Corrigé 8

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

a) On fixe $\varepsilon = \frac{1}{10}$; déterminer M tel que $x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < \varepsilon$.

b) A l'aide de la définition de la limite d'une fonction, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

---

a) **Une méthode**

Résolution de l'inéquation $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$:

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x - 2\,(x-1)}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{x-1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{x-1} < \dfrac{1}{10} \quad \text{et} \\ \dfrac{2}{x-1} > -\dfrac{1}{10} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{10} < 0 \quad \text{et} \\ \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{10} > 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{20-(x-1)}{10\,(x-1)} < 0 \quad \text{et} \\ \dfrac{20+(x-1)}{10\,(x-1)} > 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{21-x}{x-1} < 0 \quad \text{et} \\ \dfrac{19+x}{x-1} > 0 \end{array}\right.$$

$$S = \Big(\,]-\infty\,,\,1\,[\,\cup\,]\,21\,,\,+\infty\,[\,\Big) \cap \Big(\,]-\infty\,,\,-19\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,\Big),$$

$$S =]-\infty\,,\,-19\,[\,\cup\,]\,21\,,\,+\infty\,[\,.$$

Détermination du seuil M :

On cherche à déterminer $M \in \mathbb{R}$ tel que $x > M \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$, sachant que

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty\,,\,-19\,[\,\cup\,]\,21\,,\,+\infty\,[\,.$$

On cherche donc des M-voisinages de $+\infty$, c'est-à-dire des intervalles $]\,M\,,\,+\infty[$ qui sont entièrement contenus dans l'ensemble solution $]-\infty\,,\,-19\,[\,\cup\,]\,21\,,\,+\infty\,[$.

C'est le cas pour tout $M \geq 21$.

Une autre méthode

On cherche un seuil $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \in]\,M\,,\,+\infty\,[\quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$.
On peut donc se contenter de résoudre l'inéquation $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}$ sur un voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de type $]\,x_0\,,\,+\infty\,[$.

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x - 2\,(x-1)}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{x-1}\right| < \frac{1}{10}\,.$$

En posant $x > 1$, on obtient :

$$\left|\frac{2}{x-1}\right| < \frac{1}{10} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x-1} < \frac{1}{10} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{20-(x-1)}{10\,(x-1)} < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{21-x}{x-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow\quad x > 21\,,\quad (x > 1)\,.$$

Donc tout $M \geq 21$ convient. En effet :

$$x > M \geq 21 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10}\,.$$

b) Pour un $\varepsilon > 0$ donné, montrons qu'il existe un seuil $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$x > M \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon\,.$$

Résolvons l'inéquation $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$ par rapport à x $(x \neq 1)$, en considérant ε comme paramètre :

$$\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{2}{x-1}\right| < \varepsilon\,.$$

En posant $x > 1$, on obtient :

$$\left|\frac{2}{x-1}\right| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x-1} < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad 2 < \varepsilon\,(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad x > 1+\frac{2}{\varepsilon}\,,\quad (x > 1)\,.$$

Donc si $x > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, alors $\left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$.

Pour que $x > M \;\Rightarrow\; \left|\frac{2x}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$, il faut donc prendre $M \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

2. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{(2x+1)^2(3x-1)\,(25x^2-1)}{60x^5 - x^3 - 6x + 8}$

b) $b(x) = \dfrac{|x|\,\sqrt{x + x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4 - 1}}$

c) $c(x) = \dfrac{\cos x\,\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $d(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 + \sin x}}$

e) $e(x) = \dfrac{(x^2+1)\,(\sin x - 2)}{2x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x\,(x+1)} - x\,.$

---

a) La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport des termes de plus haut degré.

Il suffit donc de calculer le terme de plus haut degré du numérateur de $a(x)$. :

$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\,x^2\cdot 3x\cdot 25\,x^2}{60x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{300\,x^5}{60x^5} = 5\,.$$

b) Pour calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x)$, on se place dans un voisinage de $+\infty$.

