Corrigé 7

1. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

   (a) $a(x) = x\,|x|$

   (b) $b(x) = x\,(x^2 + px + q)\,, \quad p, q \in \mathbb{R}$

   (c) $c(x) = E(\sin x)$

   (d) $d(x) = |\sin x| + \cos(\sqrt{2}\,x)$

   (e) $e(x) = \tan^2(\frac{2}{x} + x\sqrt{|x|})$

   (f) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 3x^3 + x + a}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$

(a) On évalue la fonction a en $-x$ et on la compare à $a(x)$:

$$a(-x) = (-x)\,|-x| = (-x)\,|x| = -\,(x\,|x|) = -a(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

La fonction $a(x)$ est donc impaire.

(b) On compare $b(-x)$ et $b(x)$:

$$b(-x) = (-x)\left[\,(-x)^2 + p\,(-x) + q\,\right] = -x\,(x^2 - px + q)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

La fonction $b(x)$ n'est ni paire ni impaire si $p \neq 0$, mais elle est impaire si $p = 0$.

(c) On évalue la fonction c en $-x$:

$$c(-x) = E\,[\sin(-x)] = E\,(-\sin x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Or la fonction partie entière $E(x)$ n'est ni paire ni impaire :

$$E\,(-\sin x) \neq E\,(\sin x) \qquad \text{et} \qquad E\,(-\sin x) \neq -E\,(\sin x)\,, \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Donc la fonction $c(x)$ n'est ni paire ni impaire.

(d) On évalue la fonction d en $-x$:

$$d(-x) = |\sin(-x)| + \cos\left[\sqrt{2}\,(-x)\right] = |-\sin x| + \cos(-\sqrt{2}\,x)\,,$$

$$d(-x) = |\sin x| + \cos(\sqrt{2}\,x) = d(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Donc la fonction $d(x)$ est paire.

(e) On évalue la fonction e en $-x$:

$$e(-x) = \tan^2(-\tfrac{2}{x} - x\,\sqrt{|-x|}\,) = \tan^2[-(\tfrac{2}{x} + x\,\sqrt{|x|}\,)]\,,$$

$$e(-x) = [-\tan(\tfrac{2}{x} + x\,\sqrt{|x|}\,)]^2 = \tan^2(\tfrac{2}{x} + x\,\sqrt{|x|}\,) = e(x)\,, \quad \forall\, x \in D_{\text{def}}\,.$$

Donc la fonction $e(x)$ est paire.

(f) On évalue la fonction f en $-x$:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) + a} = \sqrt[3]{-x^5 + 3x^3 - x + a}\,,$$

$$f(-x) = \sqrt[3]{-(x^5 - 3x^3 + x) + a}\,.$$

La fonction $f(x)$ n'est ni paire ni impaire si $a \neq 0$, mais elle est impaire si $a = 0$. En effet si $a = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \sqrt[3]{-(x^5 - 3x^3 + x)} = -\sqrt[3]{x^5 - 3x^3 + x} = -f(x)\,.$$

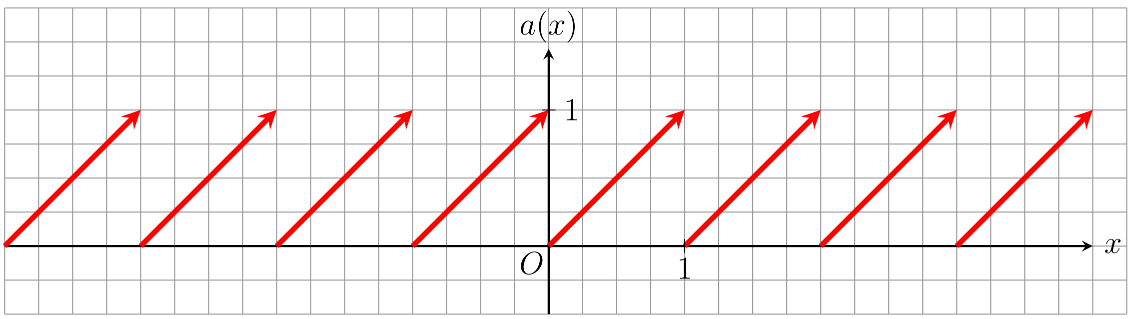
2. Déterminer la période, si elle existe, des fonctions suivantes :

