Lundi 12 mai

Théorème de la valeur intermédiaire

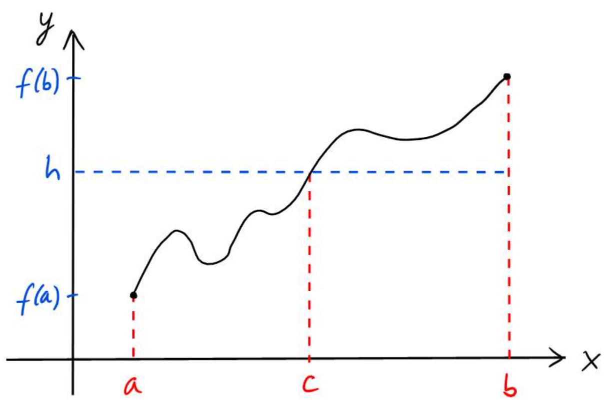
Définition 3.68

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *continue* si

- f est continue en tout $x_0 \in\ ]a, b[$,
- f est continue à droite en a, et
- f est continue à gauche en b.

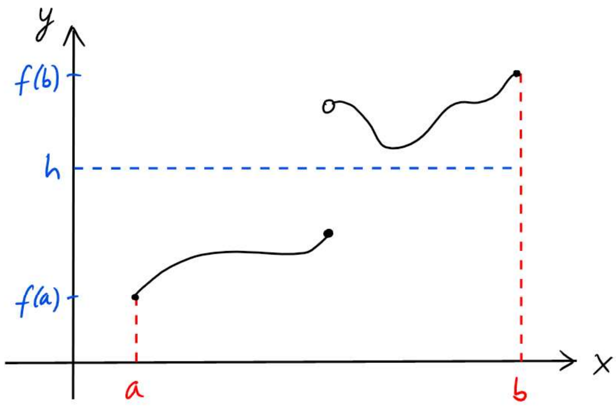
Théorème 3.69 (Théorème de la valeur intermédiaire (TVI))

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout $h \in\ ]f(a), f(b)[$, il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $f(c) = h$.



Preuve: lecture complémentaire (algorithme de bissection).

On remarque que sans l'hypothèse de continuité, le résultat n'est plus vrai en général.



Corollaire 3.70

Un polynôme de degré impair possède toujours une racine.

Preuve. Si $p(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_0$, alors $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$. On a donc $M > 0$ tel que $p(M) > 0$ et $N < 0$ tel que $p(N) < 0$. En appliquant le TVI sur l'intervalle $[N, M]$, on a qu'il existe $c \in]N, M[$ tel que $p(c) = 0$. $\square$

Théorème 3.71

Soit f continue sur $[a, b]$.

- f strictement croissante $\Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = [f(a), f(b)]$ et $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ est bijective.
- f strictement décroissante $\Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = [f(b), f(a)]$ et $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$ est bijective.

Preuve. Considérons le premier cas, dans lequel f est strictement croissante. Dans ce cas, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$, et donc $\mathrm{Im}(f) \subset [f(a), f(b)]$. Puis, si on fixe une valeur intermédiaire h, $f(a) < h < f(b)$, le TVI garantit l'existence d'un $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = h$, ce qui implique que $h \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $]f(a), f(b)[\subset \mathrm{Im}(f)$. Puisque $f(a), f(b) \in \mathrm{Im}(f)$, on a aussi $[f(a), f(b)] \subset \mathrm{Im}(f)$. On conclut donc que $\mathrm{Im}(f) = [f(a), f(b)]$.

