

leonard.hardiman@epfl.ch
↳ Anglais (fautes de français)

Notes du cours

↳ Notes personnelles

↳ Notes digitales (sur moodle)

Les Séries

↳ 1 par semaine

↳ sur moodle lundi

↳ la correction sur moodle vendredi

1 Algèbre élémentaire

Ordre sur $\mathbb{R}$

comparaison large

$$x \geq y \Leftrightarrow \langle x \text{ plus grand ou égal à } y \rangle$$

$4 \geq 3$ ou $3 \geq 3$

$$x > y \Leftrightarrow \langle x \text{ plus grand que } y \rangle$$

$4 > 3$

comparaison stricte

Propriétés

$$x \geq y \text{ et } y \geq x \Rightarrow x = y$$

$$x \geq y \text{ et } y \geq z \Rightarrow x \geq z$$

$$x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

Ex. $x + 7 \geq 3$; $x + 7 - 7 \geq 3 - 7$
 $x \geq -4$

$$x \geq y \Rightarrow a \cdot x \geq a \cdot y \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$$

$$x \geq y \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y \quad \forall a \in \mathbb{R}_-$$

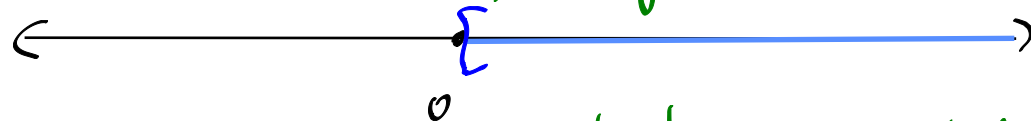
Ex. $3 \leq 4$; $-3 \geq -4$

Quelques Ensembles

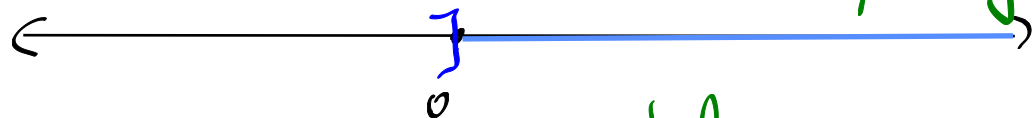
$\mathbb{R}$ $\langle$ tout les nombres $\rangle$



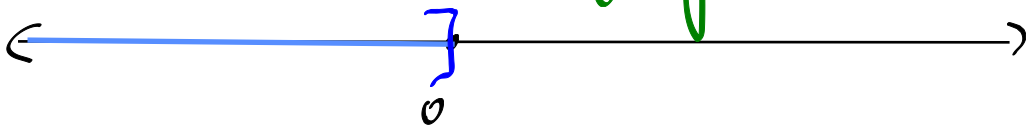
$\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\langle$ positif $\rangle$



$\mathbb{R}_{>0}$ $\langle$ strictement positif $\rangle$



$\mathbb{R}_- = \mathbb{R}_{\leq 0}$ $\langle$ négatif $\rangle$



Résolution d'inéquations

$$x^2 \geq x+2 ; \quad x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0$$

↪ Zéros $x=2, x=-1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$	
$(x-2)$		$-$	$ $	$-$	0	$+$
$(x+1)$	$-$	0	$ $	$+$	$ $	$+$
$(x-2)(x+1)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$	

↪ $S =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

Remarque : Si l'inéquation est linéaire (de degré 1) on peut résoudre directement :

$$5x \leq 10 ; \quad x \leq \frac{10}{5} ; \quad x \leq 2$$

$$S =]-\infty; 2]$$

Attention! Jamais diviser par la variable

$$x(x-1) \geq x-1 \not\Rightarrow x \geq 1$$

$$x(x-1) - x + 1 \geq 0 ; \quad x^2 - x - x + 1 \geq 0$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 ; \quad (x-1)(x-1) \geq 0$$

$$(x-1)^2 \geq 0$$

↪ tj positif ; $S = \mathbb{R}$

Attention! Jamais multiplier par la variable!

$$\frac{x+2}{x+1} \leq \frac{x-2}{x-1} \not\Rightarrow (x-2)(x+1) \leq (x+2)(x-1)$$

$$\hookrightarrow \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} \leq 0$$

$(x-1) \left(\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-2}{x-1} \right) (x+1)$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 + x - 2 - x^2 + x + 2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

↪ $x = -1; x = 0; x = 1$

x	-1	0	1
$2x$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$	$-$	0	$+$

↪ $S =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$

Combiner des inégalités

On peut ajouter des inégalités

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in [3; 5] \\ y \in [2; 4] \end{matrix}$$

+

$$5 \leq x+y \leq 9 \quad x+y \in [5; 9]$$

Mais on ne peut pas les soustraire!

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad \nRightarrow 1 \leq x-y \leq 1$$

-1

Par contre on peut multiplier par -1 et ajouter:

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq -y \leq -2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in [3; 5] \\ -y \in [-4; -2] \end{matrix}$$

+

$$-1 \leq x-y \leq 3 \quad x-y \in [-1; 3]$$

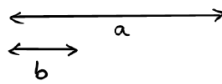
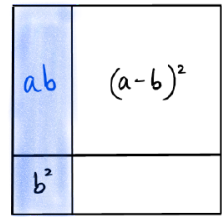
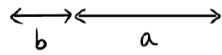
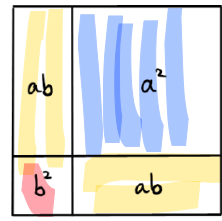
Identités remarquables

Degré 2

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



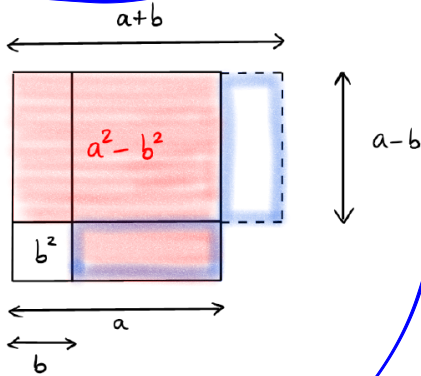
Degré 3

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



Expressions conjuguées

→ On dit que $(a+b)$ et $(a-b)$ sont conjuguées

Par Ex. $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$

→ $(a+b)$ et $(a^2 - ab + b^2)$ sont conjuguées

$(a-b)$ et $(a^2 + ab + b^2)$

Ex. $2-\sqrt[3]{3}$ et $4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}^2$

On peut utiliser pour rendre rationnel les dénominateurs.

$$\frac{2}{3+\sqrt{2}} = \frac{2(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{6-2\sqrt{2}}{9-2}$$