NOTIONS FONDAMENTALES
Arithmétique, algèbre et trigonométrie

Table des matières

1. Nombres

Nombres entiers

Définition
L'ensemble des **nombres entiers naturels** (ou nombres naturels) est : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** (ou nombres entiers) est : $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$.
Un **nombre premier** est un nombre entier naturel qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

(Voir formulaire GypAd p.3)

Remarques :
- L'astérisque * est utilisé pour priver $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ du zéro : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; ...\}$ et $\mathbb{Z}^* = \{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...\}$
- On peut utiliser l' indice $-$ pour ne considérer que les entiers négatifs : $\mathbb{Z}_- = \{...; -3; -2; -1; 0\}$
- Il existe une infinité de nombres premiers : $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...$
- Les nombres premiers sont les "atomes" des nombres entiers naturels car chaque nombre entier naturel supérieur à 1 se décompose de manière unique en un produit de nombres premiers. On appelle cela la **décomposition en facteurs premiers**.

Exemple :
Décomposer le nombre 1040 en facteurs premiers.

Exercice 1.1
Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers.

a) 204 b) 342 c) 335

Nombres rationnels et nombres réels

Définition
Les nombres pouvant être exprimés comme un **rapport entre deux nombres entiers** sont appelés **nombres rationnels** et leur ensemble s'écrit : $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$.
Les nombres pouvant être exprimés par un **code décimal** sont appelés **nombres réels** et leur ensemble s'écrit $\mathbb{R}$.
Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés **nombres irrationnels**.

Remarques :

- Pour illustrer l'extension progressive des ensembles de nombres, tels des "poupées russes", on peut les schématiser à l'aide du diagramme suivant :

- La meilleure manière de représenter les nombres réels, qui sont ceux que nous utiliserons dans le cadre de ce cours, et de les faire correspondre aux points situés sur un axe gradué, appelé **axe des réels**[1] :

- L'ensemble $\mathbb{R}$ est **ordonné** : entre deux nombres réels quelconques $a \neq b$, il y en a toujours un plus grand que l'autre (soit $a < b$, soit $a > b$). Le plus grand des deux nombres se trouve toujours à droite sur l'axe des réels. *Exemple* : $-3 < -2$.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est **dense** : entre deux nombres réels quelconques $a \neq b$, aussi proches soient-ils, il y en a toujours une **infinité** d'autres.
- La **valeur absolue** d'un nombre réel x, notée $|x|$, est égale à la **distance (toujours positive)**, sur l'axe des réels, entre x et 0. *Exemples* : $|-4.21| = 4.21$, $|13| = 13$, $|-\frac{3}{7}| = \frac{3}{7}$, etc.
- Les nombres rationnels ($\mathbb{Q}$) peuvent tous s'exprimer avec une **fraction** ou avec un **développement décimal**. Leur développement décimal est soit **limité**, soit **illimité et périodique**. *Exemples* : $\frac{7}{2} = 3.5$, $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ ou $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.
- Les nombres irrationnels ont un code décimal **illimité et non-périodique**. *Exemples* : $\sqrt{2} = 1.414213...$, $\sqrt{3} = 1.732050...$, $\pi = 3.141592...$, $\phi = 1.618033...$(nombre d'or) ou $e = 2,718281...$(nombre d'Euler).
- L'ensemble des **réels positifs** est noté $\mathbb{R}_+$, celui des **réels négatifs** $\mathbb{R}_-$ et celui des **réels non nuls** $\mathbb{R}^*$.

1. Il existe cependant un ensemble plus grand contenant $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ des **nombres complexes**, mais ces nombres, qui ont deux dimensions, ne peuvent pas être représentés sur l'axe des réels.

Exemples :

1. Trouver le développement décimal du nombre $\frac{12}{11}$

2. Exprimer le nombre 1.098 sous la forme d'une fraction irréductible.

3. Exprimer le nombre $1.\overline{23}$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 1.2
Trouver le développement décimal des nombres suivants (sans calculatrice).

a) $\frac{21}{8}$ b) $\frac{10}{6}$ c) $\frac{65}{26}$

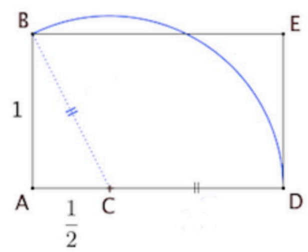
Exercice 1.3
Exprimer les nombres suivants sous la forme d'une fraction irréductible (sans calculatrice).

a) 6.25 b) $1.\overline{331}$ c) $0.\overline{9}$

Exercice 1.4
Les égyptiens de l'antiquité utilisaient la fraction $\frac{22}{7}$ comme approximation du nombre π.

a) Convertir cette fraction en nombre décimal (sans calculatrice).
b) A l'aide de votre calculatrice, calculer le pourcentage d'erreur d'approximation des égyptiens.

Exercice 1.5
NOMBRE D'OR - 1ÈRE PARTIE
La figure ci-contre montre comment construire un "rectangle d'or" à la règle et au compas. Le fameux nombre d'or Φ (nombre irrationnel) correspond alors à la longueur AD. A l'aide du théorème de Pythagore, montrer que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Opérations sur les nombres

Les quatre opérations définies sur les nombres réels sont l'addition ($+$), la soustraction ($-$), la multiplication ($\cdot$) et la division ($:$).

Addition
Les nombres que l'on additionne sont les *termes* et le résultat obtenu est leur *somme*.

- L'addition est *commutative* : $a + b = b + a$.
- L'addition est *associative* : $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- L'addition possède 0 comme *élément neutre* : $a + 0 = a$.
- Tout nombre réel a possède un nombre *opposé* $-a$ tel que leur somme donne 0 : $a + (-a) = 0$.

Soustraction
Les nombres que l'on soustrait sont les *termes* et le résultat obtenu est leur *différence*.
La soustraction de deux nombres revient à additionner au premier l'opposé du deuxième :

$$a - b = a + (-b)$$

ATTENTION : La soustraction n'est pas commutative :

Multiplication
Les nombres que l'on multiplie sont les *facteurs* et le résultat obtenu est leur *produit*.

- La multiplication est *commutative* : $a \cdot b = b \cdot a$.
- La multiplication est *associative* : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- La multiplication est *distributive* par rapport à l'addition :
  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

  Ceci peut s'illuster géométriquement en considérant le produit comme une surface :

- La multiplication possède 1 comme *élément neutre* : $a \cdot 1 = a$.
- Tout nombre réel $a \neq 0$ possède un nombre *inverse* $\frac{1}{a}$ tel que leur produit donne 1 : $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Division
Les nombre que l'on divise est le *dividende*, le nombre par lequel on divise est le *diviseur* et le résultat obtenu est leur *quotient*.
La division de deux nombres revient à multiplier le premier par l'inverse du deuxième :

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

ATTENTION : La division n'est pas commutative :

Règle des signes
La *règle des signes* découle de la définition de la division à partir de la multiplication ainsi que de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

MULTIPLICATION
$+ \cdot + = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$- \cdot - = +$

Division

$+ : + = +$

$+ : - = -$

$- : + = -$

$- : - = +$

Priorités des opérations
Les propriétés des différentes opérations impliquent que celles-ci s'effectuent dans un ordre bien précis. Le seul moyen de changer cet ordre, c'est d'utiliser des parenthèses. Les opérations s'effectuent donc dans l'ordre suivant :

1) les opérations indiquées entre parenthèses,
2) les puissances et les racines,
3) les multiplications et les divisions,
4) les additions et les soustractions.

A noter que les racines et les barres de fraction contiennent des parenthèses implicites...

Exemple : $\dfrac{3(\sqrt{8+1}-2)-5^2}{-(3+4)} - \frac{1}{2} =$

Exercice 1.6
Calculer les expressions suivantes **sans calculatrice** :

a) $\dfrac{-7^2}{6+3\cdot 5}$

b) $[(-5)^2-30](4-3^2+\sqrt{100-19})\cdot\frac{7}{30}$

c) $\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{7}\right)$

d) $\dfrac{\frac{4}{5}+\frac{7}{3}}{2-\frac{4}{9}}$

Exercice 1.7
Nombre d'or - 2ème partie
Nous avons vu que le nombre d'or est un nombre **irrationnel** qui vaut $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033989....$
Mais on peut aussi **approximer** Φ avec des nombres **rationnels** en utilisant la formule :

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+...}}}}}$$

Cette formule est "infinie" par le fait que l'on peut toujours "aller plus loin" afin d'être plus précis dans l'approximation de Φ !

1. Calculer (sans calculatrice) la fraction : $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}$
2. Convertir cette fraction en code décimal (sans calculatrice).
3. A l'aide de votre calculatrice, calculer le pourcentage d'erreur de cette approximation.

2. Langage des ensembles

Notions générales & notations

Définition
Une collection d'objets est un **ensemble** lorsque l'on peut dire avec certitude si un objet donné appartient ou non à l'ensemble. Ces objets sont les **éléments** de l'ensemble.
On écrit $x \in E$ pour signifier qu'un élément x appartient à l'ensemble E, et $x \notin E$, s'il n'appartient pas à E.
Si tous les éléments d'un ensemble A appartiennent aussi à un autre ensemble B, on dit que A est un **sous-ensemble** de B, ou que A est **inclus** dans B, et on écrit $A \subset B$.
L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé **ensemble vide** et s'écrit $\varnothing$.

