ?



- Expression de l'aire A du trapèze en fonction de la variable α



L'aire A du trapèze vaut

$$A = a \cdot b + b \cdot c\,, \quad \text{avec} \quad b = a \cdot \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad c = a \cdot \sin(\alpha)\,,$$

$$A(\alpha) \;=\; a^2 \cdot \cos(\alpha) + a^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \;=\; a^2 \left[\cos(\alpha) + \tfrac{1}{2}\,\sin(2\alpha)\,\right]$$

- Extremum de la fonction $A(\alpha)$

On recherche les changements de signe de la dérivée de A par rapport à α sur $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$:

$$A'(\alpha) \;=\; a^2 \left[\cos(\alpha) + \tfrac{1}{2}\,\sin(2\alpha)\,\right]' \;=\; a^2\,[-\sin(\alpha) + \cos(2\alpha)\,]\,.$$

La fonction $A'(\alpha)$ est continue. Si elle change de signe sur l'intervalle $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[$, c'est en passant par 0 :

$$A'(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha) = \cos(2\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} - \alpha = \pm 2\alpha + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}\,.$$

La fonction dérivée $A'(\alpha)$ s'annule en $\alpha = \frac{\pi}{6}$ en passant des positifs $(A'(0) = a^2)$ aux négatifs $(A'(\frac{\pi}{2}) = -a^2)$.

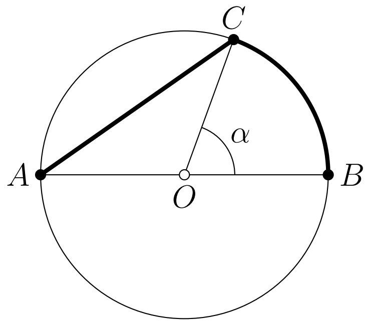
La fonction $A(\alpha)$ est donc croissante à gauche de $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et décroissante à droite.

L'aire A du trapèze est maximale lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

3. Une personne située en A, au bord d'un bassin circulaire de rayon R, veut rejoindre le point B diamétralement opposé.

Pour ce faire, elle nage en ligne droite jusqu'au point C, puis court le long du bassin jusqu'au point B.

Sachant que sa vitesse dans l'eau est de $v_e = 2$ m/s et que sa vitesse sur le sol est de $v_s = 4$ m/s, déterminer la stratégie qui minimise son temps de parcours.



On repère le point C à l'aide de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$, $\alpha \in [\,0\,,\,\pi\,]$ et on cherche à déterminer le temps de parcours t en fonction de α.

Pour cela, on distingue le temps t_e passé à nager dans l'eau et le temps t_s passé à courir sur le sol :

$$t = t_e + t_s\,.$$

- $\circ$ $v_e = \dfrac{AC}{t_e} \quad\Leftrightarrow\quad t_e = \dfrac{AC}{v_e}\,, \qquad$ avec $\qquad \dfrac{AC}{2} = R\,\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = R\,\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$

$$t_e = \frac{2R\,\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{v_e}\,.$$

- $\circ$ $v_s = \dfrac{(BC)}{t_s} \quad\Leftrightarrow\quad t_s = \dfrac{(BC)}{v_s}\,,\quad$ avec $\quad (BC) = \alpha\cdot R\,. \quad t_s = \dfrac{\alpha\cdot R}{v_s}\,.$

$$t = t_e + t_s = \frac{2R\,\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{v_e} + \frac{\alpha\cdot R}{v_s} = R\,\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha\cdot R}{4} = \frac{R}{4}\left[\,4\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + \alpha\,\right].$$

Recherche des extrema de $t(\alpha)$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$:

$$t'(\alpha) = \frac{R}{4}\left[\,-2\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + 1\,\right], \qquad t'(\alpha) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{\pi}{3}\,.$$

α	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$t'(\alpha)$		$+$	0	$-$	

- $\alpha = \frac{\pi}{3}$ correspond au temps maximum : $t\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{R}{4}\left[\,2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\,\right] \approx 1,12\cdot R\,.$
- Le temps minimum est donc atteint en $\alpha = 0$ ou en $\alpha = \pi$. On compare ces deux valeurs :

  $$t(0) = R \qquad \text{et} \qquad t(\pi) = \frac{\pi}{4}\cdot R\,, \qquad \text{on a donc} \qquad t(\pi) < t(0)\,.$$

  La stratégie qui minimise le temps de parcours consiste donc à rester au sec et à courir le long du bassin jusqu'au point B.

4. Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

a) $a(x) = x + \sqrt{1-x}$,

b) $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$,

c) $c(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$,

d) $d(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}$,

---

a) $a(x) = x + \sqrt{1-x}\,,\qquad D_a = \,]-\infty\,,\,1\,]\,,\qquad a$ est continue sur D_a.

$$a'(x) \;=\; 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \;=\; \frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}} \;=\; \frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}\,\left(2\sqrt{1-x}+1\right)}\,.$$

$D_{a'} = \,]-\infty\,,\,1\,[\,.$

- Borne de D_a.

  En $x=1$ la fonction a est définie, mais n'est pas dérivable.

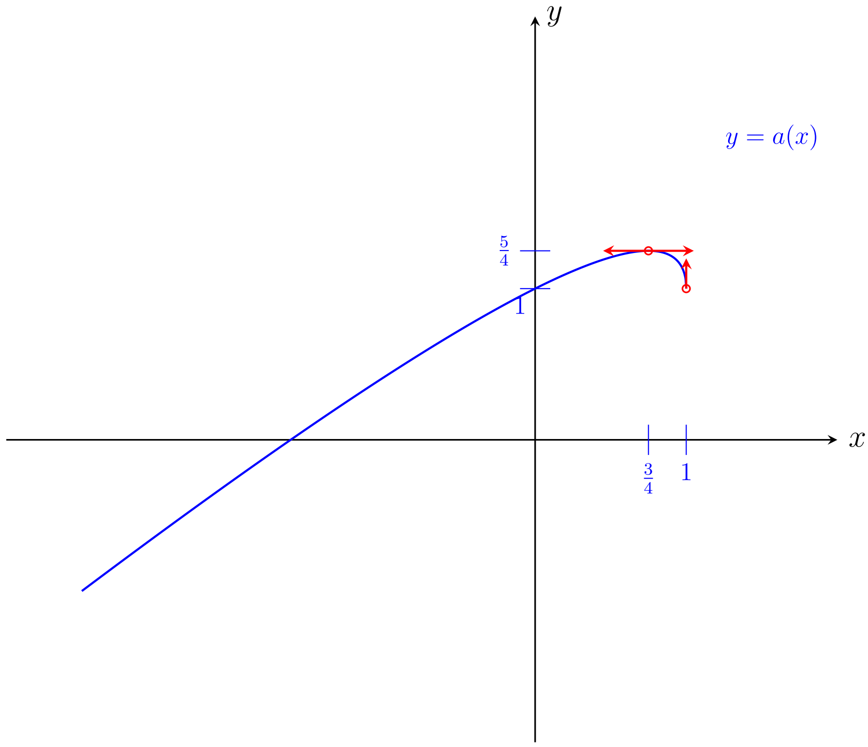
  Or $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} a'(x) = -\infty\,.$

  Donc le graphe de a admet en $x=1$ un minimum à demi-tangente verticale.

- Point du graphe de a à tangente horizontale.

  $a'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3}{4} \quad$ et $\quad \operatorname{sgn} a'(x) = \operatorname{sgn}(3-4x) \quad \forall\, x \in D_{a'}\,.$

  Donc le graphe de a admet en $x = \frac{3}{4}$ un maximum à tangente horizontale.



b) $b(x)=\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$, $\qquad D_b=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\quad b$ est continue sur D_b.