(a) $a(x) = x - E(x)\,,$ (b) $b(x) = \sin(ax) \cdot \cos(ax) \quad a \in \mathbb{R}\,,$

(a) Pour tout $x \in [\,n\,,\,n+1\,[\,,\ n \in \mathbb{Z}$, la partie entière de x vaut n.

- Si $x \in [\,0\,,\,1\,[\,,$ alors $E(x) = 0$ et $a(x) = x\,.$
- Si $x \in [\,1\,,\,2\,[\,,$ alors $E(x) = 1$ et $a(x) = x - 1\,.$
- Si $x \in [\,2\,,\,3\,[\,,$ alors $E(x) = 2$ et $a(x) = x - 2\,.$
- Si $x \in [\,-1\,,\,0\,[\,,$ alors $E(x) = -1$ et $a(x) = x + 1\,.$
- Si $x \in [\,-2\,,\,-1\,[\,,$ alors $E(x) = -2$ et $a(x) = x + 2\,.$

On en déduit le graphe de $a(x)$:



Et on en conclut que la fonction a est périodique de période $T = 1$:

$$a(x+1) = a(x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) la fonction $b(x) = \sin(ax)\cdot\cos(ax)\,,\ a \in \mathbb{R}^*$ est $\frac{2\pi}{|a|}$–périodique car les fonctions $\sin(ax)$ et $\cos(ax)$ le sont toutes les deux. Mais $\frac{2\pi}{|a|}$ est-elle la période de b ?

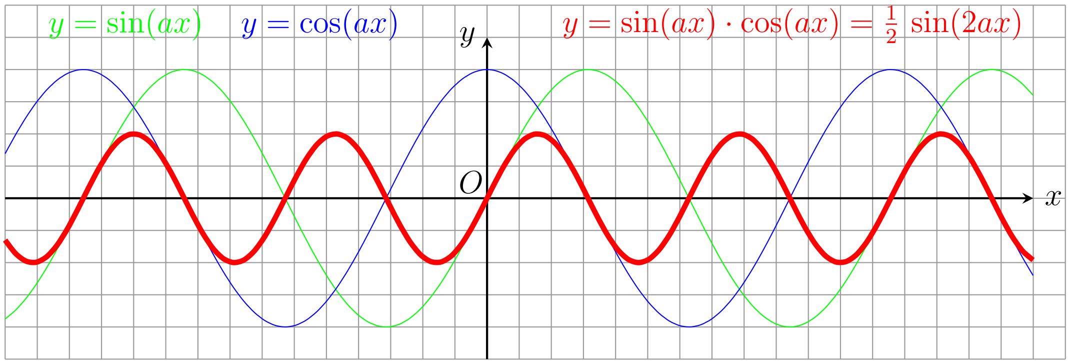
Pour le savoir, on transforme l'expression de b en fonction d'une seule fonction trigonométrique :

$$b(x) = \sin(ax) \cdot \cos(ax) = \tfrac{1}{2}\,\left[2\,\sin(ax) \cdot \cos(ax)\right] = \tfrac{1}{2}\,\sin(2ax)\,.$$

On déduit la période T de la fonction b à partir de celle du sinus :

$$b(x+T) = \tfrac{1}{2}\sin\left[2a\,(x+T)\right] = \tfrac{1}{2}\sin\Big[\,2ax + \underbrace{2aT}_{\text{la période du sinus}}\,\Big]\,,$$

$$2aT = 2\pi\,,\quad T>0 \quad\Leftrightarrow\quad T = \frac{\pi}{|a|}\,,\quad a\neq 0\,.$$



Remarque : si $a=0$, alors $b(x)=0\,,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}$.