Remarques :

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont les grands ensembles de nombres desquels on tirent des sous-ensembles, comme $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{R}^*$, l'*ensemble des nombres premiers* ou l'*ensemble des nombres irrationnels*, etc.
- Nous avons vu précédemment que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Bien que ce sont les ensembles de nombres qui nous intéressent ici, la définition ci-dessus peut s'appliquer à toutes sortes d'ensembles. Par exemple, en géométrie, $P \in d$ signifie que le *point* P appartient à la *droite* d, qui est un ensemble constitué d'une infinité de points. En probabilités, les résultats d'une expérience aléatoire sont les éléments d'ensembles appelés *évenements.* Aussi, l'*ensemble des lettres de l'alphabet* ou l'*ensemble des cantons suisses* répondent à cette définiton, alors que l'*ensemble des plus belles villes du monde* n'est pas un ensemble, car sa composition n'est pas certaine et sera toujours sujette à discussion...
- On utilise les accolades { et } pour décrire un ensemble, soit par **énumération**, c'est-à-dire en énumérant ses éléments, soit en donnant une **condition d'appartenance**.
  Exemples :
  $A = \{0; 1; 2; 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$,
  $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; ...\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est impair}\}$.

Exercice 2.1
Vrai ou faux ?

a) $-8 \in \mathbb{Q}$
b) $\frac{11}{2} \in \mathbb{N}$
c) $\frac{14}{7} \notin \mathbb{Z}$
d) $\frac{\pi}{3.14} \notin \mathbb{N}$
e) $\frac{178}{3} \in \mathbb{R}^*$
f) $\frac{-49}{7} \in \mathbb{N}$
g) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$
h) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_-$
i) $\varnothing \subset \mathbb{N}$

Exercice 2.2
Décrire les ensembles suivants par énumération :
a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -7 \leq x \leq 3\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est premier et } 30 \leq x \leq 40\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$

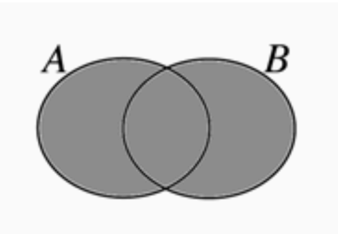
Exercice 2.3
Décrire les ensembles suivants avec une condition d'appartenance :
a) $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; ...\}$
b) $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
c) $C = \{2; 3; 5; 7\}$
d) $D = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

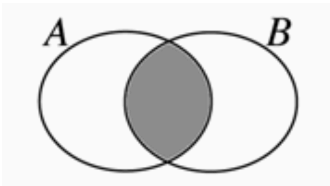
Opérations sur les ensembles

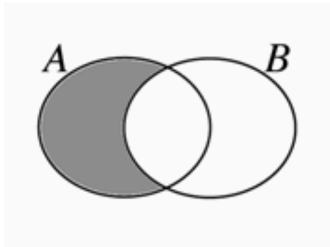
Définition
Soit deux ensembles A et B, sous-ensembles d'un ensemble de référence U (univers).
L' **union** de A et B est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à A **ou** à B (ou aux deux).
On note cet ensemble $A \cup B$ et on dit A *union* B.
Formellement : $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

L'**intersection** de A et B est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à A **et** à B.
On note cet ensemble $A \cap B$ et on dit A *inter* B.
Formellement : $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
A et B sont dits **disjoints** si leur intersection est vide ($A \cap B = \varnothing$).

La **difference** de A et B (respectivement de B et A) est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à A, **et pas** à B (resp. à B **et pas** à A) .
On note cet ensemble $A \setminus B$ (resp. $B \setminus A$) et on dit A *moins* B (resp. B *moins* A).
Formellement : $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ (resp. $B \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A \text{ et } x \in B\}$).
(Voir formulaire GypAd p.2)







Exemples :

a) Soit $A = \{1; 2; 3; 7\}$ et $B = \{1; 3; 5; 6; 8\}$. Déterminer les ensembles :

$A \cup B =$	$A \setminus B =$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$
$A \cap B =$	$B \setminus A =$	$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) =$

b) Dessiner un *diagramme de Venn* avec trois ensembles A, B et C non-disjoints, puis hachurer les ensembles $D = A \cap (B \cup C)$ et $E = (A \cap B) \cup C$.

Exercice 2.4
Soit $A = \{0; 6; 7; 8\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ et $C = \{1; 6; 8; 9\}$.
Décrire par énumération les ensembles suivants :

a) $A \cap B$
b) $A \cup C$
c) $A \setminus C$
d) $A \cap B \cap C$
e) $(A \cap B) \cup C$
f) $A \cap (B \cup C)$
g) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
h) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
i) $(C \setminus B) \setminus A$
j) $C \setminus (B \setminus A)$
k) $\mathbb{N} \setminus (A \cup B \cup C)$

Intervalles réels

Un **intervalle réel**, c'est un ensemble formé de tous les **nombres réels** compris entre deux nombres donnés appelés **bornes** de l'intervalle.

Exemples :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2.5 \leq x \leq 3.7\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < \sqrt{2}\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{2}{3}\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \pi\}$

Pour noter un intervalle, on utilise une **nouvelle notation**, plus compacte, à l'aide de **crochets**.

Définition
Soit a et b deux nombres réels, avec $a < b$.
Les **intervalles réels** de bornes (ou d'extrémités) a et b sont définis somme suit :

Intervalle ouvert	$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Intervalle fermé	$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Intervalles semi-ouverts	$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
	$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Intervalles généralisés	$[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
	$]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
	$]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
	$]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

(Voir formulaire GypAd p.3)

Exercice 2.5
Ecrire les ensembles suivants sous forme d'intervalles :

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 7\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3} < x < \frac{13}{7}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{8}{9}\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \Phi\}$

e) $\mathbb{R}_+$

f) $\mathbb{R}^*_-$

Les intervalles peuvent aussi être **composés** à l'aide des opérations de réunion, d'intersection ou de différence.

Exemple :
Soit les intervalles $A =]-\infty; 3[$, $B = [-2; 5]$ et $C =]7; +\infty[$.
Ecrire les ensembles suivants sous forme d'intervalles :

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \setminus B$
d) $B \cap C$
e) $B \cup C$
f) $\mathbb{R} \setminus C$

Exercice 2.6
Ecrire si possible les ensembles suivants à l'aide d'un seul intervalle, ou, si ce n'est pas possible, à l'aide d'une union d'intervalles qui ne se coupent pas :

a) $]-4; 7[\ \cup \ [1; 9]$
b) $]-4; 7[\ \cap \ [1; 9]$
c) $]-4; 7[\ \setminus \ [1; 9]$
d) $[1; 9] \ \setminus \ ]-4; 7[$
e) $]-4; +\infty[\ \cup \ [1; 9]$
f) $]-4; +\infty[\ \cap \ [1; 9]$
g) $]-4; +\infty[\ \setminus \ [1; 9]$
h) $[1; 9] \ \setminus \ ]-4; +\infty[$
i) $]-4; 7[\ \cup \ [8; 9]$
j) $]-4; 7[\ \cap \ [8; 9]$
k) $]-4; 7[\ \setminus \ [8; 9]$
l) $[8; 9] \ \setminus \ ]-4; 7[$

3. Puissances entières & racines

Puissances à exposants entiers

Pour signifier que ”2 **multiplié** 3 **fois par lui-même** est égal à 8”, on dit que ”2 **puissance** 3 égale 8” et on écrit :

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

Dans cet exemple, 2 est la **base**, 3 est l'**exposant** et 8 est la **puissance**.
Pour parler plus justement, on devrait plutôt dire que ”8 est la **troisième puissance** de 2” ou que ”2 **à l'exposant** 3 égale 8”.

Définition
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **puissance n-ième de a** le produit de n facteurs de a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n fois}$$

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant** de la puissance.

De plus, si $a \neq 0$, on définit la **n-ième puissance négative** de a de la manière suivante.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n fois}}$$

Enfin, pour la cohérence des calculs, on doit aussi définir que pour toutes les bases $a \in \mathbb{R}$:

$$a^0 = 1$$

Exemples

a) $3^3 =$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 =$

c) $2^{-3} =$

d) $1000^0 =$

e) $(-2)^{-2} =$

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$

Exercice 3.1
Calculer (sans calculatrice) les expressions suivantes.

a) 7^{-2} b) 10^{-5} c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ e) $\frac{1}{13^{-2}}$

Des définitions ci-dessus découlent des **règles de calculs** (ou **propriétés**) des puissances.

Propriétés
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

(Voir formulaire GypAd p.5)

ATTENTION : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$! Par exemple, $(2+3)^2 = 25 \neq 13 = 2^2 + 3^2$.