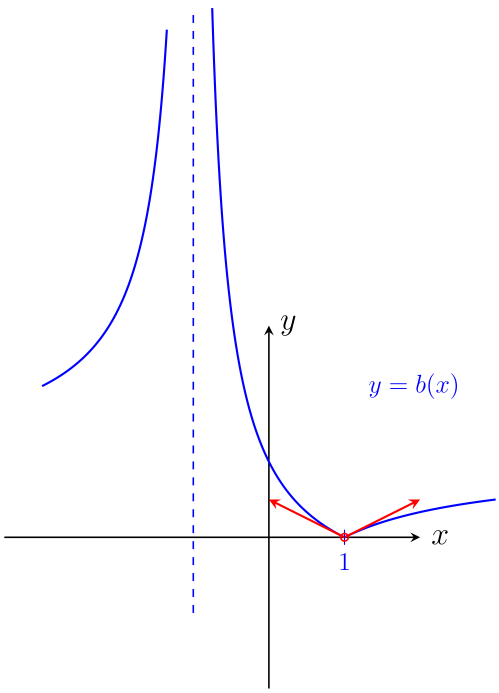
$$b(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x+1} & \text{si } x\in\,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,[\,1\,,\,+\infty\,[\\ \frac{1-x}{x+1} & \text{si } x\in\,]-1\,,\,1\,[\end{cases}$$

$$b'(x)=\begin{cases}\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x\in\,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\\ -\frac{2}{(x+1)^2} & \text{si } x\in\,]-1\,,\,1\,[\end{cases}\qquad D_{b'}=\mathbb{R}\setminus\{-1\,,\,1\}.$$

On en déduit le signe de $b'(x)$:

x		-1		1	
$b'(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$-\frac{1}{2}\ \Vert\ \frac{1}{2}$	$+$

$x=-1$ n'est pas l'abscisse d'un extremum de b car $-1\notin D_b$.
Le graphe de b admet en $x=1$ un minimum qui est un point anguleux dont les pentes des deux demi-tangentes à gauche et à droite valent $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.



$c(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$, $\qquad D_c=\mathbb{R}$, $\quad c$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$c'(x)\;=\;\frac{2}{3}\,x^{-1/3}-\frac{1}{3}\,x^{-2/3}\;=\;\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\;=\;\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{3\sqrt[3]{x^2}},\qquad D_{c'}\;=\;\mathbb{R}^*.$$

c) • En $x=0$ la fonction c est définie mais n'est pas dérivable.

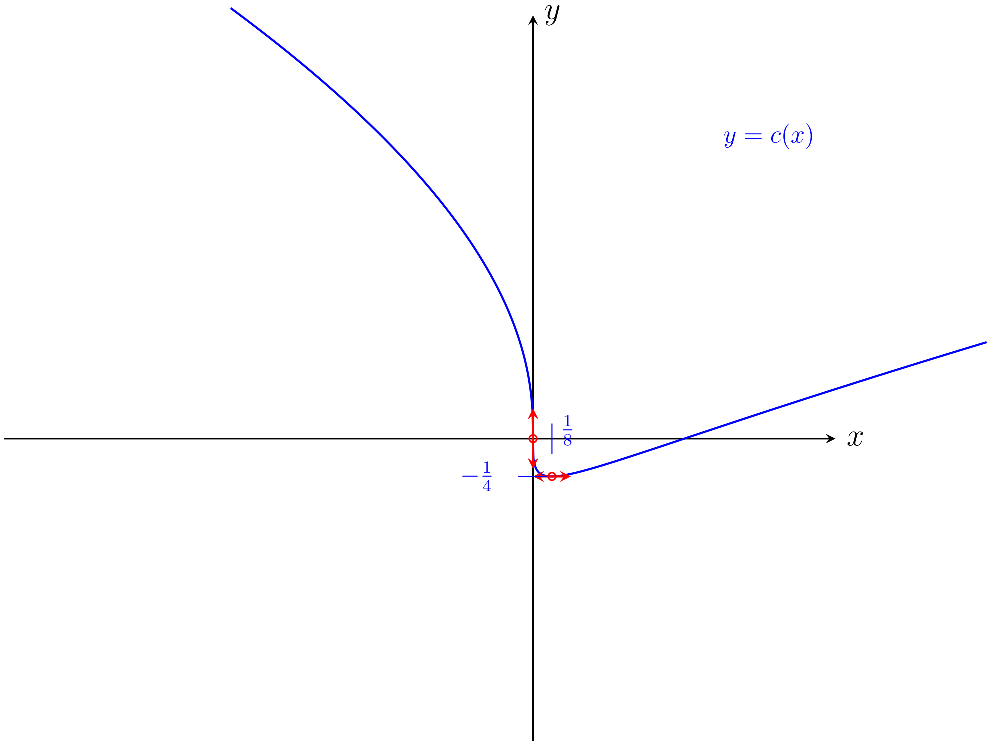
$\lim\limits_{x\to 0}c'(x)=-\infty$; le graphe de d admet en $x=0$ une tangente verticale, mais pas d'extremum.