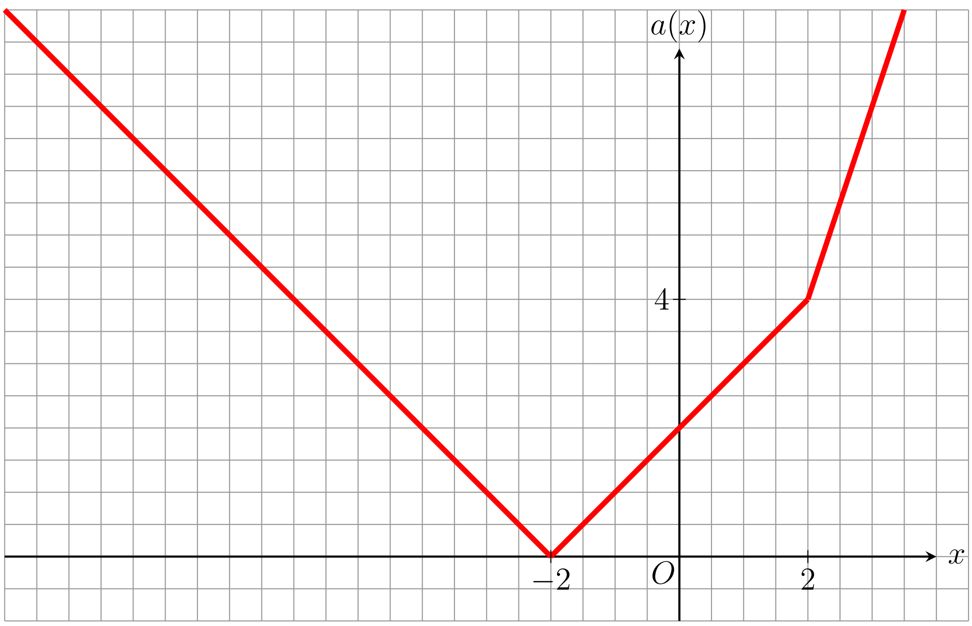
La fonction constante $b\equiv 0$ admet tout $T\in\mathbb{R}$ comme période, mais la période de b, (le plus petit $T>0$) n'existe pas.

3. Esquisser le graphe des fonctions suivantes, puis en déduire leur ensemble de définition et leur ensemble image.

 (a) $a(x) = |\,2x + |x-2|\,|$ (b) $b(x) = \dfrac{|x|}{x^3+x}$ si $x\neq 0$ et $b(0)=2$.

(a) $a(x) = |\,2x+|x-2|\,|\,,\quad D_a=\mathbb{R}$. Explicitons la fonction a.

$$a(x) = \begin{cases} |\,x+2\,| & \text{si } x<2 \\ |\,3x-2\,| & \text{si } x\geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x<-2 \\ x+2 & \text{si } -2\leq x<2 \\ 3x-2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