On peut donc considérer $x>0$: $b(x)=\dfrac{x\sqrt{x+x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4-1}}$.

Puis en mettant en évidence les plus hautes puissances de x, on obtient :

$$b(x)=\frac{x\sqrt{x\,(1+x^{-2})}}{\sqrt[3]{x^4\,(1-x^{-4})}}=\frac{x\sqrt{x}\,\sqrt{1+x^{-2}}}{\sqrt[3]{x^4}\,\sqrt[3]{1-x^{-4}}}=\frac{x^{3/2}\,\sqrt{1+x^{-2}}}{x^{4/3}\,\sqrt[3]{1-x^{-4}}}=x^{1/6}\cdot\frac{\sqrt{1+x^{-2}}}{\sqrt[3]{1-x^{-4}}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} b(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^{1/6}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{1+x^{-2}}}{\sqrt[3]{1-x^{-4}}}}_{\to 1}=+\infty.$$

c) En considérant $x>0$, on a

$$c(x)=\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\cos(x)}{\sqrt{x^2\left[1+\frac{1}{x^2}\right]}}=\frac{x^{1/3}\cdot\cos(x)}{|x|\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x^{1/3}\cdot\cos(x)}{x\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\cos(x)}{x^{2/3}\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

$$\text{Or}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2/3}\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2/3}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$$

et $\cos x$ est borné sur $\mathbb{R}$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\dfrac{1}{x^{2/3}\,\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{\text{borné}}=0$.

d) La fonction $\sqrt[3]{x}$ est une fonction "gentille" sur tout $\mathbb{R}$ (par la suite on dira que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$). On a donc

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} f(x)}\qquad\text{si}\qquad\lim_{x\to+\infty} f(x)\ \text{existe.}$$

Pour tout $x\neq 0$, on a

$$d(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+\sin x}}=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3\,(1+\frac{\sin x}{x^3})}}=\frac{x}{x\,\sqrt[3]{1+\frac{\sin x}{x^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{\sin x}{x^3}}}.$$

$$\text{Or}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{\text{borné}}=0,$$

$$\text{donc}\quad\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1+\frac{\sin x}{x^3}}=1\qquad\text{et}\qquad\lim_{x\to+\infty} d(x)=1.$$

e) On étudie séparément $\dfrac{x^2+1}{2x+1}$ et $\sin(x)-2$.

La fonction $(\sin x-2)$ est non seulement bornée, mais elle est de signe constant. Plus précisément, elle est inférieure ou égale à -1, $\forall x\in\mathbb{R}$.

D'autre part,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\,(1+\frac{1}{x^2})}{x\,(2+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}}_{\to 1/2} = +\infty\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{2x+1}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{(\sin x - 2)}_{\leq -1<0} = -\infty\,.$$

f) L'amplification par l'expression conjuguée permet d'exploiter la différence pour faire disparaître les plus hautes puissances de x :

$$f(x) = \sqrt{x\,(x+1)} - x = \left[\sqrt{x\,(x+1)} - x\right] \cdot \frac{\sqrt{x\,(x+1)}+x}{\sqrt{x\,(x+1)}+x}\,,$$

$$f(x) = \frac{x\,(x+1)-x^2}{\sqrt{x\,(x+1)}+x} = \frac{x}{\sqrt{x\,(x+1)}+x}\,.$$

Cette expression, au voisinage de $+\infty$ est toujours une forme indéterminée, mais de type $"\frac{\infty}{\infty}"$. On lève cette indétermination de la façon suivante :

pour tout $x>0$, on a $\quad f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x\,(x+1)}+x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2\,(1+\frac{1}{x})}+x}$