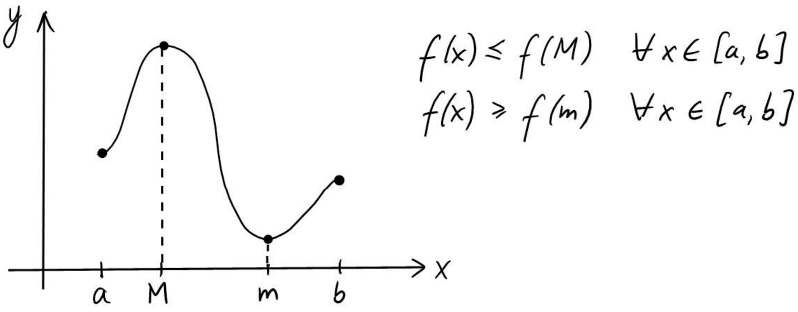
On sait maintenant que $f : [a,b] \to \mathrm{Im}(f)$ est surjective. Mais étant strictement croissante, elle est également injective (théorème 3.12). Elle est donc bijective.

$\square$

Ayant déjà vu le TVI, voici une autre conséquence importante de la continuité.

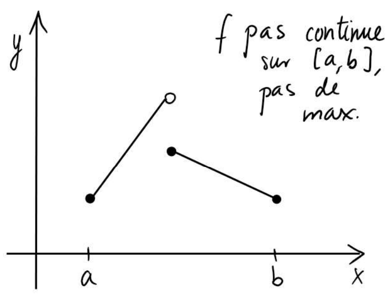
Théorème 3.72

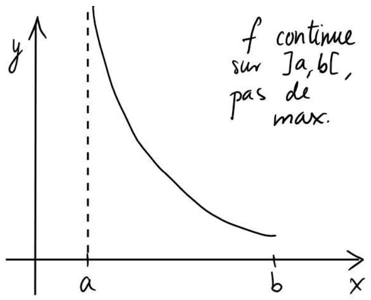
Soit f continue sur $[a,b]$. Alors f atteint son maximum et son minimum sur $[a,b]$.



Ceci implique que l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est aussi un intervalle fermé.

Les deux hypothèses – la continuité de la fonction et le fait que l'intervalle soit fermé – sont nécessaires, comme montrent les deux exemples suivants.





[Ce résultat parle de minima et maxima globaux (f a un *maximum global* en x_0 si pour tout $x \in [a,b]$, on a $f(x) \le f(x_0)$ Un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est un *maximum* *local* pour la fonction f s'il y a un voisinage de x_0 tel que pour tout x dans ce voisinage, on a $f(x) \leq f(x_0)$. On définit un *minimum local* de manière analogue.]

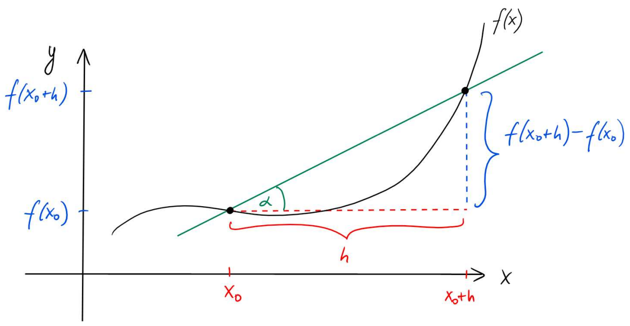
4 Dérivabilité

Introduction

Étant donné une fonction f définie sur un voisinage de x_0, une information sur le taux de variation de f près de x_0 est donnée par le quotient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

appelé le *rapport de Newton* de f en x_0. (Ici, il faut penser de h comme un petit changement en x.)



Géométriquement, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est la pente de la droite sécante passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0+h, f(x_0+h))$ du graphe de f.

On remarque qu'on a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \tan(\alpha)$.

Si la fonction $f(x)$ représentait la distance parcourue au temps x, le rapport de Newton représenterait la vitesse moyenne entre le moment $x = x_0$ et $x = x_0+h$.

Plus h est petit, plus cette vitesse moyenne est proche de la vitesse instantanée en x_0.