Exemples
Simplifier les expressions suivantes (sans calculatrice) :

a) $13^3 \cdot 13^4 =$

b) $(7^2)^3 =$

c) $\dfrac{2^7}{2} =$

d) $(2\pi)^2 =$

e) $\dfrac{28^3}{7^3} =$

f) $(2^{-3})^{-4} =$

g) $2^{-3} \cdot 5^{-3} =$

h) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} =$

Exercice 3.2
Simplifier les expressions suivantes (sans calculatrice) :

a) $(2^2)^3 \cdot 2^{-(2^3)}$

b) $2^4 \cdot 3^4$

c) $\dfrac{7^{11}}{7^{12}}$

d) $(a^{-2})^{-3}$

e) $\dfrac{7^n}{7^{n-1}}$

f) $\dfrac{25^3}{2^6}$

g) $-\dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{-2}{3}\right)^2$

h) $\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right)^7$

Notation scientifique

Définition
Ecrire un nombre $x \in \mathbb{R}$ en **notation scientifique** signifie l'exprimer sous la forme :

$$x = a \cdot 10^n,$$

avec $1 \leq |a| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exemples
Ecrire les nombres suivants en notation scientifique (en arrondissant à 4 chiffres significatifs).

a) Distance Terre-Lune : $384'404'000$ m=

b) Masse d'un atome d'hydrogène : $0.000'000'000'000'000'000'000'001'7$ g=

c) $\dfrac{1.23 \cdot 10^{15}}{7.89 \cdot 10^{-17}} =$

d) $\left(3.72 \cdot 10^{-7}\right)^3 =$

Exercice 3.3
Soit $x = 0.000'000'007'8$, $y = 3'700'500'000$ et $z = 0.000'000'1$.
Ecrire les nombres suivants en notation scientifique (en arrondissant à 4 chiffres significatifs).

a) x b) y c) z d) xyz e) $\dfrac{x^2y^5}{z^{-7}}$

Exercice 3.4
Sachant que la lumière se déplace à la vitesse de $300'000$ kilomètres par seconde, calculer (en mètres) la longueur d'une année-lumière (AL), c'est-à-dire la distance parcourue par la lumière en une année (de 365 jours) et exprimer cette distance en notation scientifique.

Racines

Définition
Soit a un nombre **positif** et n un monbre **entier non nul** ($a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$). On appelle **racine n-ième de a**, et on note $\sqrt[n]{a}$, le nombre r **positif** tel que $r^n = a$. En d'autres termes :

$$r = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad r \geq 0 \text{ et } r^n = a$$

Si a est **strictement négatif** et n **impair** ($a \in \mathbb{R}_-^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, impair), la racine n-ième de a est le nombre **strictement négatif** r tel que $r^n = a$.

Si a est **strictement négatif** et n **pair**, la racine n-ième de a n'existe pas,

Le nombre a s'appelle le **radicande**, n s'appelle l'**indice** et r s'appelle le **radical**.

Exemples

a) $\sqrt{121} =$

b) $\sqrt[3]{8} =$

c) $\sqrt[3]{-8} =$

d) $\sqrt[4]{16} =$

e) $\sqrt[4]{-16} =$

f) $\sqrt[1]{7} =$

Remarques

- Dans le cas où $n = 1$, on a pour tous les $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt[1]{a} = a$.
- Dans le cas où $n = 2$, la racine 2-ième s'appelle la **racine carrée** et se note $\sqrt{a}$ au lieu $\sqrt[2]{a}$.
- Dans le cas où $n = 3$, la racine 3-ième s'appelle la **racine cubique**.
- Dans le cas où $a > 0$ et n est pair, bien que $\sqrt[n]{a}$ est unique, l'équation $x^n = a$ a deux solutions, $x_1 = \sqrt[n]{a}$ et $x_2 = \sqrt[n]{a}$.

Des définitions ci-dessus découlent des **règles de calculs** (ou **propriétés**) des racines.

Propriétés
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$.

1. $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, si $b \neq 0$
5. $\sqrt[n]{a^n} = a$

(Voir formulaire GypAd p.5)

Remarques

- **ATTENTION :** $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$! Par exemple, $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \neq 5 = \sqrt{4} + \sqrt{9}$.

- Les $3^{\text{ième}}$ et $5^{\text{ième}}$ propriétés sont souvent utilisées pour **simplifier** une racine de la manière suivante : $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$.
  Dans le cas d'une racine carrée, il s'agit d'**extraire** de la racine un carré parfait.

- Si le dénominateur d'une fraction est une racine, on peut la "déraciner" en amplifiant la fraction par cette racine...

Exemples

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$

b) $\sqrt{12} =$

c) $\sqrt{75} - \sqrt{3} =$

d) $\sqrt[3]{48} =$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} =$

f) $\sqrt{\dfrac{9}{2}} =$

g) $\dfrac{6+\sqrt{18}}{3} =$

Exercice 3.5

Simplifier les expressions suivantes (sans calculatrice).

a) $\sqrt{72}$

b) $\sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{490} - \sqrt{40}$

d) $\sqrt[3]{54}$

e) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$

h) $\sqrt{\dfrac{5}{16}}$

i) $\sqrt{\dfrac{6}{125}}$

j) $\dfrac{2-\sqrt{12}}{2}$

k) $\dfrac{5+\sqrt{50}}{10}$

l) $\sqrt{\sqrt{60+\sqrt{16}}+1}$

4. Puissances rationnelles & logarithmes

Puissances à exposants rationnels

Les propriétés (règles de calculs) des racines ne sont pas toujours faciles à manier pour simplifier une expression.

Par exemple : $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} =$

En fait, "derrière chaque racine se cache une puissance", car avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a les équivalences :

$\sqrt[n]{a} = a^x$

Ceci nous permet alors de *transformer les racines en puissances* selon la définition suivante.

Définition
Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{Z}$. Alors on peut écrire : $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

Reformuler les expressions suivantes à l'aide d'une racine.

a) $3^{\frac{1}{2}} =$

b) $2^{-\frac{2}{3}} =$

c) $5^{0.75} =$

d) $5^{-1.23} =$

Reformuler les expressions suivantes à l'aide d'une puissance.

a) $\sqrt{7}$

b) $\sqrt{2^5}$

c) $\sqrt{3^{-2}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2^5}}$

Reprenons l'exemple introductif en utilisant les exposants rationnels :

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} =$

Exercice 4.1
Reformuler les expressions suivantes à l'aide d'une racine.

a) $5^{\frac{1}{3}}$
b) $3^{\frac{3}{2}}$
c) $2^{0.25}$
d) $5^{-\frac{1}{2}}$
e) $5^{-\frac{3}{4}}$
f) $5^{-0.125}$

Exercice 4.2
Reformuler les expressions suivantes à l'aide d'une puissance.

a) $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{5^7}$
c) $\sqrt{2^{-3}}$
d) $\sqrt[3]{2^5}$
e) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3^2}}$
f) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{7}}$
g) $\sqrt{\dfrac{1}{\pi^2}}$

Puissances à exposants réels

Nous avons donné un sens aux puissances à exposants entiers positifs et négatifs, ainsi qu'aux puissances à exposants rationnels (fractions).
Pouvons-nous étendre les exposants des puissances à tous les nombres **réels** ?
Pour ce faire, il nous faut encore donner un sens aux puissances à exposants irrationnels...

$$3^{\sqrt{2}} = \ ?$$

Comme un nombre irrationnel x peut être approché de manière aussi précise que désirée par des nombres rationnels, on peut alors montrer que si les nombres rationnels x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... se rapprochent de x, alors les nombres a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, ..., a^{x_n}, ... vont se rapprocher d'un nombre irrationnel qui sera, par définition, a^x.

Exemple
L'utilisation de la calculatrice permet d'obtenir que $3^{\sqrt{2}} \cong 4.7288....$

Ce tableau illustre le *processus d'approximations successives* décrit ci-dessus :

x	1	1.4	1.41	1.414	1.4142	...	$\sqrt{2}$	...	1.4143	1.415	1.41	1.5	2
3^x	3	4.7	4.71	4.728	4.7287	...	4.7288...	...	4.7293	4.733	4.78	5.2	9

Logarithmes

Etant donnés une **base** a strictement positive et différente de 1 ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) et une **puissance** x strictement positive ($x \in \mathbb{R}_+^*$), il n'existe qu'un seul **exposant** y tel que $a^y = x$.
Ce nombre est appelé le **logarithme en base a de x** et se note $y = \log_a(x)$.
Le logarithme en base a de x est donc *"l'exposant auquel il faut élever la base a pour obtenir x"*.

Définition
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors le **logarithme en base a de x**, noté $\log_a(x)$ se définit par l'équivalence :

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x.$$

(Voir formulaire GypAd p.7)

Remarques

- Pour toutes les bases $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, nous avons $\log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$.
- Le logartihme en base 10 ($a = 10$), très utilisé, est appelé **logarithme décimal** et se note log au lieu de $\log_{10}$.
- Un autre logarithme particulier est celui dont la base est le **nombre d'Euler**[2] : $e = 2.71828...$. Ce nombre irrationnel est très important en mathématique et nous verrons plus loin dans ce cours comment le calculer. Le logarithme en base e est appelé **logarithme naturel** ou **logarithme népérien** (pour Néper[3]), et se note ln au lieu de $\log_e$.

Exemples
Calculer les expressions suivantes.

a) $\log_3(9) =$

b) $\log_2(16) =$

c) $\log_{11}(\sqrt{11}) =$

d) $\log(0,01) =$

e) $\ln(e^7) =$

f) $\log_2(\sqrt{8}) =$

Exercice 4.3
Calculer les expressions suivantes (sans calculatrice).

a) $\log_2(32)$
b) $\log_3(81)$
c) $\log_5(1)$
d) $\log_7(7)$
e) $\log_{13}(\sqrt{13})$
f) $\log_3(\sqrt[5]{3^2})$
g) $\log_4(\sqrt[7]{64})$
h) $\log_3(\frac{1}{9})$
i) $\log(0,001)$
j) $\ln(\frac{1}{e})$

2. Léonard Euler, mathématicien suisse (1707-1783)
3. John Néper, mathématicien britannique (1550-1617)

Changement de base
Certains logarithmes ne peuvent pas être calculés mentalement, et votre calculatrice ne permet que de calculer des logarithmes en base 10 (touche LOG) et en base e (touche LN). Cependant, tous les logarithmes peuvent être calculé en utilisant la **formule de changement de base**.