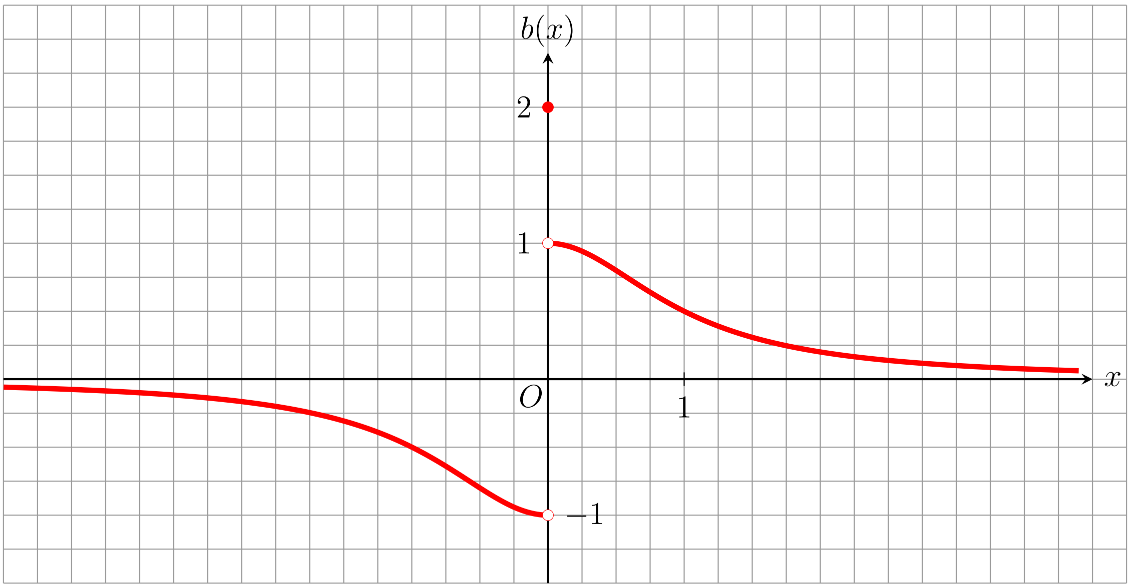


L'ensemble image de la fonction a est $\operatorname{Im} a = \mathbb{R}_+$.

(b) $b(x) = \dfrac{|x|}{x^3+x}$ si $x \neq 0$ et $b(0) = 2$

La fonction $y = \dfrac{|x|}{x^3+x}$ $(x \neq 0)$ est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

$$b(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Le domaine de définition de la fonction b est $D_b = \mathbb{R}$ et son ensemble image est $\operatorname{Im} b = \,]-1\,;\,0\,[\, \cup \,]\,0\,;\,1\,[\, \cup \{2\}$.

4. (a) Esquisser le graphe de la fonction $A \circ a$,

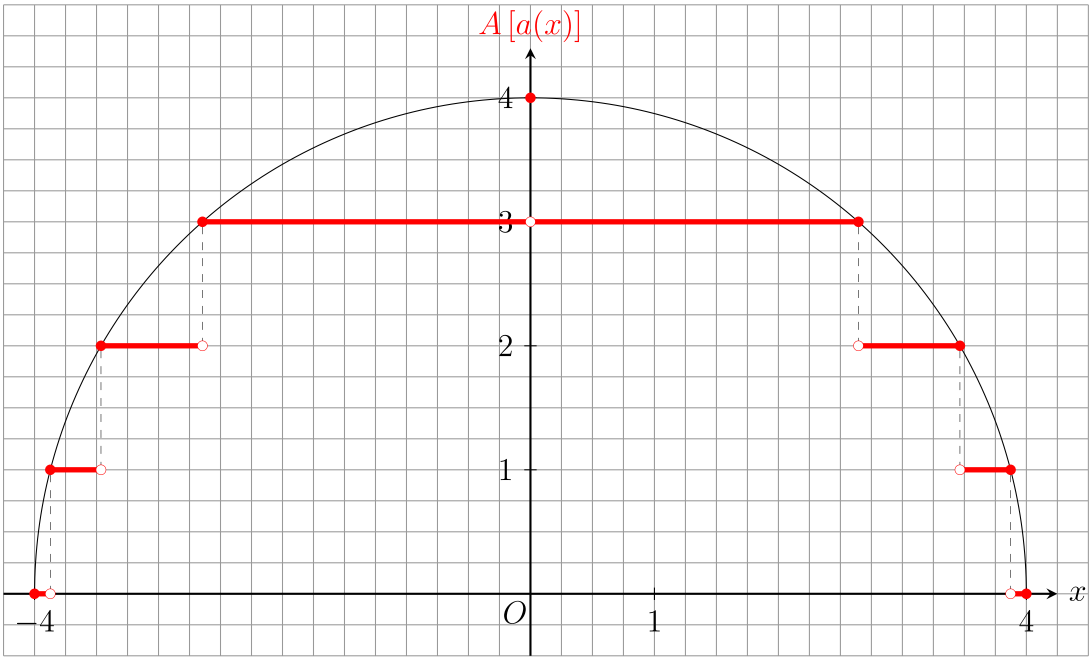
$$A(x) = E(x) \qquad \text{et} \qquad a(x) = \sqrt{16 - x^2}\,.$$