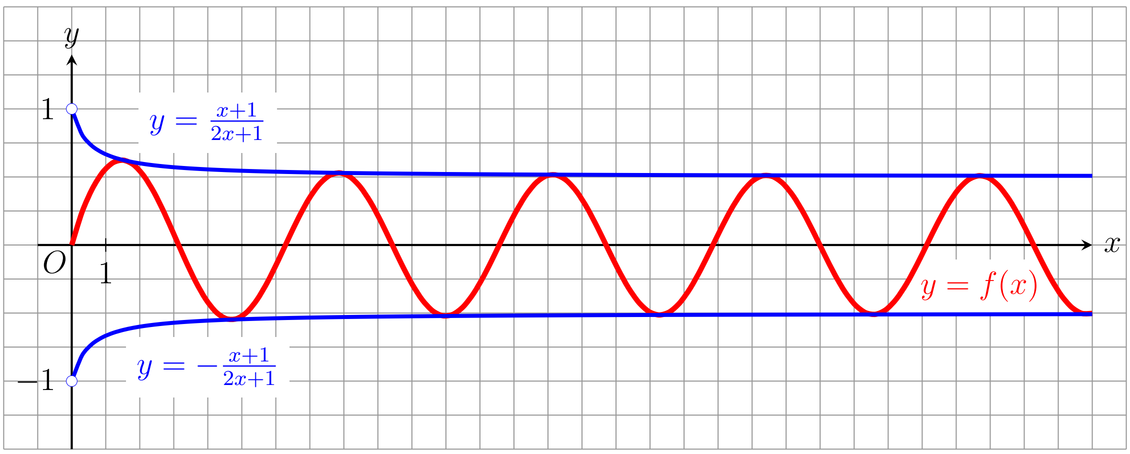
$$= \frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{x}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Etudier la convergence de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{(x+1)\,\sin x}{2x+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier rigoureusement votre réponse.

Il semble que la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}\cdot\sin x$ diverge lorsque $x\to+\infty$.

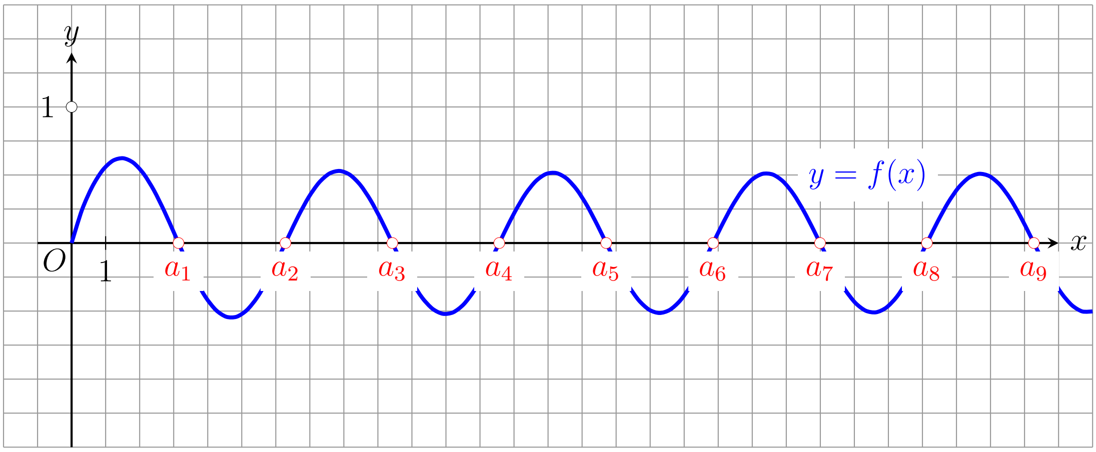
En effet la fonction $\dfrac{x+1}{2x+1}$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque $x\to+\infty$, cela ne permet pas de "calmer" les oscillations de la fonction sinus.



On montre que $f(x)$ diverge en définissant deux suites (a_n) et (b_n), $n \in \mathbb{N}^*$ qui divergent vers l'infini et dont les images par f ne convergent pas vers la même valeur.