Définition
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

(Voir formulaire GypAd p.7)

Remarques

- Dans cette formule, le logarithme de base b est utilisé pour calculer celui de base a. Il faut donc choisir une base b.
- Si on choisit $b = 10$, la formule devient : $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$.
- Si on choisit $b = e$, la formule devient : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Exemples
Calculer les expressions suivantes (avec la calculatrice) et arrondir à 3 chiffres après la virgule.

a) $\log(50) =$

b) $\ln(10) =$

c) $\log_2(7) =$

d) $\log_3(100) =$

Exercice 4.4
Calculer les expressions suivantes (avec la calculatrice).

a) $\log(5)$
b) $\ln(7)$
c) $\log_2(20)$
d) $\log_5(2)$
e) $\log_3(\sqrt{20})$
f) $\log_7(-49)$

5. Calcul littéral

Polynômes

Définition
Une **expression littérale (ou algébrique)** est une écriture mathématique qui contient une ou plusieurs lettres.
Chaque lettre, appelée **variable**, représente un nombre.

Exemples :

1. $x + 3$
2. $x - 2 \cdot y$
3. $\frac{x^2}{3}$

Pour alléger l'écriture des expressions littérales, on peut supprimer le signe de la multiplication entre les nombres, les variables et les parenthèses, mais pas entre deux nombres...

Exemples :

1. $x - 2 \cdot y = x - 2y$
2. $x \cdot (x + 3) = x(x + 3)$
3. $7 \cdot 13 \neq 713$...

Définition
Un **monôme** est le produit d'un nombre par une puissance ($\in \mathbb{N}$) d'une ou plusieurs variables.
Un monôme est constitué d'une partie numérique appelé **coefficient** et d'une partie littérale.
Le **degré** d'un monôme est la somme des exposants de sa partie littérale.

Exemples :

1. $7x^2$ est un monôme à une seule variable de coefficient 7 et de degré 2.
2. x^3 est un monôme à une seule variable de coefficient 1 et de degré 3.
3. xy est un monôme à deux variables de coefficient 1 et de degré 2.
4. $-\frac{yx^2}{5}$ est un monôme à deux variables de coefficient $-\frac{1}{5}$ et de degré 3, qu'on préfère écrire $-\frac{1}{5}x^2y$.
5. 18 est un monôme de coefficient 18 et de degré 0. En effet $18 = 18 \cdot 1 = 18 \cdot x^0$.

Pour multiplier des monômes, on multiplie leurs coefficients entre eux et leurs parties littérales entre elles. [4]

Exemples :

1. $3x \cdot 4x^2 = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x^2 = 12x^3$
2. $-4x^3 \cdot \frac{1}{2}y \cdot 3 = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x^3 \cdot y = -6x^3y$

Définition
Des monômes sont dits **semblables** s'ils ont la même partie littérale.

Pour additionner (ou soustraire) des monômes semblables :

- on additionne (ou on soustrait) leurs coefficients ;
- on "conserve" leur partie littérale. [5]

Exemples :

1. $4x^2 + 7x^2 = (4 + 7)x^2 = 11x^2$

4. On utilise ainsi la **commutativité** de la multiplication.
5. On effectue en fait une **mise en évidence** de la partie littérale, concept qui sera défini par la suite.

2. $9xy - 15yx = 9xy - 15xy = (9-15)xy = -6xy$

Définition
Un **polynôme** est une somme de monômes non-semblables.
Les monômes qui composent le polynômes sont appelés les **termes** du polynômes.
Un polynôme à un seul terme est appelé **monôme**, à deux termes **binôme**, à trois termes **trinôme**.
Le **degré** d'un polynôme est le plus haut degré des termes qui le composent.

Exemples :

1. $x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ est un polynôme à quatre termes du 3ème degré.
2. $3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ est un trinôme du 2ème degré.
3. $2x - \sqrt{3} \cdot y$ est un binôme du 1er degré (à deux variables).
4. $-3x^2 + x - \sqrt{x}$ n'est pas un polynôme !
5. $\frac{1}{x} - 2x$ n'est pas un polynôme !

Un polynôme peut être le résultat d'un calcul algébrique dans lequel :

- il faut d'abord **développer**, c'est-à-dire effectuer les multiplications pour faire tomber les parenthèses ;
- puis il faut ensuite **réduire**, c'est-à-dire regrouper les termes semblables, autrement dit additionner (ou soustraire) les monômes semblables ;
- pour enfin **ordonner** le polynôme, c'est-à-dire écrire ses termes (ou monômes) dans l'ordre décroissant des degrés par rapport à une des variables.

Exemples :

1. $5x + 3y - 2(3x - y) =$

2. $(2-3x)(x-7) - 23x =$

3. $x(y - x^2) - (3x^2y + 2yx) =$

Exercice 5.1
Développer et réduire les expressions algébriques suivantes, puis ordonner le polynôme qui en résulte.

1. $xy + 17yx + 5xy - 1$
2. $(5x + 3y) - (7x + 3y)$
3. $(x^2 - 1)(x + 1)$
4. $(2x - 3z)(4x + 2z)$
5. $(6x^2 - 3x - 4)(5x - 3)$
6. $(2x + 1)(3x - 1)(5x + 12)$
7. $3x(x^2 - 1) - 4x^2(x + 2) - 3x + 4(x^2 - 1)$
8. $3[x^2 - (x + 4) - 3] + 2x^2[x^2 + (x - 2)] - 5$
9. $(-3x)^2 \cdot 2x - x^2 + x^2(x - 3)$
10. $(x^2 - y^2)(2x^3 - 4x^2y) - (y^2 - x^2)(4x^3 + 8x^2y)$
11. $[(x^2 + 1) - 3x(x + 2)][x - (x^2 + 1)]$

Identités remarquables

Une **identité** est une égalité qui est vérifiée pour toutes les valeurs possibles des variables.

Définition
Voici quelques **identités remarquables** :

- $-(a-b) = (b-a)$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(Voir formulaire GypAd p.5)

Ces égalités se démontrent par "développement - réduction" :

- $-(a-b) =$
- $(a+b)^2 =$
- $(a-b)^2 =$
- $(a+b)(a-b) =$

Une fois que la structure de l'identité est **remarquée** dans un calcul algébrique, avec a et b pouvant être n'importe quels monômes, cela permet de gagner du temps...

Exemples :

1. $(x+3)^2 =$
2. $(2y-x^2)^2 =$
3. $(\frac{x}{3}+2)(\frac{x}{3}-2) =$
4. $(3y-2x)(2x-3y) =$

Exercice 5.2
Développer les expressions algébriques suivantes à l'aide des identités remarquables.

1. $(2x+5)^2$
2. $(2x+5)(2x-5)$
3. $(6x-5)^2$
4. $(3x-2y)^2$
5. $(xy-1)^2$
6. $(-3x+4)(-3x-4)$
7. $(x^2+2y)^2$
8. $(a^2-b^2)^2$
9. $(5x^3+\sqrt{2})(5x^3-\sqrt{2})$
10. $(\sqrt{3}x-4)^2$
11. $[3(a-2b)]^2$
12. $[(x+y)(x-y)]^2$
13. $(\sqrt{2}x-\sqrt{6}y)(\sqrt{2}x+\sqrt{6}y)$
14. $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)^2$
15. $(\frac{1}{4}x-4y^2)^2$
16. $(\frac{1}{5}y-\frac{2}{3}x^2)(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{5}y)$

6. Factorisation - 1ère partie

Définition
Factoriser, c'est **transformer une somme** de monômes (un polynôme) en un **produit** de polynômes de degré inférieur, appelés **facteurs**. C'est le processus inverse du développement qui transforme un produit en une somme.
Dans le cadre de ce cours, la factorisation va principalement servir à **résoudre des équations**.

On va utiliser **cinq méthodes** de factorisation :
- la mise en évidence,
- les identités remarquables,
- la méthode des groupements,
- la méthode somme-produit,
- la méthode du delta.

Mise en évidence

Il s'agit de "sortir" du polynôme le plus grand dénominateur commun à tous ses termes, appelé **facteur commun**, pour le **mettre en évidence** devant une parenthèse de termes représentant le deuxième facteur.

Exemples :
1. $x^2 + 3x =$
2. $6x^2y - 9xy + 3xy^2 =$
3. $(2x-3)(x+1) - (x+1)(3x-5) =$
4. $(x-2)^2 + 3(2-x) =$

Exercice 6.1
Mettre en évidence le plus grand facteur commun.

1. $10x + 15y$
2. $xy + 4yz$
3. $8x^5 - 6x^2$
4. $3a^3b^4 - 12a^2b^3$
5. $6a^2bc^2 - 15abc^3$
6. $3ab(bc)^3 - ab(bc)^2$
7. $4x^ny^m + 2x^{n+2}y^{m+2}$
8. $(2a+3b)(2x+y) + (3a+5b)(2x+y)$
9. $2a(a-b) - (a-b)^2$
10. $(x-3)(x+1) - 2(x-3) + 2(x-3)^2$
11. $x(x-7) - 5(7-x)$
12. $(x-2y)(a-b) - (b-a)(2x+y)$
13. $a^2(x-1)(a+b) + a^3(1-x)$

Factorisation par identité remarquable

Il s'agit de "repérer" que le polynôme a une structure d'identité remarquable et de le factoriser en conséquence. Au préalable, une mise en évidence peut être nécessaire.

Exemples :

1. $9x^2 - 12xy^2 + 4y^4 =$
2. $2x^4 - 162 =$
3. $(x+1)^2 - (2x-3)^2 =$

Exercice 6.2
Factoriser les polynômes suivants à l'aide des identités remarquables.