$D_{A\circ a} = D_a = [-4\,;\,4\,]$.

La représentation graphique de la fonction a est le demi-cercle de centre O et de rayon $r = 4$ dans le demi-plan $y \geq 0$. En effet

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 16 - x^2 \;\text{ et }\; y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 4^2 \;\text{ et }\; y \geq 0\,.$$

On en déduit graphiquement la représentation de la fonction $A \circ a$.

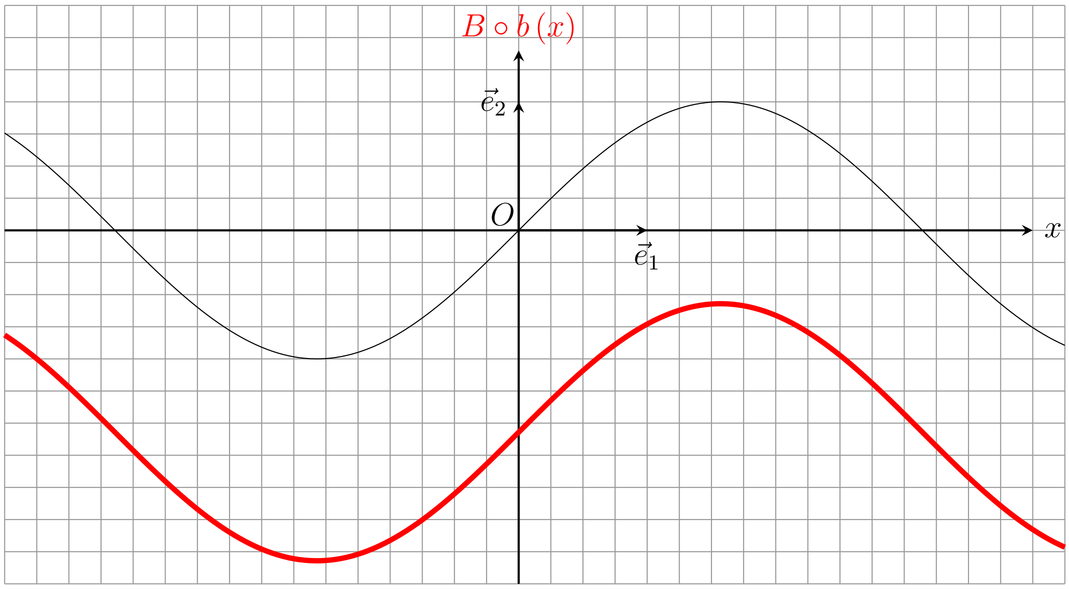


(b) Esquisser le graphe des fonctions $B \circ b$ et $b \circ B$,

$$B(x) = x - \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad b(x) = \sin x\,.$$