— Soit $a_n = n\,\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (a_n) diverge vers $+\infty$ et la suite $(f(a_n))$ est la suite constante nulle, elle converge vers 0.

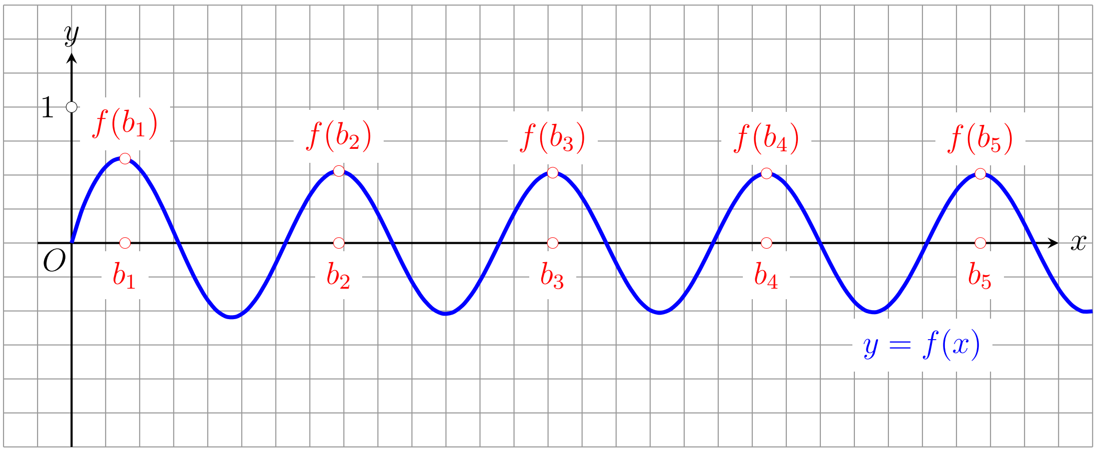


— Soit $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\,\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (b_n) diverge vers $+\infty$ et la suite $(f(b_n))$ a pour terme général

$$f(b_n) = f(\tfrac{\pi}{2} + 2n\,\pi) = \frac{\frac{\pi}{2} + 2n\,\pi + 1}{\pi + 4n\,\pi + 1} = \frac{n\,\left(2\pi + \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n}\right)}{n\,\left(4\pi + \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2\pi + \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{n}}{4\pi + \frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}}\,,$$

elle converge vers $\frac{1}{2}$.



Les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$, mais les deux suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ ne convergent pas vers la même valeur :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{1}{2}\,.$$

La fonction $f(x) = \dfrac{(x+1)\,\sin x}{2x+1}$ n'admet donc pas de limite.

4. Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $-\infty$.

a) $a(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 2}}$ c) $c(x) = x^2 \left(\sqrt[3]{8x^3 - 1} - 2x\right)$

b) $b(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} + 2x\right)(3 - \cos^2 x)$ d) $d(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 - x}$.

---

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} a(x)$ est une forme indéterminée de type $"\frac{\infty}{\infty}"$.

On lève cette indétermination en mettant en évidence les plus hautes puissances de x au numérateur et au dénominateur.

Pour tout $x < 0$, on a

$$a(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 2}} = \frac{x - |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^3}}} = \frac{x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^3}}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^3}}}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} a(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^3}}} = 2.$$

b) $b(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1} + 2x\right)\left(3 - \cos^2 x\right)$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, $3 - \cos^2 x$ n'admet pas de limite, mais reste de signe constant : $3 - \cos^2 x \geq 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + 2x\right)$ est une forme indéterminée de type $"\infty - \infty"$.