1. $9x^2 - 12x + 4$
2. $16x^2 - 81$
3. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}$
4. $x^3 - 9x$
5. $(3x-1)^2 - (5x+7)^2$
6. $x^8 - 1$
7. $(x+1)^2 - (2x-1)^2$
8. $a^2x^6 - \frac{1}{25}$
9. $12ax^2 - 36axy + 27ay^2$
10. $-x^2 + 6x - 9$

Méthode des groupements

Lorsqu'un polynôme, après une éventuelle mise en évidence, ne peut pas être factorisé par identité remarquable, on essaye de factoriser plusieurs groupes de termes séparément, pour enfin mettre en évidence le facteur commun aux deux groupes...

Exemples :

1. $3x^3 + 6x^2 + 4x + 8 =$
2. $x^3 - x^2 - x + 1 =$
3. $x^2 - y^2 + x - y =$

Exercice 6.3
Factoriser les polynômes suivants avec la méthode des groupements.

1. $4x^3 + 4x^2 + 7x + 7$
2. $a^2 + ac + ab + bc$
3. $x^2(3x-1) - 3x + 1$
4. $20xy + 4y - 10x - 2$
5. $6x^2 + xy + 18xz + 3yz$
6. $xy - zy + xu - zu - xz + z^2$
7. $x^2 - y^2 + xa + ya$

7. Factorisation - 2ème partie

Méthode somme-produit

Cette méthode ne s'applique qu'aux polynômes du type :

$$x^2 + sx + p$$

où x représente la variable et s, p deux nombres entiers donnés (par exemple $x^2 + 7x + 10$).

Pour factoriser un tel polynôme, il suffit de trouver deux nombres α et β dont s est la somme et p est le produit. Le développement suivant nous le montre :

$$(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

L'idée est alors de chercher α et β parmi les diviseurs entiers de p.

Exemples :

1. $x^2 + 7x + 10 =$
2. $x^2 - 5x + 6 =$
3. $x^2 - x - 12 =$
4. $-2x^2 - 6x - 4 =$
5. $x^2 - x - 3 =$

Exercice 7.1
Factoriser les polynômes suivants avec la méthode somme-produit.

1. $x^2 + 9x + 14$
2. $x^2 - 7x + 12$
3. $x^2 - 6x + 5$
4. $x^2 - x - 6$
5. $x^2 + 2x - 24$
6. $x^2 - 7x + 6$
7. $x^2 - 6x + 9$
8. $x^2 - 7x - 18$
9. $-x^2 - 2x + 15$
10. $3x^2 - 12$

Méthode du delta

Cette méthode permet de factoriser tous les **trinômes du second degré** à une variable, c'est-à-dire tous les polynômes de la forme :

$$ax^2 + bx + c$$

où a, b, c sont trois coefficients donnés ($a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$).

Pour utiliser cette **méthode du delta**, appelée aussi **méthode du discriminant** [6], il faut d'abord calculer le **delta** (nom de la lettre grecque Δ) selon la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ensuite, **le signe du delta discrimine** entre trois cas possibles :

- si $\Delta < 0$, le polynôme ne se factorise pas,
- si $\Delta > 0$, il faut ensuite calculer x_1 et x_2 selon la formule

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

  puis factoriser le polynôme selon la formule

  $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$
- si $\Delta = 0$, les mêmes formules nous donnent

  $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad ax^2 + bx + c = a(x - \frac{-b}{2a})^2.$$

(Voir formulaire GypAd p.6)

En résumé :

$$\text{Si } b^2 - 4ac \geq 0, \quad \text{alors} \quad ax^2 + bx + c = a(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}).$$

Exemples :

1. $x^2 - x - 3 =$

2. $x^2 + 7x + 10 =$

3. $-2x^2 + 50 =$

6. qui sera démontrée dans le chapitre ”équations”...

4. $2x^2 + x + 1 =$

5. $x^2 + 3x =$

6. $3x^2 - 5x - 2 =$

7. $4x^2 - 12x + 9 =$

Exercice 7.2
Factoriser les trinômes du second degré suivants, en utilisant la méthode du delta si nécessaire..

1. $x^2 + 5x + 6$
2. $x^2 + 5x + 4$
3. $x^2 - 6x + 8$
4. $2x^2 - 2x - 24$
5. $2x^2 + 9x + 7$
6. $6x^2 + 15x + 6$
7. $27x^2 - 75x + 48$
8. $4x^2 + x - 5$
9. $11x^2 + 28x - 15$
10. $3x^2 - 1$
11. $x^2 + x + 4$
12. $x^2 + x - 4$

Exercice 7.3
Factoriser les polynômes suivants avec la méthode appropriée...

1. $16x^4 - 1$
2. $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$
3. $a^3 - a + 2a^2 - 2$
4. $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1)$
5. $a^2x + b^2z - a^2z - b^2x$
6. $2x^2 - 8x - 10$
7. $(b - a)x + (a - b)y - 2b + 2a$
8. $xy - 2x + 5y - 10$
9. $x^2 - 8x + 16 - 100y^2$
10. $36x^2 - 84x + 49$
11. $(2x - 5)(4x - 7) - 3(5 - 2x)$
12. $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{4}x^2y^4$
13. $2x^3 - 3x^2 + x$
14. $x^4 - 4$

8. Equations du 1er & 2ème degré

Définition
Une **équation** est une égalité entre deux expressions algébriques (les deux **membres** de l'équation) qui est vérifiée seulement pour certaines valeurs des variables, appelées **solutions**.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation signifie trouver toutes ses solutions réelles. [a]
Deux équations sont dites **équivalentes** si et seulement si elles ont les mêmes solutions.
Pour symboliser que deux équations sont équivalentes, on utilise le signe $\Leftrightarrow$.
La variable d'une équation, dont on cherche à déterminer la valeur, est aussi appelée l'**inconnue** de l'équation.

a. Une équation peut aussi avoir des solutions dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes, mais ceci dépasse le cadre de ce cours...

Nous allons dans ce chapitre uniquement nous occuper des équations **polynomiales à une seule variable**. Bien que certaines de ces équations peuvent se résoudre graphiquement ou "numériquement" (essais successifs de différentes valeurs possibles), nous allons ici les résoudre **algébriquement**, c'est-à-dire en **transformant l'équation de base en équations équivalentes**.

Pour ce faire, nous pouvons :
- permuter les deux membres de l'équation,
- factoriser ou développer un des membres de l'équation,
- additionner (ou soustraire) un monôme quelconque aux deux membres de l'équation,
- multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation par un nombre réel différent de 0.

ATTENTION : Ne pas multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation par un monôme littéral (qui contient la variable), car cela pourrait créer (ou supprimer) des solutions, l'équation en résultant ne serait alors pas équivalente !

Equations du 1er degré

Définition
Une **équation du 1er degré** est une équation équivalente à une équation de la forme

$$ax = b,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Son unique solution est alors $x = \frac{b}{a}$.

Exemples :
1. $2x - 4 = 7x + 8$

2. $\frac{1}{3}(x - 1 - \frac{2-x}{2}) = 1$

3. $x+1=x+2$

4. $(x+1)^2=x^2+2x+1$

Exercice 8.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $2x+1=0$
2. $-\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}=0$
3. $4x+1=4(x+1)-3$
4. $3(x+2)=3x-5$
5. $\frac{1}{2}(3x-1)-\frac{1}{4}(4-x)=0$
6. $\frac{5x-6}{5}-\frac{3x}{13}=\frac{x-4}{9}$
7. $\frac{1}{8}\left(\frac{x}{10}+\frac{1}{2}\right)=\frac{7x-30}{40}$
8. $\frac{3x+2}{5}-x-\frac{2x+5}{3}=3$
9. $\frac{2x+1}{3}=28-\frac{5x-2}{7}-\frac{3x+1}{4}$
10. $\frac{9(134-25x)}{40}+\frac{71}{10}=\frac{317}{8}-\frac{7x}{8}$

Equations du 2ème degré

Définition
Une **équation du 2ème degré** (ou **quadratique**) est une équation équivalente à une équation de la forme

$$ax^2+bx+c=0,$$

avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$.

Pour résoudre une équation du seond degré, la méthode du Δ fonctionne dans tous les cas :

Théorème :
Soit une équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$, et soit $\Delta=b^2-4ac$.
Alors,

- si $\Delta<0$, l'équation n'a aucune solution, $S=\varnothing$
- si $\Delta=0$, l'équation a une seule solution,
$$S=\{\tfrac{-b}{2a}\}$$
- si $\Delta>0$, l'équation a deux solutions,
$$S=\{\tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\}$$ [a]

(Voir formulaire GypAd p.6)

[a] La démonstration de ce théorème, dont la compréhension est facultative, se trouve en annexe.

Exemple :

$$6x^2=1-x$$

Bien que la méthode du delta permet de résoudre toutes les équations du second degré, certaines d'entre elles peuvent se résoudre plus rapidement :

- soit par factorisation avec une mise en évidence, une identité remarquable, ou avec la méthode somme-produit [7],
- soit en isolant le x^2 et en utilisant l'équivalence $x^2 = d \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{d}$.

Exemples :

1. $3x^2 = 4x$
2. $3x^2 + 15x = -12$
3. $-x^2 = -10x + 25$
4. $x^2 - 7 = 0$
5. $x^2 - x - 10 = 0$
6. $(x + 3)^2 = 4$

7. en factorisant le trinôme du 2ème degré en deux facteurs du 1er degré, il ne reste ensuite qu'à résoudre des équations du 1er degré !

Exercice 8.2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes **sans utiliser la méthode du delta**.