$$B \circ b\,(x) = B\,[b(x)] = B\,[\sin(x)] = \sin(x) - \frac{\pi}{2}\,.$$

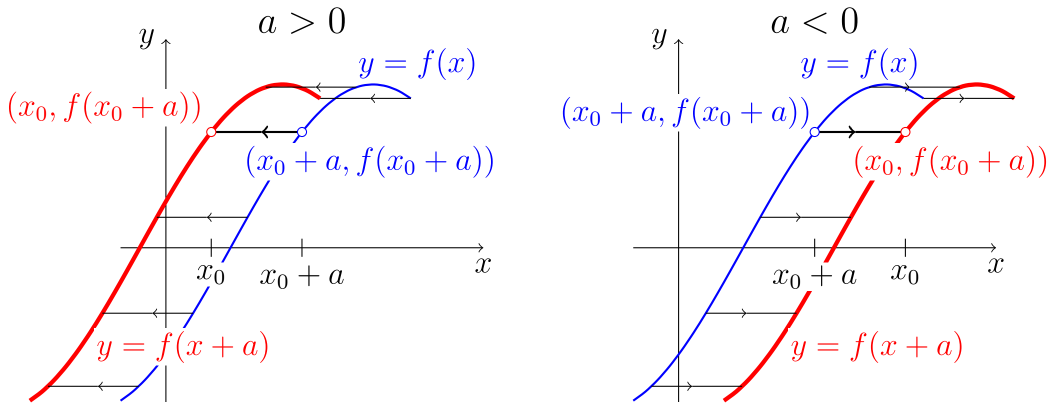
Dans un repère $(O\,,\,\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2)$, le graphe de $\sin(x) - \frac{\pi}{2}$ se déduit du graphe de $\sin(x)$ par une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\cdot\vec{e}_2$.



$$b \circ B\,(x) = b\,[B(x)] = b\left[x - \tfrac{\pi}{2}\right] = \sin\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)\;.$$

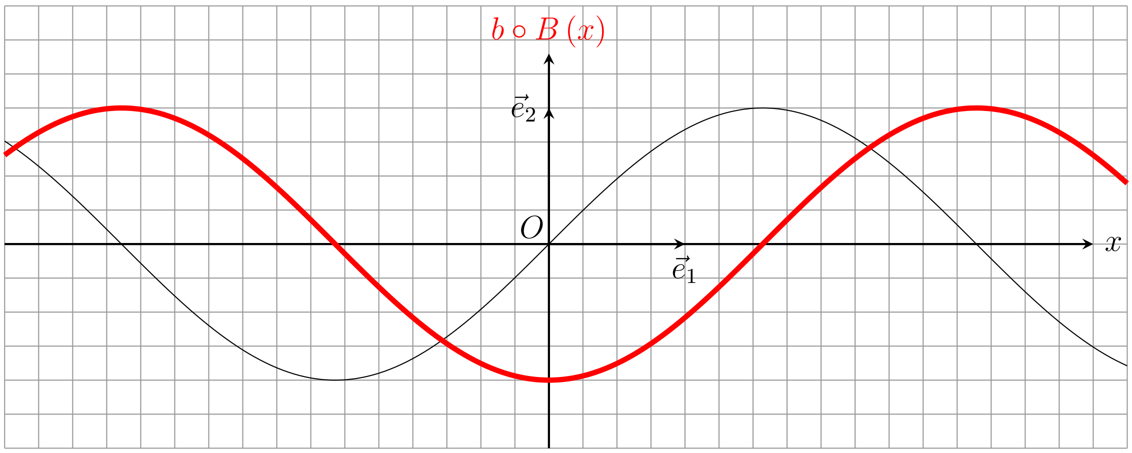
Comment construire le graphe de $f(x+a)$ à partir de celui de $f(x)$?

Soit x_0 une abscisse, on lui ajoute a : $x_0 + a$, on en prend l'image par f : $f(x_0+a)$, puis on associe celle-ci à x_0 : $f(x_0+a)$.



Le graphe de $f(x+a)$ se déduit du graphe de $f(x)$ par translation de $-a$ unités selon l'axe des x.

Dans un repère $(O\,,\vec{e}_1\,,\vec{e}_2)$, le graphe de $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ se déduit donc du graphe de $\sin(x)$ par une translation de vecteur $+\frac{\pi}{2}\cdot\vec{e}_1$.