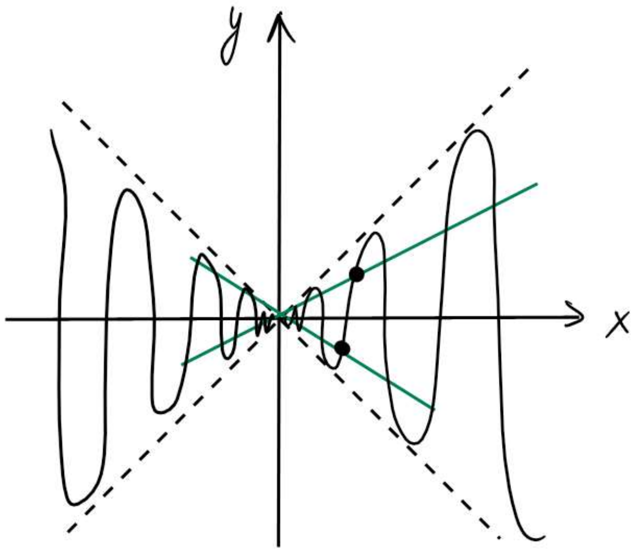
Donc, plus h est petit, plus précise l'information sur la variation de f en x_0.

Que se passe-t-il si on fait tendre $h \to 0$?

Si f est continue, le point $(x_0+h, f(x_0+h))$ va se rapprocher de $(x_0, f(x_0))$. Pour la limite du rapport de Newton, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, il y a trois possibilités.

- $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ n'existe pas.

  Par exemple, $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

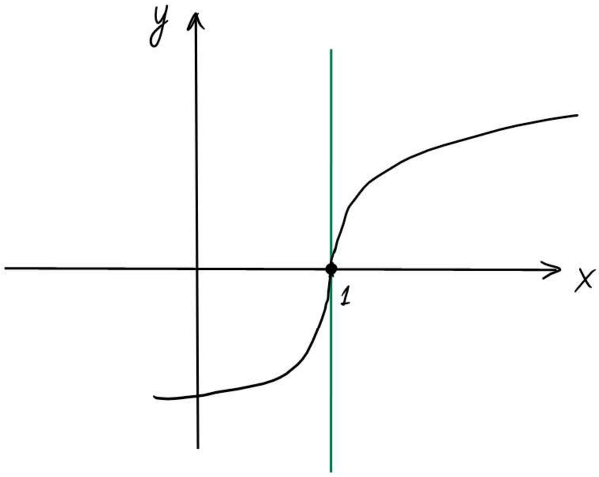


f est continue en 0, mais

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right),$$

qui n'existe pas. Géométriquement, la pente de la droite sécante oscille lorsque $x_0 + h$ se rapproche de x_0.

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (ou une des limites latérales) est égale à $\pm\infty$.

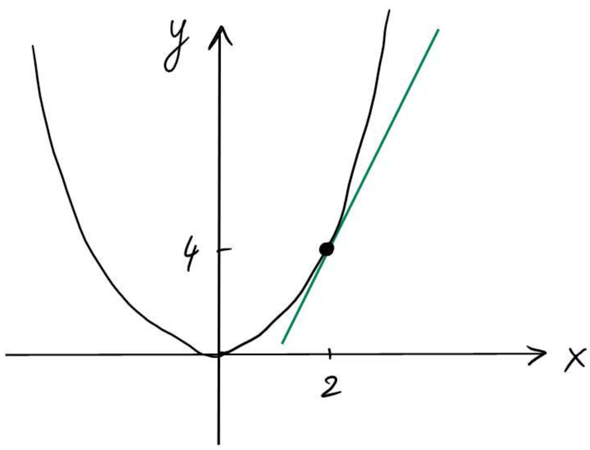


Par exemple, $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ est continue en 1 et

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(1+h)-1}-\sqrt[3]{1-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty.$$

Géométriquement, la droite tangente en 1 est verticale.

- $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=L\in\mathbb{R}.$



Par exemple, $f(x) = x^2$ est continue en 2 et

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.$$

Géométriquement, la pente de la droite sécante tend vers 4 lorsque $x_0 + h$ tend vers x_0.