1. $x^2 - 3x = -2$
2. $2x^2 + 12x = -18$
3. $x^2 = 25$
4. $7x^2 - 14x = 0$
5. $9x^2 - 5 = 0$
6. $4 + 5x = -x^2$
7. $3x^2 = x$
8. $4x^2 + 9 = 12x$
9. $4x^2 = -16$
10. $-5x = 3x^2$
11. $(x+3)^2 = 9$
12. $-x^2 = -x$
13. $x^2 + 1 = 0$
14. $x(x+\sqrt{5}) = 2x$
15. $(2x-5)^2 = 11$
16. $x^2 - \sqrt{2} = 0$

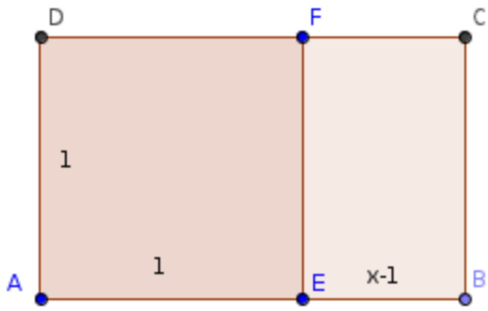
Exercice 8.3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en utilisant la méthode du delta si nécessaire.

1. $8x^2 - 3x - 1 = 0$
2. $49x^2 - 14x + 1 = 0$
3. $3x^2 - 2x + 2 = 0$
4. $5x^2 - x - 3 = 0$
5. $\sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$
6. $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
7. $\frac{1-8x}{2} - \frac{x^2-7}{4} + 2x = 0$
8. $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x^2+1}{3} = \frac{x^2-11}{6}$
9. $\frac{3x+1}{8} - \frac{x^2+5}{4} = \frac{55}{2}$
10. $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 0$

Exercice 8.4
Nombre d'or - 3ème partie
Nous avons précédemment comment construire un *rectangle d'or* à la règle et au compas.
Mais qu'est-ce qu'un rectangle d'or ?
C'est un rectangle dont le *rapport entre sa longueur et sa largeur* est tel que, si on retranche un carré, on obtient un autre rectangle *de même rapport*. Ce rapport, c'est le *nombre d'or* Φ !

Sur figure ci-contre, la longueur du grand rectangle vaut $AB = DC = x$ et sa largeur vaut $AC = BD = 1$.

1. Montrer que si ce rectangle est un rectangle d'or, cela implique que $x = \frac{1}{x-1}$.
2. Exprimer cette équation sous la forme d'une équation du 2ème degré.
3. Résoudre cette équation dont la solution positive est le nombre d'or Φ.



Exercice 8.5
Pour chacune des équations suivantes, trouver les valeurs de m telles que l'équation ait une seule solution, et trouver cette solution.

1. $2x^2 + mx + 2 = 0$
2. $x^2 + mx - x + 4 = 0$
3. $-\frac{1}{3}x^2 + (m+1)x + m = 0$

9. Equations du 3ème degré et plus

Pour les 3ème et 4ème degré, il existe des méthodes de résolution relativement complexes dont l'utilisation dépasse le cadre de cours. Nous allons considérer ici uniquement des équations polinomiales se résolvant par les méthodes de **factorisation** vues au chapitre précédent, ou des équations qui se transforment en équations du 2ème degré par **changement de variable**.

Résolution par factorisation

Nous avons vu comment résoudre par factorisation une équation du 2ème degré. Ce même principe peut se généraliser aux équations de degré supérieur. Si on cherche à trouver les valeurs de x telles qu'un polynôme $P(x)$ soit égal à zéro, et que ce polynôme peut être décomposé sous la forme :

$$A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$$

alors les solutions de l'équation sont les valeurs de x qui annulent chacun des facteurs :

$$P(x) = 0 \iff A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) = 0 \iff A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0 \text{ ou } C(x) = 0$$

Exemples :

1. $x^3 = 3x^2 - 2x$

2. $x^3 + x^2 - 9x = 9$

3. $(3x^2 + 4x - 4)(x^2 + 1) = 0$

4. $(x^2 + 3x)(x - 3) = 6 - 2x$

Exercice 9.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^3 + x^2 = 4x + 4$
2. $x^3 = x^2$
3. $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
4. $(2x - 7)(x - 2)(3x + 8) = 0$
5. $x^4 - x^3 = 6x^2$
6. $4x^3 = 36x$
7. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
8. $(x + 1)(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 1)$
9. $(2 - x)(x^2 - 1) = 2 - x + 3x(x - 2)$
10. $(2x^2 + 3x + 1)^2 - (2x^2 - 4x - 1)^2 = 0$

Résolution par changement de variable

Définition
Une **équation bicarrée** est une équation de la forme

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Ces équations peuvent se résoudre en effectuant le changement de variable $x^2 = y$. On obtient alors l'équation du 2ème degré $ay^2 + by + c = 0$ qu'on peut résoudre pour y. Enfin, il ne faut pas oublier de changer à nouveau de variable en posant $y = x^2$!

Exemple

$$x^4 + x^2 - 12 = 0$$

Exercice 9.2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
2. $25x^4 - 40x^2 + 16 = 0$
3. $12x^4 - 31x^2 + 9 = 0$
4. $4x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
5. $3x^4 - 6x^2 + 3 = 0$
6. $x^4 = 13x^2 + 6$
7. $9x^4 + 6x^2 = x^2 + 4$
8. $3x^4 - 6x^2 + 3 = -2x^4 - 19x^2 - 3$

10. Systèmes d'équations

Définition
Un **système d'équations** est la conjonction de plusieurs équations contenant 2, 3, ..., n inconnues.
Une **solution** du système doit satisfaire conjointement toutes ses équations.
Un **système** $n \times m$ est un système de n équations à m inconnues.
Un système **linéaire** est un système dont toutes les équations sont du 1er degré.

Exemples :

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 26x + 2y = 34 \end{cases}$ Système 2×2 **linéaire**, de 2 équations (du 1er degré) à 2 inconnues.
2. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ Système 2×2 **non-linéaire**, de 2 équations (du 1er et 2ème degré) à 2 inconnues.
3. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ -4y + 7z = 7 \\ 2x + 8z = 0 \end{cases}$ Système 3×3 **linéaire**, de 3 équations (du 1er degré) à 3 inconnues.

Systèmes 2×2 linéaires

Pour résoudre ces systèmes, on peut choisir entre deux méthodes :
- la méthode d'**addition** (ou de **combinaison linéaire**),
- la méthode de **substitution**.

Bien que, pour les systèmes linéaires, on privilégie en général l'utilisation de la méthode d'addition, il peut être préférable dans certains cas d'utiliser la méthode de substitution...

Méthode d'addition

Exemples
- $\begin{cases} 2x = -3y + 5 \\ -3x + 5y - 7 = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 3 \end{cases}$

Exercice 10.1
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode d'additon.

1. $\begin{cases} 2x + 7y = -8 \\ 6x - 3y = 24 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 8y = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$

Méthode de substitution

Exemples

- $\begin{cases} 2x = -3y + 5 \\ -3x + 5y - 7 = 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$

Exercice 10.2
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de substitution.

1. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 7y = 3 \\ 4y + 5x = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2(x + y) = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Exercice 10.3
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants par la méthode de votre choix.

1. $\begin{cases} 3x - 2y = x + 4 \\ -2 + y = -5x \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + 4y = -2x - 1 \\ -6x - 8y = 2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 3x + 5y - 8 = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 5x = y \\ 3x - y = 10 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x - y = x + y \\ 5y - 2(x - 1) = 0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5} \\ 3x + \frac{y}{2} = 4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{3} = 1 \\ \frac{x-3}{3} - \frac{y+2}{2} = -2 \end{cases}$

Systèmes 2×2 non-linéaires

Comme la méthode d'addition ne fonctionne qu'avec des systèmes linéaires (dont chaque équation est du 1er degré), pour résoudre un système 2×2 **non-linéaire** (dont au moins une des deux équations n'est pas du 1er degré), il faut utiliser la méthode de **substitution**.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 10 \end{cases}$$

Exercice 10.4
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 53 \\ x + y = 9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -5x^2 + 3y^2 = 7 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 585 \\ x = 8y \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 297 \\ x - y = 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y = 13 \\ (x + 3)(y + 10) = 120 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8y - 6x - 1 = 0 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

Systèmes 3×3 linéaires

Bien que la méthode de substitution fonctionne, pour résoudre un système 3×3 linéaire, il est vivement conseillé, dans la plupart des cas, d'utiliser la méthode d'**addition** pour trouver la valeur de la 1ère inconnue. Ensuite, pour les deux autres inconnues, il est possible d'utiliser l'addition ou la substitution.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - 2 = z \\ 3x = 3y - z \end{cases}$$

Exercice 10.5
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ -x - y + 2z = 10 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} m + n + p = 14 \\ m - n + p = 6 \\ -m + n + p = -4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 14 \\ 9x - 5y - 3z = 2 \\ -2x + 3y + z = 8 \end{cases}$
4. $\begin{cases} m + n + p = 2 \\ 2m - 2n - p = 1 \\ 3m + n + p = 3 \end{cases}$

11. Inéquations

Définition
Une **inéquation** (à une seule variable) est une **inégalité** entre deux expressions algébriques qui est vérifiée seulement pour certaines valeurs de la variable, appelées **solutions** de l'inéquation.
Elle est constituée de deux membres séparés par l'un des **signes d'inégalités** : $>$, $<$, $\leq$ ou $\geq$.