5. Soit f une fonction définie sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.

   Montrer que f peut toujours s'exprimer comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On exprime f comme la somme d'une fonction p paire et d'une fonction i impaire :

$$f(x) = p(x) + i(x)\,.$$

On exploite les propriétés des fonctions p et i en calculant $f(-x)$:

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)\,, \quad x \in D_f\,.$$

On détermine les fonctions inconnues $p(x)$ et $i(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f(-x)$ comme solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & = & p(x) + i(x) \\ f(-x) & = & p(x) - i(x) \end{array} \right.$$

On résout ce système en effectuant la somme et la différence des deux équations :

$$f(x) + f(-x) = 2\,p(x) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}\,,$$

$$f(x) - f(-x) = 2\,i(x) \quad \Leftrightarrow \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}\,.$$

$$f(x) \;=\; \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{fonction paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{fonction impaire}}\,, \qquad x \in D_f\,.$$

6. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1}\,.$$

Montrer que cette fonction n'est pas surjective, puis restreindre son ensemble d'arrivée de sorte qu'elle le devienne.

— Soit on travaille au hasard ...

- $y = 1$ admet un antécédent : $x = 0$.
- $y = 5$ admet deux antécédents : $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.
- $y = 10$ n'admet pas d'antécédent car l'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution.

  Cette situation est un contre-exemple à la surjectivité de f.

— Soit, pour un y quelconque, on cherche à savoir s'il admet un antécédent par f.

Soit $y \in \mathbb{R}$ donné. Cherchons un éventuel antécédent x à cet élément :

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad y\,(x^2 + 1) = x^2 + 10x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2\,(y - 1) - 10x + (y - 1) = 0\,.$$

Cet élément y admet un antécédent x si et seulement si cette équation en x admet des solutions :

- si $y=1$, cette équation est du premier degré en x : $-10x=0 \Leftrightarrow x=0$
- si $y \neq 1$, cette équation est du deuxième degré en x, elle admet des solutions si et seulement si son discriminant est positif ou nul :

$$\Delta = 100-4\,(y-1)^2 = 4\left[25-(y-1)^2\right] = 4\,[\,5-(y-1)\,]\,[\,5+(y-1)\,]$$

$$= -4\,(y-6\,)\,(y+4\,)\,, \qquad \Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in [-4\,,\,1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,6\,]\,.$$

En résumé, tout y hors de l'intervalle $[-4\,,\,6\,]$ n'a pas d'antécédent par f.
Un contre-exemple à la surjectivité de f est donné, par exemple, par $y=10$: il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la relation $f(x)=10$.

On vient de montrer que y admet un antécédent dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $y \in [-4\,,\,6\,]$.

Donc $\operatorname{Im} f = [-4\,,\,6\,]$. Et la fonction

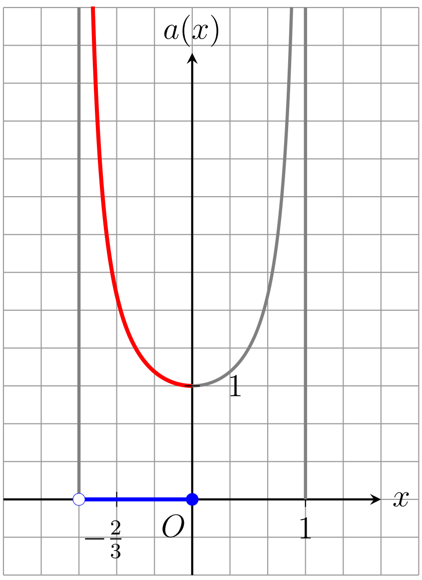
$$f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow [-4\,,\,6\,] \qquad x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+10x+1}{x^2+1}$$

est surjective.

7. Pour chacune des deux fonctions suivantes, esquisser son graphe, puis déterminer l'intervalle I (le plus grand possible) contenant x_0 de sorte que la fonction soit injective sur I.