On lève cette indétermination par factorisation :

$$\sqrt{x^2 + 1} + 2x = |x|\sqrt{1 + \tfrac{1}{x^2}} + 2x = -x\sqrt{1 + \tfrac{1}{x^2}} + 2x, \qquad \text{car } x < 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} x\left(2 - \sqrt{1 + \tfrac{1}{x^2}}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} b(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(\sqrt{x^2 + 1} + 2x\right)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{\left(3 - \cos^2 x\right)}_{\geq 2 > 0} = -\infty.$$

c) On amplifie par l'expression conjuguée de $\left(\sqrt[3]{8x^3 - 1} - 2x\right)$ pour faire disparaître les plus hautes puissances de x :

$$c(x) = x^2 \left(\sqrt[3]{8x^3 - 1} - 2x\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(8x^3 - 1)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3 - 1} + (2x)^2}{\sqrt[3]{(8x^3 - 1)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3 - 1} + (2x)^2},$$

$$= \frac{x^2\left[(8x^3 - 1) - (2x)^3\right]}{\sqrt[3]{(8x^3 - 1)^2} + 2x\sqrt[3]{8x^3 - 1} + (2x)^2} = \frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(8 - x^{-3})^2} + 2\sqrt[3]{8 - x^{-3}} + 4\right)},$$

$$c(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(8-x^{-3})^2} + 2\sqrt[3]{8-x^{-3}} + 4}\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} c(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(8-x^{-3})^2} + 2\sqrt[3]{8-x^{-3}} + 4} = -\frac{1}{12}\,.$$

d) On amplifie par l'expression conjuguée du numérateur pour faire disparaître les plus hautes puissances de x :

$$d(x) = \frac{x^2 - \sqrt{(x^2-x)(x^2+1)}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^4 - (x^4 - x^3 + x^2 - x)}{\sqrt{x^2+1}\,\left(x^2 + \sqrt{x^4 - x^3 + x^2 - x}\,\right)}\,,$$

$$d(x) = \frac{x^3 - x^2 + x}{|x|\,\sqrt{1+x^{-2}}\,\left(x^2 + x^2\sqrt{1 - x^{-1} + x^{-2} - x^{-3}}\,\right)}\,, \qquad x < 0\,,$$

$$d(x) = \frac{x^3\,(1 - x^{-1} + x^{-2})}{x^3\left[-\sqrt{1+x^{-2}}\,\left(1 + \sqrt{1 - x^{-1} + x^{-2} - x^{-3}}\,\right)\right]}\,,$$

$$d(x) = \frac{1 - x^{-1} + x^{-2}}{-\sqrt{1+x^{-2}}\,\left(1 + \sqrt{1 - x^{-1} + x^{-2} - x^{-3}}\,\right)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} d(x) = -\frac{1}{2}\,.$$

5. Déterminer p et q réels de sorte que $\forall\, a\,,\ b \in \mathbb{R}$ on ait

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+ax+b} - (px+q)\right] = 0\,.$$

On commence par observer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+ax+b} - (px+q)\right]$ n'est pas une forme indéterminée pour tout $p \in \mathbb{R}$.

- Si $p \geq 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+ax+b} - (px+q)\right] = +\infty$.

  Il est donc nécessaire que p soit strictement négatif.

- Et si $p < 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\sqrt{x^2+ax+b} - (px+q)\right]$ est une forme indéterminée de type "$\infty - \infty$".

On pose $f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - (px+q)\,, \quad x < 0\,.$

On amplifie $f(x)$ par son expression conjuguée pour pouvoir "comparer" $\sqrt{x^2+ax+b}$ et $(px+q)$:

$$f(x) = \sqrt{x^2+ax+b} - (px+q) = \left[\sqrt{x^2+ax+b} - (px+q)\right]\cdot\frac{\sqrt{x^2+ax+b} + (px+q)}{\sqrt{x^2+ax+b} + (px+q)}\,,$$

$$f(x) = \frac{(x^2+ax+b) - (px+q)^2}{\sqrt{x^2+ax+b} + (px+q)} = \frac{(1-p^2)\,x^2 + (a-2pq)\,x + (b-q^2)}{|x|\,\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}} + (px+q)}\,, \quad x < 0\,,$$

$$f(x) \;=\; \frac{x\left[(1-p^2)\,x+(a-2pq)+\frac{b-q^2}{x}\right]}{x\left[-\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+p+\frac{q}{x}\right]} \;=\; \frac{(1-p^2)\,x+(a-2pq)+\frac{b-q^2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}+p+\frac{q}{x}}$$

Si $1-p^2\neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty\,.$

Il est donc nécessaire que $p^2=1$ et donc que $p=-1\,,$ (car $p<0$).