En général, l'ensemble des solutions d'une inéquation n'est pas constitué de valeurs isolées (comme pour les équations) mais d'une infinité de solutions appartenant à un ou plusieurs **intervalles réels**.

Exemple :
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 3x \leq 4$ est l'intervalle $S = [-1; 4]$.

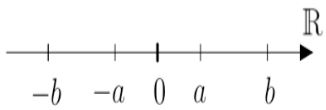
Inéquations du 1er degré

Définition
Une **inéquation du 1er degré** est une inéquation qui, après transformation, est équivalente à une inéquation de la forme

$$ax > b \quad \text{ou} \quad ax < b \quad \text{ou} \quad ax \geq b \quad \text{ou} \quad ax \leq b \quad ,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

La méthode de résolution d'une inéquation du 1er degré est identique à celle d'une équation du 1er degré. Cependant, il faut **changer le sens de l'inégalité** lorqu'on **multiplie** (ou **divise**) les deux membres par un **nombre négatif**.
Ceci s'explique par la **symétrie de la droite réelle** :



$$a < b \Longleftrightarrow -a > -b$$

Exemple :

$$\frac{13}{5} - \frac{x+3}{2} \geq 2$$

Exercice 11.1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $5 - 2x \geq 1$
2. $-4x - 5 < x + 5$
3. $-(7 - 2x) - 8 \geq 0$
4. $1 - 3x \leq \frac{1}{3}(8 + 2x)$
5. $2x - \frac{x-5}{3} > 4 - \frac{2-x}{2}$
6. $\frac{4-x}{2} - \frac{x-3}{5} \geq x - \frac{x+2}{2}$

Inéquations polynomiales de degré supérieur à 1

Pour résoudre une telle inéquation, il faut d'abord **factoriser** le polynôme, puis faire un **tableau de signes** du polynôme dans lequel on peut trouver les solutions. La marche à suivre, dont les trois premières étapes sont identiques à la résolution d'une équation polynomiale, est la suivante :

- mettre tous les termes du polynôme du même côté de l'inégalité,
- **factoriser** le polynôme avec les méthodes vues en cours,
- trouver les valeurs qui annulent chacun des facteurs, appelées **zéros** du polynômes,
- faire un **tableau de signes** du polynôme
- donner l'**ensemble S des solutions** de l'inéquation en interprétant la dernière ligne du tableau.

Exemples

1. $x^2 - x \geq 6$

2. $-2x^2 + 7x - 3 > 0$

3. $x^3 + 4x^2 \leq 0$

4. $-x^3 - 3x^2 + x + 3 < 0$

Exercice 11.2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x^2 - x \geq 12$
2. $x^2 - 9x \leq 0$
3. $-2x^2 + 7x + 15 < 0$
4. $x^2 + 4x \geq 0$
5. $x^2 + 4x < 1$
6. $x^3 - 2x^2 - 15x \leq 0$
7. $(x+2)^2(x-1) > 0$
8. $-x^3 + 4x < 0$
9. $x^3 + 2x^2 - x - 2 \geq 0$
10. $(x^2 - 4)(9 - x^2)(x^2 - x) < 0$
11. $x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$

A. Démonstration de la méthode du Delta

Pour démontrer ce théorème (voir page 30), nous allons transformer l'équation initiale $ax^2 + bx + c = 0$ afin de pouvoir effecuter une factorisation avec l'identité remarquable : $x^2 + 2dx + d^2 = (x + d)^2$. Commençons par un cas particulier, pour ensuite traiter du cas général.

Exemple d'introduction :

$2x^2 + 12x + 8 = 0$	Il faut d'abord "normaliser" l'équation en divisant par $\div 2$
$x^2 + 6x + 4 = 0$	Le trinôme n'est pas un carré, donc nous allons "compléter le carré"
$x^2 + 6x = -4$	dans ce cas $d = 3$ car $2d = 6$, alors on ajoute $d^2 = 9$
$x^2 + 6x + 9 = -4 + 9$	nous pouvons alors factoriser le membre de gauche avec l'identité $x^2 + 2dx + d^2 = (x + d)^2$
$(x + 3)^2 = 5$	deux solutions
$x + 3 = \pm\sqrt{5}$	
$x = -3 \pm \sqrt{5}$	$S = \{-3 - \sqrt{5}; -3 + \sqrt{5}\}$

Cas général :

$ax^2 + bx + c = 0$	$\div a$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	$-\frac{c}{a}$
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	dans ce cas $d = \frac{b}{2a}$ car $2d = \frac{b}{a}$, alors on ajoute $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	factoriser le membre de gauche avec l'identité $x^2 + 2d + d^2 = (x + d)^2$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	mettre le membre de droite au même dénominateur
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$	
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	pour simplifier l'écriture, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$	

Comme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ne peut pas être négatif, et que $4a^2 > 0$:

- si $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution,
- si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b}{2a}$,
- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

B. Solutions des exercices

Conseil pour la résolution des exercices :
Une fois que vous avez essayé de résoudre un exercice par vous-même, si vous ne comprenez pas comment trouver sa solution, n'hésitez pas à utiliser les applications **Photomath** et **WolframAlpha** (disponibles pour smartphone et tablette) qui vous donnent souvent la réponse et les étapes pour y arriver.

Exercice 1.1

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 17$ b) $2 \cdot 3^2 \cdot 19$ c) $5 \cdot 67$

Exercice 1.2

a) 2.625 b) $1.\overline{6}$ c) 2.5

Exercice 1.3

a) $\frac{25}{4}$ b) $\frac{1330}{999}$ c) 1

Exercice 1.4

a) $3.\overline{142857}$ b) $\sim 0.04\%$

Exercice 1.6

a) $-\frac{7}{3}$
b) $-\frac{14}{3}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{141}{70}$

Exercice 1.7

a) $\frac{13}{8}$ b) 1.625 c) $\sim 0.43\%$

Exercice 2.1

a) vrai
b) faux
c) faux
d) vrai
e) vrai
f) faux
g) vrai
h) faux
i) vrai

Exercice 2.2

a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
b) $B = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
c) $C = \{31; 37\}$
d) $D = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Exercice 2.3

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est pair}\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est premier et } x < 10\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 24\}$

Exercice 2.4

a) $\{6;7\}$
b) $\{0;1;6;7;8;9\}$
c) $\{0;7\}$
d) $\{6\}$
e) $\{1;6;7;8;9\}$
f) $\{6;7;8\}$
g) $\{1;6;7\}$
h) $\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$
i) $\{9\}$
j) $\{6;8;9\}$
k) $\{10;11;12;13;...\}$

Exercice 2.5

a) $[-2;7]$
b) $\left]\sqrt{3};\frac{13}{7}\right[$
c) $\left]-\infty;-\frac{8}{9}\right]$
d) $]\Phi;+\infty[$
e) $[0;+\infty[$
f) $]-\infty;0[$

Exercice 2.6

a) $]-4;9]$
b) $[1;7[$
c) $]-4;1[$
d) $[7;9]$
e) $]-4;+\infty[$
f) $[1;9]$
g) $]-4;1[\ \cup\ ]9;+\infty[$
h) $\varnothing$
i) $]-4;7[\ \cup\ [8;9]$
j) $\varnothing$
k) $]-4;7[$
l) $[8;9]$

Exercice 3.1

a) $\frac{1}{49}$
b) 0.00001
c) $\frac{27}{8}$
d) 4
e) 169

Exercice 3.2

a) $\frac{1}{2^2}$
b) 6^4
c) $\frac{1}{7}$
d) a^6
e) 7
f) $\left(\frac{5}{2}\right)^6$
g) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3$
h) $(-2)^7 = -2^7$

Exercice 3.3

a) $7.8 \cdot 10^{-9}$
b) $3.701 \cdot 10^{9}$
c) $1 \cdot 10^{-7}$
d) $2.887 \cdot 10^{-6}$
e) $\sim 4.222 \cdot 10^{-18}$

Exercice 3.4 $9.461 \cdot 10^{15}$ m

Exercice 3.5

a) $6\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $5\sqrt{10}$
d) $3\sqrt[3]{2}$
e) 5
f) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
h) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
i) $\frac{\sqrt{30}}{25}$
j) $1-\sqrt{3}$
k) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
l) 3

Exercice 4.1

a) $\sqrt[3]{5}$
b) $\sqrt{3^3}$
c) $\sqrt[4]{2}$
d) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
e) $\frac{1}{\sqrt[4]{5^3}}$
f) $\frac{1}{\sqrt[8]{5}}$

Exercice 4.2

a) $3^{\frac{1}{2}}$
b) $5^{\frac{7}{2}}$
c) $2^{-\frac{3}{2}}$
d) $2^{\frac{5}{3}}$
e) $3^{-\frac{2}{3}}$
f) $7^{-\frac{1}{7}}$
g) π^{-1}

Exercice 4.3

a) 5
b) 4
c) 0
d) 1
e) $\frac{1}{2}$
f) $\frac{2}{5}$
g) $\frac{3}{7}$
h) -2
i) -3
j) -1

Exercice 4.4

a) ~ 0.699
b) ~ 1.946
c) ~ 4.322
d) ~ 0.431
e) ~ 1.363
f) n'existe pas

Exercice 5.1

1. $23xy - 1$
2. $-2x$
3. $x^3 + x^2 - x - 1$
4. $8x^2 - 8xz - 6z^2$
5. $30x^3 - 33x^2 - 11x + 12$
6. $30x^3 + 77x^2 + 7x - 12$
7. $-x^3 - 4x^2 - 6x - 4$
8. $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 26$
9. $19x^3 - 4x^2$
10. $6x^5 + 4x^4y - 6x^3y^2 - 4x^2y^3$
11. $2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 7x - 1$