(a) $a(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\,,\quad -1<x<1\,,\quad x_0 = -\frac{2}{3}\,,$ (b) $b(x) = \sin(x)\,,\quad x_0 = 9\,.$

(a) Esquisse du graphe de a :



L'ensemble Image est

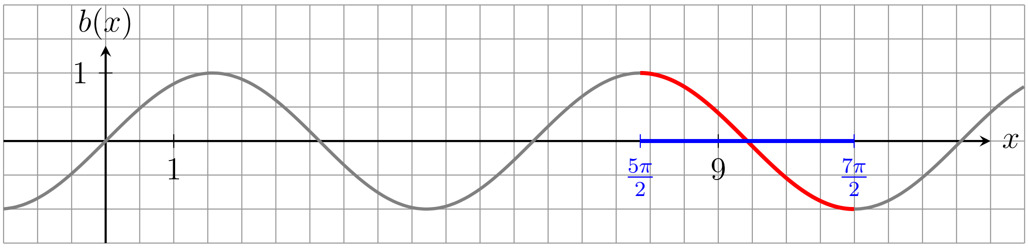
$$\operatorname{Im} f = [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

Les plus grands domaines I sont ceux qui conservent la surjection de f sur $[\,1\,,\,+\infty\,[$.

Si I est un intervalle, alors il ne peut s'agir que de $I = \,]-1\,,\,0\,]$ ou de $I = [\,0\,,\,1\,[$.

Celui qui contient $x_0 = -\frac{2}{3}$ est donc $I = \,]-1\,,\,0\,]$.

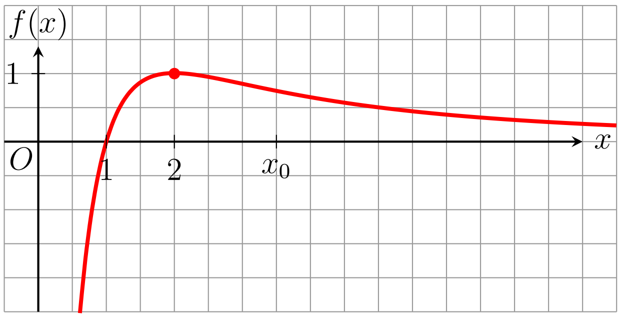
(b) Esquisse du graphe de b :



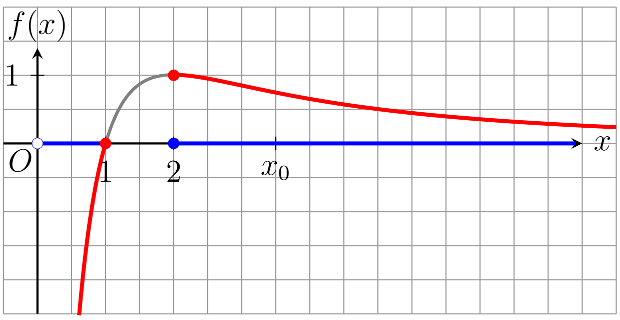
Les intervalles I telles que $b: I \to [-1\,,\,1]$ soit bijective sont ceux sur lesquels la fonction sinus est monotone, il sont de type $I = [\,\frac{(2k-1)\pi}{2}\,,\,\frac{(2k+1)\pi}{2}\,]$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'intervalle cherché est celui qui contient $x_0 = 9$: $I = [\,\frac{5\pi}{2}\,,\,\frac{7\pi}{2}\,]$.

8. On donne ci-joint le graphe d'une fonction f qui admet les axes de coordonnées comme asymptotes. Soit $x_0 > 2$. Déterminer un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et tel que la fonction $f: D \to]-\infty\,,\,1]$ soit bijective.



— Voici une solution : $D =]\,0\,,\,1\,] \cup [\,2\,,\,+\infty\,[$.



— En voici une autre : soit par exemple $\{x_1\,,\,x_2\} = f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$,

$$D =]\,0\,,\,x_1\,[\, \cup [\,2\,,\,x_2\,]\,.$$