- Point du graphe à tangente horizontale.

  $c'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt[3]{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{8}\,,$

  et $c'(x)$ change de signe en passant des négatifs aux positifs.

  Le graphe de c admet en $x = \frac{1}{8}$ un minimum à tangente horizontale.



d) $d(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}\,, \qquad D_d = \mathbb{R}\,, \quad d$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$d'(x) \;=\; \frac{3x^2 - 12x + 9}{3\,\sqrt[3]{(x^3 - 6x^2 + 9x)^2}} \;=\; \frac{(x-3)\,(x-1)}{\sqrt[3]{x^2\,(x-3)^4}} \;=\; \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2\,(x-3)}}\,,$$

$D_{d'} \;=\; \mathbb{R}^* \setminus \{3\}\,.$

- En $x = 0$ la fonction d est définie mais n'est pas dérivable.

  $\lim\limits_{x\to 0} d'(x) = +\infty$; le graphe de d admet en $x = 0$ une tangente verticale, mais pas d'extremum.

- En $x = 3$ la fonction d est définie mais n'est pas dérivable.

  $\lim\limits_{x\to 3^-} d'(x) = -\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to 3^+} d'(x) = +\infty\,.$

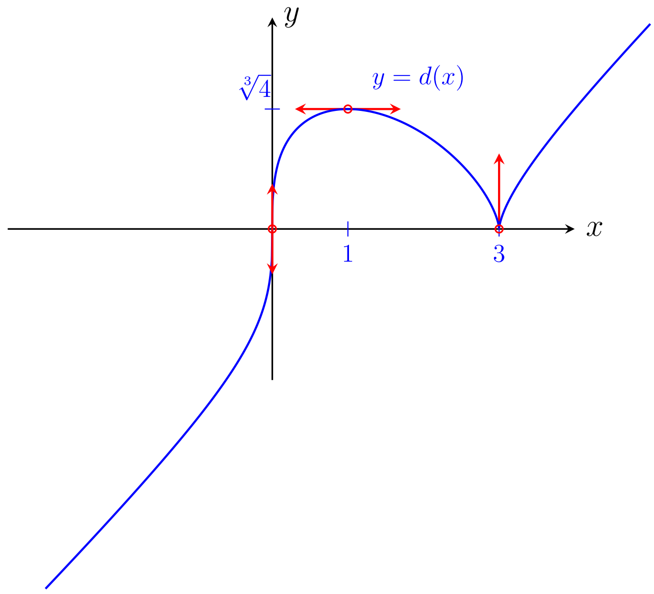
  Le graphe de d admet en $x = 3$ un minimum qui est un point de rebroussement (deux demi-tangentes verticales).

- Point du graphe à tangente horizontale.

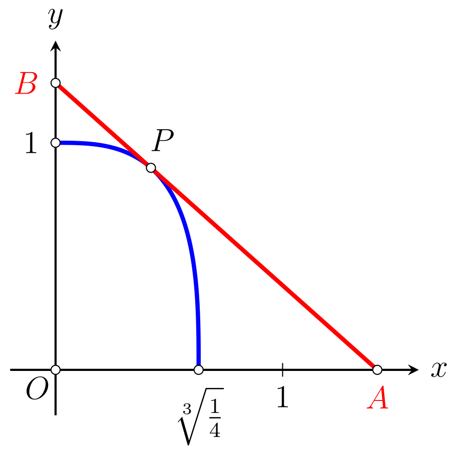
  $d'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1\,,$

et $d'(x)$ change de signe en passant des positifs aux négatifs.