Exercice 5.2

1. $4x^2 + 20x + 25$
2. $4x^2 - 25$
3. $36x^2 - 60x + 25$
4. $9x^2 - 12xy + 4y^2$
5. $x^2y^2 - 2xy + 1$
6. $9x^2 - 16$
7. $x^4 + 4x^2y + 4y^2$
8. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$
9. $25x^6 - 2$
10. $3x^2 - 8\sqrt{3}x + 16$
11. $9a^2 - 36ab + 36b^2$
12. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
13. $2x^2 - 6y^2$
14. $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$
15. $\frac{1}{16}x^2 - 2xy^2 + 16y^4$
16. $-\frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{15}x^2y - \frac{1}{25}y^2$

Exercice 6.1

1. $5(2x+3y)$
2. $y(x+4z)$
3. $2x^2(4x^3-3)$
4. $3a^2b^3(ab-4)$
5. $3abc^2(2a-5c)$
6. $ab^3c^2(3bc-1)$
7. $2x^ny^m(2+x^2y^2)$
8. $(2x+y)(5a+8b)$
9. $(a-b)(a+b)$
10. $(x-3)(3x-7)$
11. $(x-7)(x+5)$
12. $(a-b)(3x-y)$
13. $a^2b(x-1)$

Exercice 6.2

1. $(3x-2)^2$
2. $(4x+9)(4x-9)$
3. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)$
4. $x(x+3)(x-3)$
5. $-4(x+4)(4x+3)$
6. $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$
7. $3x(2-x)$
8. $\left(ax^3+\frac{1}{5}\right)\left(ax^3-\frac{1}{5}\right)$
9. $3a(2x-3y)^2$
10. $-(x-3)^2$

Exercice 6.3

1. $(x+1)(4x^2+7)$
2. $(a+c)(a+b)$
3. $(3x-1)(x+1)(x-1)$
4. $2(5x+1)(2y-1)$
5. $(x+3z)(6x+y)$
6. $(x-z)(y+u-z)$
7. $(x+y)(x-y+a)$

Exercice 7.1

1. $(x+7)(x+2)$
2. $(x-4)(x-3)$
3. $(x-5)(x-1)$
4. $(x-3)(x+2)$
5. $(x+6)(x-4)$
6. $(x-6)(x-1)$
7. $(x-3)^2$
8. $(x-9)(x+2)$
9. $-(x+5)(x-3)$
10. $3(x-2)(x+2)$

Exercice 7.2

1. $(x+2)(x+3)$
2. $(x+1)(x+4)$
3. $(x-2)(x-4)$
4. $2(x-4)(x+3)$
5. $(x+1)(2x+7)$
6. $3(x+2)(2x+1)$
7. $3(x-1)(9x-16)$
8. $(4x+5)(x-1)$
9. $(x+3)(11x-5)$
10. $3(x-\frac{\sqrt{3}}{3})(x+\frac{\sqrt{3}}{3})$
11. x^2+x+4
12. $(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2})(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2})$

Exercice 7.3

1. $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$
2. $(2x+3)(x+2)(x-2)$
3. $(a+1)(a-1)(a+2)$
4. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$
5. $(x-z)(a+b)(a-b)$
6. $2(x-5)(x+1)$
7. $(b-a)(x-y-2)$
8. $(y-2)(x+5)$
9. $(x-4+10y)(x-4-10y)$
10. $(6x-7)^2$
11. $4(2x-5)(x-1)$
12. $(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}xy^2)^2$
13. $x(x-1)(2x-1)$
14. $(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

Exercice 8.1

1. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
2. $S = \left\{\frac{12}{25}\right\}$
3. $S = \mathbb{R}$
4. $S = \varnothing$
5. $S = \left\{\frac{6}{7}\right\}$
6. $S = \left\{\frac{442}{385}\right\}$
7. $S = \{5\}$
8. $S = \{-4\}$
9. $S = \{13\}$
10. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 8.2

1. $S = \{1; 2\}$
2. $S = \{-3\}$
3. $S = \{\pm 5\}$
4. $S = \{0; 2\}$
5. $S = \left\{\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right\}$
6. $S = \{-4; -1\}$
7. $S = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$
8. $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$
9. $S = \varnothing$
10. $S = \left\{0; -\frac{5}{3}\right\}$
11. $S = \{0; -6\}$
12. $S = \{0; 1\}$
13. $S = \varnothing$
14. $S = \left\{0; 2 - \sqrt{5}\right\}$
15. $S = \left\{\frac{5\pm\sqrt{11}}{2}\right\}$
16. $S = \left\{\pm\sqrt{\sqrt{2}}\right\}$

Exercice 8.3

1. $S = \left\{\frac{3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$
2. $S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$
3. $S = \varnothing$
4. $S = \left\{\frac{1\pm\sqrt{61}}{10}\right\}$
5. $S = \varnothing$
6. $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$
7. $S = \{-9; 1\}$
8. $S = \mathbb{R}$
9. $S = \varnothing$
10. $S = \left\{7 \pm 2\sqrt{5}\right\}$

Exercice 8.4

1. $\frac{\text{longueur grand rectangle}}{\text{largeur grand rectangle}} = \frac{\text{longueur petit rectangle}}{\text{largeur petit rectangle}}$
2. $x^2 - x - 1 = 0$
3. $S = \{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 8.5

1. si $m = 4 : S = \{-1\}$
   si $m = -4 : S = \{1\}$
2. si $m = 5 : S = \{-2\}$
   si $m = -3 : S = \{2\}$
3. si $m = -3 : S = \{-3\}$
   si $m = -\frac{1}{3} : S = \{1\}$

Exercice 9.1

1. $S = \{-2; 2; -1\}$
2. $S = \{0; 1\}$
3. $S = \{0; -1; 3\}$
4. $S = \left\{\frac{7}{2}; 2; -\frac{8}{3}\right\}$
5. $S = \{0; 3; -2\}$
6. $S = \{0; \pm 3\}$
7. $S = \{\pm 1; 2\}$
8. $S = \{-1; 1; 2\}$
9. $S = \left\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}; 2\right\}$
10. $S = \left\{-\frac{2}{7}; 0; \frac{1}{4}\right\}$

Exercice 9.2

1. $S = \{\pm 1; \pm 2\}$
2. $S = \left\{\pm \frac{2}{5}\sqrt{5}\right\}$
3. $S = \left\{\pm \frac{3}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$
4. $S = \varnothing$
5. $S = \{-1; 1\}$
6. $S = \{\sim \pm 3.66\}$
7. $S = \left\{\pm \frac{2}{3}\right\}$
8. $S = \varnothing$

Exercice 10.1

1. $S = \{(3; -2)\}$
2. $S = \left\{\left(\frac{1}{21}; \frac{2}{21}\right)\right\}$
3. $S = \varnothing$
4. $S = \left\{\left(x; \frac{7-2x}{3}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 10.2

1. $S = \{(2; 1)\}$
2. $S = \{(1; 0)\}$
3. $S = \left\{\left(x; \frac{x-3}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
4. $S = \varnothing$

Exercice 10.3

1. $S = \left\{\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)\right\}$
2. $S = \left\{\left(x; \frac{-1-3x}{4}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
3. $S = \left\{\left(x; \frac{-1+x}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
4. $S = \{(1; 1)\}$
5. $S = \{(-5; -25)\}$
6. $S = \{(-4; -2)\}$
7. $S = \{(1; 2)\}$
8. $S = \{(3; 2)\}$

Exercice 10.4

1. $S = \{(7; 2); (2; 7)\}$
2. $S = \left\{(2; -3); \left(-\frac{10}{17}; -\frac{29}{17}\right)\right\}$
3. $S = \{(24; 3); (-24; -3)\}$
4. $S = \left\{(13; 8); \left(-\frac{19}{3}; -\frac{34}{3}\right)\right\}$
5. $S = \{(3; 10); (17; -4)\}$
6. $S = \{(2; 1); (-2; -5)\}$

Exercice 10.5

1. $S = \left\{\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 5\right)\right\}$
2. $S = \{(9; 4; 1)\}$
3. $S = \{(2; 5; -3)\}$
4. $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 3\right)\right\}$

Exercice 11.1

1. $S = \left]-\infty; 2\right]$
2. $S = \left]-2; +\infty\right[$
3. $S = \left[\frac{15}{2}; +\infty\right[$
4. $S = \left[-\frac{5}{11}; +\infty\right[$
5. $S = \left]\frac{8}{7}; +\infty\right[$
6. $S = \left]-\infty; 3\right]$

Exercice 11.2

1. $S = \left]-\infty; -3\right] \bigcup \left[4; +\infty\right[$
2. $S = [0; 9]$
3. $S = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\bigcup \left]5; +\infty\right[$
4. $S = \left]-\infty; -4\right] \bigcup \left[0; +\infty\right[$
5. $S = \left]-2-\sqrt{5}; -2+\sqrt{5}\right[$
6. $S = \left]-\infty; -3\right] \bigcup [0; 5]$
7. $S = \left]1; +\infty\right[$
8. $S = \left]-2; 0\right[\bigcup \left]2; +\infty\right[$
9. $S = [-2; -1] \bigcup \left[1; +\infty\right[$
10. $S = \left]-\infty; -3\right[\bigcup \left]-2; 0\right[\bigcup \left]1; 2\right[\bigcup \left]3; +\infty\right[$
11. $S = \left]-\infty; -2\right] \bigcup [-1; 1] \bigcup \left[2; +\infty\right[$