

Inéquation non-linéaire

Résoudre $x^3 - 9m^2x \leq 0$;

$$x(x^2 - 9m^2) \leq 0; x(x - 3m)(x + 3m) \leq 0$$

↳ zéros: 0; 3m et -3m

⚠ Attention: le tableau de signe dépend de m!

Si $m < 0$:

x	3m		0	-3m	
x	-	-	0	+	+
(x - 3m)	-	0	+	+	+
(x + 3m)	-	-	-	0	+
$x(x - 3m)(x + 3m)$	-	0	+	0	+

↳ $S =]-\infty; 3m] \cup [0; -3m]$

Si $m = 0$:

$x^3 \leq 0$; $S =]-\infty; 0]$

Si $m > 0$:

x	-3m		0	3m	
x	-	-	0	+	+
(x + 3m)	-	0	+	+	+
(x - 3m)	-	-	-	0	+
$x(x - 3m)(x + 3m)$	-	0	+	0	+

↳ $S =]-\infty; -3m] \cup [0; +3m]$

Inéquation rationnelle

Résoudre $\frac{x-m}{x+m} \leq 0$

Les zéros des facteurs sont m et -m

⚠ Attention: le tableau de signe dépend de m!

Si $m < 0$:

x	m		-m	
$x - m$	-	0	+	+
$x + m$	-	-	0	+
$\frac{x-m}{x+m}$	+	0	-	+

$S = [m; -m[$

Si $m=0$:

$$\frac{x-0}{x+0} \leq 0 ; 1 \leq 0 ; S = \emptyset$$

Si $m > 0$:

x	$-m$		m	
$x+m$	-	0	+	+
$x-m$	-	-	0	+
$\frac{x-m}{x+m}$	+		-	+

$$S =]-m; m]$$

Un Dernier pour le plaisir

Résoudre $\frac{x^2+k}{x^2-4} \geq 0$

On commence par factoriser:

$$\frac{x^2+k}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Le problème est maintenant que la factorisabilité de x^2+k dépend du signe de k ! On fait déjà des cas:

Si $k > 0$: On a fini de factoriser.

Et aussi le facteur $x^2+k > 0$: il ne change rien au signe.

x	-2		2	
$x+2$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$\frac{x^2+k}{(x+2)(x-2)}$	+		-	

$$S =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

Si $k=0$:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Les zéros des facteurs sont 0; 2 et -2

x	$-2 \quad 0 \quad 2$					
x^2	+	+	0	+	+	
$x-2$	-	-	-	0	+	
$x+2$	-	0	+	+	+	
$\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$	+		-	0	-	

$$S =]-\infty; -2[\cup [0; 0] \cup]2; +\infty[$$

Si $K < 0$:

On peut factoriser plus:

$$\frac{x^2 + K}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - a^2}{(x-2)(x+2)} \quad \text{où } a = \sqrt{-K}$$

$$= \frac{(x-a)(x+a)}{(x-2)(x+2)}$$

Les zéros des facteurs sont $a, -a, 2$ et -2

Le tableau de signe dépend de si $a < 2$ ou $a = 2$ ou $a > 2$!

Si $a < 2$

x	$-2 \quad -a \quad a \quad 2$					
$(x-a)$	-	-	-	0	+	+
$(x+a)$	-	-	0	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	-	0	+
$(x+2)$	-	0	+	+	+	+
$\frac{(x-a)(x+a)}{(x-2)(x+2)}$	+		-	0	+	

$$S =]-\infty; -2[\cup [-a; a] \cup]2; +\infty[$$

Si $a > 2$

x	$-a \quad -2 \quad 2 \quad a$					
$(x-2)$	-	-	-	0	+	+
$(x+2)$	-	-	0	+	+	+
$(x-a)$	-	-	-	-	0	+
$(x+a)$	-	0	+	+	+	+
$\frac{(x-a)(x+a)}{(x-2)(x+2)}$	+	0	-		+	

$$S =]-\infty; -a] \cup]-2; 2[\cup [a; +\infty[$$

Si $a = 2$ Car ± 2 pas dans Def!

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 ; 1 \geq 0$$

$$S = \mathbb{R} \setminus \{ \pm 2 \}$$