Le graphe de d admet en $x = 1$ un maximum à tangente horizontale.



5. Trouver sur la courbe d'équation $4x^3 + y^3 = 1$ le point P du premier quadrant tel que l'aire du triangle déterminé par la tangente à la courbe en P et les axes de coordonnées soit minimum.



Soit Γ l'arc de courbe défini par

$$4\,x^3 + y^3 = 1 \quad \text{avec} \quad x \geq 0\,,\ y \geq 0\,.$$

$P \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad 4\,x_P^3 + y_P^3 = 1\,, \quad 0 \leq x_P \leq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\,.$

Equation de la tangente t à Γ en P :

$$t:\ y - y_P = m\,(x - x_P) \quad \text{avec} \quad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P\,.$$

Pente m : $\quad y = \sqrt[3]{1 - 4x^3} \ \Rightarrow\ y' = -\dfrac{4x^2}{\sqrt[3]{(1-4x^3)^2}} \ \Rightarrow\ m = -\dfrac{4\,x_P^2}{y_P^2}\,.$

Equation de la tangente t à Γ en P : $\qquad t:\ y - y_P = -\dfrac{4\,x_P^2}{y_P^2}\,(x - x_P)\,.$

Coordonnées du point A : $\quad A\,(x_A\,,\,0) \in t \quad \Leftrightarrow \quad 0 - y_P \ = \ -\dfrac{4\,x_P^2}{y_P^2}\,(x_A - x_P)$

$$\Leftrightarrow \quad x_A \ = \ \frac{y_P^3}{4\,x_P^2} + x_P \ = \ \frac{y_P^3 + 4\,x_P^3}{4\,x_P^2} \ = \ \frac{1}{4\,x_P^2}\,, \qquad x_P \neq 0\,.$$

Coordonnées du point B : $\quad B\,(0\,,\,y_B) \in t \quad \Leftrightarrow \quad y_B - y_P \ = \ -\dfrac{4\,x_P^2}{y_P^2}\,(0 - x_P)$

$$\Leftrightarrow \quad y_B \ = \ \frac{4\,x_P^3}{y_P^2} + y_P \ = \ \frac{4\,x_P^3 + y_P^3}{y_P^2} \ = \ \frac{1}{y_P^2}\,, \qquad y_P \neq 0\,.$$

Aire $\mathcal{A}$ du triangle OAB : $\qquad \mathcal{A} \ = \ \dfrac{1}{2}\,x_A \cdot y_B \ = \ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{4\,x_P^2}\cdot\dfrac{1}{y_P^2} \ = \ \dfrac{1}{8\,x_P^2\,y_P^2}\,.$

Expression de $\mathcal{A}$ en fonction de $x_P = x$: $\quad \mathcal{A}(x) = \dfrac{1}{8\,x^2\,(1-4\,x^3)^{2/3}}\,, \quad 0 < x < \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\,.$

Recherche du minimum de $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $\left]\,0\,,\,\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\,\right[$:

$$\mathcal{A}'(x) = -\frac{1}{8}\cdot\frac{\left(x^2\,(1-4\,x^3)^{2/3}\right)'}{\left(x^2\,(1-4\,x^3)^{2/3}\right)^2} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{2x\,(1-4\,x^3)^{2/3} + x^2\cdot\frac{2}{3}\,(1-4\,x^3)^{-1/3}\cdot(-12x^2)}{x^4\,(1-4\,x^3)^{4/3}}$$

$$\mathcal{A}'(x) = -\frac{1}{8}\cdot\frac{2x\,(1-4\,x^3) - 8x^4}{x^4\,(1-4\,x^3)^{5/3}} = \frac{8x^3 - 1}{4\,x^3\,(1-4\,x^3)^{5/3}}\,.$$

$\mathcal{A}'(x)$ s'annule en $x = \frac{1}{2} \in \left]\,0\,,\,\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\,\right[$ et change de signe en passant des négatifs aux positifs.

$\mathcal{A}(x)$ est donc minimum en $x = \frac{1}{2}\,.\qquad x_P = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_P = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,, \qquad P\left(\frac{1}{2}\,,\,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right).$