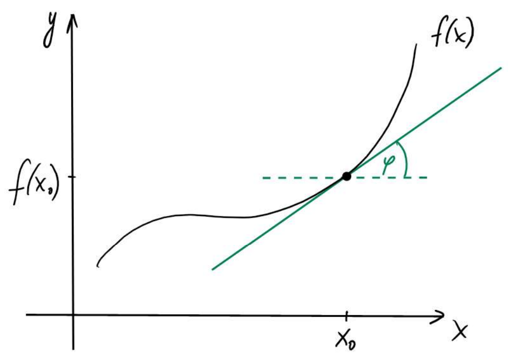
Définition 4.1
Soit f définie sur un voisinage de x_0. f est *dérivable en* x_0 si la limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe (c'est-à-dire, est égale à un nombre réel). Dans ce cas, cette limite est appelée la *dérivée* (ou le *nombre dérivé*) de f en x_0, noté $f'(x_0)$.

Notations alternatives:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Notons qu'une dérivée est toujours une limite "$\frac{0}{0}$".

Géométriquement, l'existence de la dérivée $f'(x_0)$ est équivalente à l'existence d'une tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$. En effet, lorsque $h \to 0$, la droite sécante tend vers la *droite tangente* au point x_0.



La pente de la tangente au graphe de f en x_0 est donc

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\varphi).$$

L'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

l'équation de la droite de pente $f'(x_0)$ passant par le point $(x_0, f(x_0))$.

Exemples 4.2

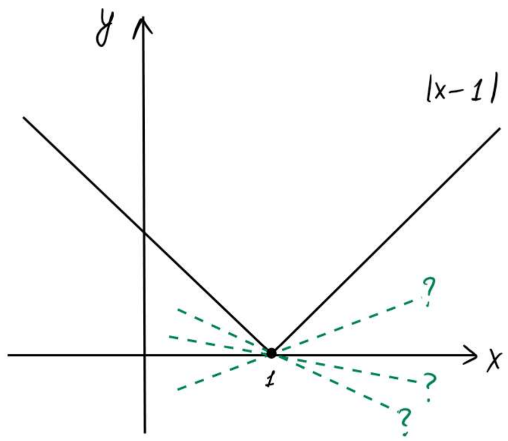
- Prenons $f(x) = x^2$ en $x_0 = 2$. On a $f(2) = 4$ et $f'(2) = 4$ comme vu avant, et donc la tangente est donnée par

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4.$$

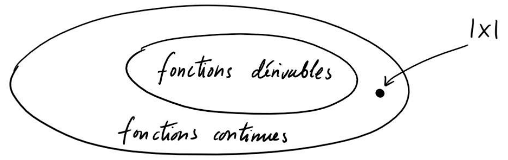
- Soit $f(x) = |x - 1|$. f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$. En effet, on a

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1) - 0}{x - 1} = 1,$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x - 1) - 0}{x - 1} = -1.$$

  Donc la limite $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, et donc $f'(1)$, n'existe pas. Sur le graphe de f, on voit qu'effectivement il n'y a pas de tangente bien définie en $x_0 = 1$.



Continuité vs dérivabilité



Théorème 4.3

Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0. f dérivable en $x_0 \Longrightarrow f$ est continue en x_0.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\
&= f'(x_0)\cdot 0\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et f est continue en x_0. □

Ce théorème est aussi vrai si on replace la dérivabilité et la continuité par leurs analogues à gauche ou à droite.

Attention: la réciproque est fausse ! Par exemple:

- $f(x) = |x|$ est continue mais non dérivable en 0,
- $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ est continue mais non dérivable en 1,
- $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue mais non dérivable en 0.

La contraposée de ce résultat est utile pour montrer qu'une fonction n'est pas dérivable.

Ce théorème nous montre que la continuité est une condition nécessaire pour qu'une fonction soit dérivable. Mais il n'y a pas besoin de montrer séparément la continuité; il suffit de montrer que la fonction est dérivable, et sa continuité est immédiate par le résultat ci-dessus.

Lundi 12 mai - Série 10