On vérifie que dans ce cas, le dénominateur ne tend pas vers 0.

Sachant que $p=-1\,,$ on en déduit que

$$f(x)=\frac{(a+2q)+\frac{b-q^2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}-1+\frac{q}{x}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{a+2q}{2}\,.$$

En conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0\,,\quad \forall\, a\,,\, b\in\mathbb{R}$ si et seulement si

$$p=-1 \qquad \text{et} \qquad q=-\frac{a}{2}\,.$$

6. Soient $a,b\in\mathbb{R}^*$. Calculer, si elle existe, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a}{x}\cdot E\left(\frac{x}{b}\right)$.

La partie entière de y est le plus grand entier inférieur ou égal à $y\,,$ $(y\in\mathbb{R})\,.$

On peut donc encadrer la partie entière de y de la façon suivante :

$$y-1\leq E(y)\leq y\,,\qquad \forall\, y\in\mathbb{R}\,.$$

On en déduit un encadrement de $\frac{a}{x}\cdot E\left(\frac{x}{b}\right)$ en fonction du signe de a :

$$\left(\frac{x}{b}-1\right)\leq E\left(\frac{x}{b}\right)\leq\frac{x}{b}$$

et on se place dans un voisinage de $+\infty\,,$ en considérant $x>0\,,$ donc

— si $a>0\,,$ on a $\frac{a}{x}\cdot\left(\frac{x}{b}-1\right)\leq\frac{a}{x}\cdot E\left(\frac{x}{b}\right)\leq\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{b}$

— et si $a<0\,,$ on a $\frac{a}{x}\cdot\frac{x}{b}\leq\frac{a}{x}\cdot E\left(\frac{x}{b}\right)\leq\frac{a}{x}\cdot\left(\frac{x}{b}-1\right)\,.$

Or $\dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{x}{b}=\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{a}{x}\cdot\left(\dfrac{x}{b}-1\right)=\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{a}{b}\,,$

donc d'après les deux gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{x}\cdot E\left(\dfrac{x}{b}\right)=\dfrac{a}{b}\,.$

7. Démontrer le résultat suivant.

Soit f une fonction à valeurs réelles strictement positives.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\;=\;0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}\;=\;+\infty\,.$

Hypothèse : $\forall\ \varepsilon > 0\,,\ \exists\ M(\varepsilon) > 0$ tel que $x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0\,| < \varepsilon\,.$

Conclusion : $\forall\ A > 0\,,\ \exists\ M^*(A) > 0$ tel que $x > M^* \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{f(x)} > A\,.$

Démonstration : Soit $A > 0$ donné, on cherche à déterminer $M^*(A)\,.$

$$\frac{1}{f(x)} > A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < \frac{1}{A} \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - 0\,| < \frac{1}{A}\,, \qquad \text{car} \quad f(x) > 0\,.$$

Or d'après l'hypothèse, si x est suffisamment grand, $|f(x) - 0\,|$ est aussi petit que l'on veut.

Plus précisément, si $x > M(\frac{1}{A})$, alors $|f(x) - 0\,| < \dfrac{1}{A}\,.$

Donc tout $M^*(A)$ plus grand que $M(\frac{1}{A})$ convient.

En effet : $x > M^*(A)\,, \quad (\text{avec } M^*(A) \geq M(\tfrac{1}{A})\,) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{f(x)} > A\,.$